

=====
変分の原理とEuler-Lagrangeの方程式

2001.7.01 by KENZOU

=====
=====

前講の「仮想仕事の原理」では、系の運動のある瞬間の状態と、その状態からの仮想変位（無限小変化）の考察 - D' Alembertの原理 - を出発点としてEuler-Lagrangeの方程式を導いた。このやり方は、いわば ” 微分原理 ” を出発点としたものである。しからは ” 積分原理 ” というようなものからEuler-Lagrangeの方程式が導かれるのではないかとなるわけで、これがHamiltonの原理（変分原理）といわれるものである。

1. 変分原理(Hamiltonの原理)

時刻 t_1 から t_2 の間にわたる系の運動の全体について、系が実際に行なう運動を決めるのに、この運動からの仮想変位的な変動（変分）を考え、この変分が極値をとるようにする。

具体的には、自由度 f の力学系を考えてみる。Lagrangian を L とし、作用積分を

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (1)$$

で定義する。時刻 t_1 から t_2 までの系の運動は作用積分が極値をとるような運動である。

$$dI = d \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = 0 \quad (2)$$

以上の議論を整理すると「作用積分は変数 q_1, \dots, q_f の与え方によりいろいろな値をとるが、偶然 q_1, \dots, q_f がEuler-Lagrangeの方程式を満たすようなものであるとき、作用積分は極値をとる」ということになります。

2. 変分原理からEuler-Lagrangeの方程式の導出

ある $q_i(t)$ ($i=1, \dots, f$)によって作用積分(1)を計算し、それを I とする。次に、時刻 t_1 と t_2 では q_i と同じだが、その他の時刻では $q_i(t)$ と無限小だけ異なった $q_i'(t)$ を使って作用積分(1)を計算したときの値を I' とする。 $q_i(t)$ と $q_i'(t)$ の無限小の差を $h_i(t)$ とすると

$$q_i'(t) = q_i(t) + h_i(t) \quad (3)$$

したがって

$$dI \equiv I' - I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1 + h_1, \dots, q_f + h_f, \dot{q}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{q}_f + \dot{h}_f) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

$$= \dot{\mathbf{Q}} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \mathbf{h}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\mathbf{h}}_i \right) dt \quad (4)$$

ただし(3)から(4)への移行には次の関係式を使った。

$$\begin{aligned} f(x+\mathbf{D}x, y+\mathbf{D}y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{D}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{D}y + \mathbf{e}_1 \mathbf{D}x + \mathbf{e}_2 \mathbf{D}y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{D}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{D}y \quad (\text{2次以上の無限小を省略}) \end{aligned}$$

(4)の右辺第2項を部分積分すると

$$\begin{aligned} dI &= \dot{\mathbf{Q}} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \mathbf{h}_i(t) + \left[\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathbf{h}_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \dot{\mathbf{Q}} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \mathbf{h}_i(t) dt \quad (5) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{h}_i(t_1) = \mathbf{h}_i(t_2) = 0$ を使った。

(5)式で、任意の無限小 $\mathbf{h}_i(t)$ に対して $dI = 0$ となるのは

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (6)$$

の時のみである。この(6)式はEuler-Lagrangeの方程式である。

3. 座標変換とEuler-Lagrangeの方程式

Euler-Lagrangeの方程式は一般化座標の選び方によらず成立することを調べる。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) = 0 \quad ()$$

さて、

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_f) \quad (i=1, \dots, f) \quad (7)$$

とすると

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial Q_f} \dot{Q}_f \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k = \sum_{j=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \quad (8) \end{aligned}$$

(8)より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \quad (9)$$

また(9)式の右辺は(7)式により Q_1, \dots, Q_f のみの関数であるから(9)式を時間微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\sum_{j=i}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} dQ_j \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k} \dot{Q}_j \end{aligned} \quad (10)$$

同様に(8)式の右辺の $\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$ は Q_1, \dots, Q_f のみの関数であり、例によって $\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_f$ は Q_i と独立のように取り扱おうと(8)式より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} \dot{Q}_j \quad (11)$$

これを(10)式と比べると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \quad (12)$$

を得る。

次にLagrangian L を Q_k で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right) \quad (13)$$

また、 \dot{Q}_k で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \quad (14)$$

となる。ここで(9)式を使った。

(14)式を時間で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) &= \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。ここで(9)式を使った。

(15)式と(13)式の差をとると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right\} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \quad (16)$$

となる。したがって()の第1式が成立すれば()の第2式も成り立つことになる。

(以上)