＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

仮想仕事の原理と*Euler - Lagrange*の方程式
（*D'Alembert*の原理から）

2001.6.30　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これを書き始めてある程度のところまでいったのだが、例の悪名高いWindowsの「不正な処理をしました」という奴のおかげで原稿がパーになった(^^);;折角調子付いていたのに、フントニモー！！。。。。ま、気を取り戻してやりなおすか(^^)。

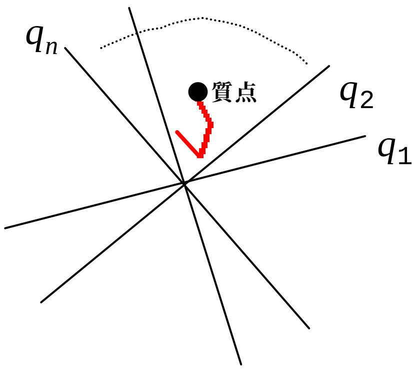
小生が学生時代に解析力学のセミナーではじめて仮想仕事の原理を習ったとき、先生（たしか素粒子論を専攻されていたと記憶するが）は仮想変位の説明を次のようになされた。「映画はフィルムのコマ送りで動いているように見えますね。ところでその中から１コマ取り出して、そこに写っているブツを少し動かしてやる。それが仮想変位というものです。」 フ〜ん、そんなものか。なんとなく分かったような、大体のイメージがつかめたような気がした。しかし、ナンでそんなもんを考えんといかんにゃ〜(関西弁まるだし)(^^);;という点についてはほとんど深く追求しなかったが。。。また仮想仕事の考え方から*Euler - Lagrange*の方程式がでてくるのには正直いってびっくりした(^^)。

１.*D'Alembert*の原理

***D'Alembert*の原理の説明に入る前に、配置空間というものをまず考えておきます。**

[配置空間]

時刻 t_1 から t_2 の間にわたる系の運動というものを *Euclid* 空間(x, y, z)内の曲線と捉えることができます。これをより一般的に考えると系の運動は、一般化座標(*-1) q_i を n 個の座標軸とする直交座標空間内の曲線（系の運動の道筋）を表わしますね。この n 次元座標空間を配置空間（*configration space*）と呼び、系の瞬間的な配置を配置点（*system point*）と呼びます。時間は、形式的にはこの系の運動の曲線のパラメータと考えられます。



【配置空間】

[*D'Alembert*の原理]

① 仮想変位について

仮想（無限小）変位というのは、与えられた瞬間 t において、その系に加えられている力と拘束(*-2)に矛盾しないように、座標の勝手な無限小変化 $d\boldsymbol{r}_i$ を行なった結果として起こる系の配置の変化のこと、ということになります。ここで仮想といったのは、時間間隔 dt の間に起こる実際の変位と区別するためです。少し分かりにくいですが、序章の映画のコマを思い出してください(^^)。

② 仮想仕事について

系が釣り合いの状態にあり、各質点に作用する力の合力がゼロ$(\boldsymbol{F}_i=0)$とします。この系に仮想変位 $d\,\boldsymbol{r}_i$ を行なうと、各質点に作用する力 $\boldsymbol{F}_i$ のなす仮想仕事 $\boldsymbol{F}_i \bullet d\,\boldsymbol{r}_i$ もゼロとなります。そこですべての質点について和をとると

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad ①$$

となります。要約すると、質点が釣り合い状態(平衡)にあるとき、これに任意の微小変化をさせたときに働く仕事の和はゼロである。これを仮想仕事の原理と呼びます。

③ D'Alembertの原理

仮想仕事の項でやたらと系は釣り合いの状態にあること強調しましたが、この点を頭に入れておいてください。②項では、系が釣り合いの状態にあるという静力学系を取り扱いました。D'Alembertの原理はこの考え方を発展させ運動する系（動力学系）に拡張したものということができます。

Newtonの運動第２法則は $\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}$ と書かれますが、これを次のように書くと、動力学系を静止力学系に焼きなおすことに相当しますね。ここがミソです(^^)。

$$\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \qquad ②$$

さて、②式は、質点が $\ddot{\boldsymbol{r}}$ の加速度で運動しているとき、$-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ の力を付け加えることにより運動している質点に働く力が釣り合っていることを表わすと解釈できますね。これを**D'Alembertの原理**と呼びます。ちなみに、釣り合いのために加えた力 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ を慣性抵抗と呼んだりします。

2. Euler-Lagrangeの方程式

いよいよD'Alembertの原理からEuler-Lagrangeの方程式を導くステップに入る。

D'Alembertの原理を質点系に適用し、仮想仕事を求めると

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i\right) \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad ③$$

となります。ここで $\boldsymbol{r}_i$ の表現を一般化座標 q_i の表現に変えておきます。

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_n, t\right) \qquad ④$$

④式より

$$d\,\boldsymbol{r}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} d\,q_j \qquad ⑤$$

ここで注意すべき点は、仮想変位$d\,\boldsymbol{r}_i$ は座標の変位だけを考えていますから、時間の変分 $d\,t$ は含まれないということです。また、

$$v_i \equiv \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} d\,\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \qquad ⑥$$

と書けます。

さて、③式の第1項である $\boldsymbol{F}_i$ による仮想仕事は、①式より

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} d\,q_j = \sum_j Q_j d\,q_j \qquad ⑦$$

となります。ここで Q_j を一般化力の成分と呼ばれるもので

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad ⑧$$

で定義されます。この一般化力は必ずしも力のディメンションを持つとは限りませんが（一般化座標 q_i が長さのディメンションをもつ必要がなかった)、$Q_j d\,q_j$ は必ず仕事のディメンションを持つ必要があることに留意してください。

次に③式の第2項は

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} d\,q_j \qquad ⑨$$

となります。ところで

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i \boldsymbol{v}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \boldsymbol{v}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \right\} \qquad ⑩\end{aligned}$$

と書ける。ただしここで次の関係式を使った

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t} \qquad \text{（これは④式より）}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad \text{（これは⑥式より）}$$

これより⑨式は

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} d\,q_j$$

となります。

さて、$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ を系の運動エネルギー T に等しいとおくと、③式は

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i - \dot{\boldsymbol{p}}_i \right) \bullet d\,\boldsymbol{r}_i = \sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] d\,q_j = 0 \qquad ⑪$$

となります。仮想変位 $d\,q_j$ は他の仮想変位 $d\,q_k$ とは独立であるから、⑪の恒等式が成り立つためには

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \cdots, n \qquad ⑫$$

でなければならない。この方程式を $Euler$ - $Lagrange$ の方程式と呼びます。しかし、普通は

つぎの述べる表式の方程式を$Euler-Lagrange$の方程式と呼んでいます。
力がスカラーポテンシャル(V)から導かれる場合(保存系) $\boldsymbol{F}_i$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{F}_i = -\nabla_i V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n)$$

この場合の一般化力は

$$Q_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \bullet \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

となりますね。ポテンシャルV は位置だけの関数ですから、これを⑫式に代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \cdots, n \tag{⑬}$$

と書くことができます。ここで新しい関数として $Lagrangian$ を

$$L = T - V \tag{⑭}$$

で定義すると、⑬式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \cdots, n \tag{⑬}$$

となります。この方程式を ***Euler-Lagrange*の方程式** と呼びます。

ここで話を整理しておきましょう。
(ｉ) 一般に自由度 f の力学系は、一般化座標 $q_1, q_2, \cdots, q_f$ とそれらの 1 階の時間微分の関数として与えられる ***Lagrangian***

$$\boldsymbol{L = L(q_1, q_2, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_f)}$$

で特徴づけられ、この系を記述する運動方程式は f 個の***Euler-Lagrange***の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\P L}{\P \dot{q}_1}\right) - \frac{\P L}{\P q_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\P L}{\P \dot{q}_f}\right) - \frac{\P L}{\P q_f} = 0$$

である。
(ⅱ)***Euler-Lagrange***の方程式は一般化座標の取り方によらず成立する。
これは証明を要しますが、例えば下の演習問題にもあるように $x-y-z$で書いても $r-q-f$ で書いても方程式の形は変わっていませんね。体感で理解してください(^^);。この証明はすこしゴタゴタするので別の機会にやることにします。

以上で本講を終わります。最後に演習問題をやっておきましょう。

＝問題-1＝
互いにポテンシャル $V(x_1 - x_2)$ で相互作用しているときの２粒子の$Newton$の運動方程式が $Lagrangian$

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-V(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$$

から*Euler-Lagrange*の方程式として導かれることを示せ。

＝答え＝

*Euler-Lagrage*の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

いま $\boldsymbol{q}_1\to x_1$, $\boldsymbol{q}_2\to x_2$ と置き換えてやると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_1}=m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_2}=m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2,\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_1}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1},\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_2}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1}$$

これを*Euler-Lagrage*の方程式に入れると

$$m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1+m_2\ddot{\boldsymbol{x}}_2=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}_1}$$

となって、*Newton*の運動方程式となる。

＝問題-2=

ポテンシャルエネルギーが$V(\boldsymbol{r})$で表される平面を運動する物体の運動方程式を求めよ。

＝答え＝

運動エネルギーをTとすると

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\boldsymbol{r}}^2+\left(\boldsymbol{r}\dot{q}^2\right)\right)$$

Lagrangian L は

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{\boldsymbol{r}}^2+\left(\boldsymbol{r}\dot{q}^2\right)\right)-V(\boldsymbol{r})$$

*Euler-Lagrange*の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0$$

これより

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{r}\dot{q}^2+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

これより

$$m\boldsymbol{r}^2\dot{q}=\text{一定}$$

これは角運動量一定を意味します。ラグランジェの方程式を使うと機械的に運動方程式を解くことができて楽ですね(^ ^)。

最後におまけ
＝問題＝
コリオリの力を導け
＝答え＝
静止している座標系（x, y, z）から回転している座標系（X, Y, Z）に移る。

$$x = X\cos\omega t - Y\sin\omega t \qquad ①$$

$$y = X\sin\omega t + Y\cos\omega t \qquad ②$$

$$z = Z \qquad ③$$

運動エネルギーをT とすると

$$T = \frac{1}{2}m\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2\right) \qquad ④$$

ポテンシャルエネルギー V は

$$V = V(x, y, z) \qquad ⑤$$

④⑤に①②③を入れて$Euler - Lagrange$の方程式を解く。

$$m\ddot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X} + 2mw\dot{Y} + 2mwX \qquad ⑥$$

$$m\ddot{Y} = -\frac{\partial V}{\partial Y} + 2mw\dot{X} + 2mwY \qquad ⑦$$

$$m\ddot{Z} = -\frac{\partial V}{\partial Z} \qquad ⑧$$

⑥、⑦式の右辺の第3項は遠心力で、コリオリの力は第2項にでている。

これを整理すると、コリオリの力は$2m(\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{w})$となり、コリオリの力は速度と回転速度に比例することが分かる。ちなみに低気圧の回転の向きは これによるとか。。。

(*-1)一般化座標について
普通座標といえば x, y, z を考えるが、計算を便利にするために例えば極座標 r, q, f で運動方程式を書いたほうが都合がよいことがしばしばあります。このr, q, f も一般化座標と呼んでいますが、もっと一般的に言うと、一般にN 個の粒子系は、その系を記述するために必要な変数の数(自由度)として$3N$ 個の変数が必要になります。この変数を$q_1, q_2, \cdots, q_n$ というN 個の文字で表わし、それらを一般化座標(*generalized coordinates*)と呼んでいます。つまり、一般化座標というものを導入することによって*Euler-Lagrange*の方程式が形が変わることなくスッキリとした形に書けるようになります。

(*-2)拘束について
ここでは拘束についての議論はしませんでした(^^);。拘束というのは、系の運動を制限するもののことです。例えば剛体を取り上げれば、これを構成している質点の運動に関する拘束は距離 r_{ij} を不変に保つ、というやつが拘束条件になります。ところで拘束にはホロノミックな拘束と非ホロノミックな拘束というものがあります。前者は拘束条件が質点の座標の間の関係式として表わせるもの（上の剛体の場合がそうです）、一方後者はそのような形で表わせないもの、ということになります。まぁ、そのほかいろいろな分類があるようですが、あまり詳しく知りませんのでここらでおしまい（^^）。

（以上）