＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

変分の原理と*Euler - Lagrange*の方程式

2001.7.01　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前講の「仮想仕事の原理」では、系の運動のある瞬間の状態と、その状態からの仮想変位（無限小変化）の考察－D’Alembertの原理－を出発点としてEuler-Lagrangeの方程式を導いた。このやり方は、いわば ”微分原理” を出発点としたものである。
しからば ”積分原理” というようなものから*Euler - Lagrange*の方程式が導かれるのではないかとなるわけで、これが*Hamilton*の原理（変分原理）といわれるものである。

1. 変分原理(*Hamilton*の原理)

時刻 t_1 から t_2 の間にわたる系の運動の全体について、系が実際に行なう運動を決めるのに、この運動からの仮想変位的な変動（変分）を考え、この変分が極値をとるようにする。

具体的には、自由度 f の 力学系を考えてみる。*Lagrangian* を L とし、作用積分を

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} dtL\left(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f\right) \tag{1}$$

で定義する。 時刻 t_1 から t_2 までの系の運動は作用積分が極値をとるような運動である。

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} dtL\left(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f\right) = 0 \tag{2}$$

以上の議論を整理すると「作用積分は変数 $q_1, \cdots, q_f$ の与え方によりいろいろな値をとるが、偶然 $q_1, \cdots, q_f$ が*Euler - Lagrange*の方程式を満たすようなものであるとき、作用積分は極値をとる」ということになります。

2. 変分原理から*Euler - Lagrange*の方程式の導出

ある $q_i(t)$ $(i=1, \cdots, f)$によって作用積分(1)を計算し、それをI とする。次に、時刻 t_1 と t_2 では q_i と同じだが、その他の時刻では $q_i(t)$と無限小だけ異なった$q_i'(t)$を使って作用積分(1)を計算したときの値を I' とする。$q_i(t)$と$q_i'(t)$の無限小の差を $h_i(t)$ とすると

$$q_i'(t) = q_i(t) + h_i(t) \tag{3}$$

したがって

$$\delta I \equiv I' - I = \int_{t_1}^{t_2} dtL\left(q_1+h_1, \cdots, q_f+h_f, \dot{q}_1+\dot{h}_1, \cdots, \dot{q}_f+\dot{h}_f\right) - \int_{t_1}^{t_2} dtL\left(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f\right)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right) \tag{4}$$

ただし(3)から(4)への移行には次の関係式を使った。

$$f(x+Dx, y+Dy) = \frac{\partial f}{\partial x} Dx + \frac{\partial f}{\partial y} Dy + e_1 Dx + e_2 Dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} Dx + \frac{\partial f}{\partial y} Dy \quad \text{（2次以上の無限小を省略）}$$

(4)の右辺第2項を部分積分すると

$$d\,I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} h_i(t) + \left[\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} h_i(t) \tag{5}$$

ただし、$h_i(t_1) = h_i(t_2) = 0$ を使った。

(5)式で、任意の無限小$h_i(t)$に対して $d\,I = 0$となるのは

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \tag{6}$$

の時のみである。この(6)式は*Euler - Lagrange*の方程式である。

3.座標変換と*Euler - Lagrange*の方程式

Euler - Lagrangeの方程式は一般化座標の選び方によらず成立することを調べる。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) = 0 \tag{※}$$

さて、

$$q_i = q_i(Q_1, \cdots, Q_f) \quad (i = 1, \cdots, f) \tag{7}$$

とすると

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \frac{\partial q_i}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial Q_f} \dot{Q}_f$$

$$= \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \tag{8}$$

(8)より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \tag{9}$$

また(9)式の右辺は(7)式により$Q_1, \cdots, Q_f$ のみの関数であるから(9)式を時間微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\sum_{j=i}^{f}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}dQ_j\right)\right)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k}\dot{Q}_j \qquad (10)$$

同様に(8)式の右辺の$\dfrac{\partial q_i}{\partial Q_j}$は$Q_1,\cdots,Q_f$のみの関数であり、例によって$\dot{Q}_1,\cdots,\dot{Q}_f$は$Q_i$と独立のように取り扱うと(8)式より

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}=\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j\right)=\sum_{j=1}^{f}\frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j}\dot{Q}_j \qquad (11)$$

これを(10)式と比べると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right)=\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k} \qquad (12)$$

を得る。

次に*Lagrangian* L を Q_kで微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial Q_k}=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}\right) \qquad (13)$$

また、$\dot{Q}_k$ で微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}=\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k}=\sum_{i=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \qquad (14)$$

となる。ここで(9)式を使った。

(14)式を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right)=\sum_{i=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}\right\} \qquad (15)$$

が得られる。ここで(9)式を使った。

(15)式と(13)式の差をとると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial Q_k}=\sum_{i=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right\}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \qquad (16)$$

となる。したがって(※)の第１式が成立すれば(※)の第２式も成り立つことになる。

（以上）