＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

*Hamilton - Jacobi*の理論について

2001.5.27 by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1．正準変換と母関数

詳しい話は別途レポート（正準変換と母関数だったかなぁ）をあげていますのでそちらを参照していただくとして、本論に必要となるポイントだけを記します(^^);

正準変換$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\longrightarrow(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$を一般的に取り扱うのに母関数と呼ばれるものが使われます。簡単にレビューすると、正準変数 q_i, p_i, Q_i, P_i が互いに正準変換で結ばれているとき、

$$q_i = q_i(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f,t)\ ,\ p_i = p_i(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f,t) \tag{1}$$

$$Q_i = Q_i(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t)\ ,\ P_i = P_i(q_1,\dots,q_f,p_1,\dots,p_f,t) \tag{2}$$

次の関係式が成り立つ（←これは正準変換の必要十分条件）。

$$\sum_i^f p_i\dot{q}_i - H(q;p,t) = \sum_i^f P_i\dot{Q}_i - K(Q;P,t) + \frac{dW}{dt} \tag{3}$$

ただし、Hはもとの*Hamiltonian*、Kは変換後の*Hamiltonian*です（ここでは時間を陽に含んでいる一般的なケースとしています）。

(3)式の右辺の最後にでてきたWが母関数というやつでした。この母関数の具体的形がわかれば正準変換の具体的形が決まることから、Wを正準変換の母関数と呼ばれます。

さて、母関数は独立変数の選び方によって次の４つのうちのいずれかの形に書けます。

(A) $W=W(q;Q,t)$

(B) $W=W(q;P,t)$

(C) $W=W(p;Q,t)$

(D) $W=W(p;P,t)$

母関数(A)～(D)と正準変数の関係を整理すると下表になります。

	母関数	正準変数と母関数の関係
(A)	$W(q;Q,t)$	$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\ P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i},\ K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$
(B)	$W(q;P,t)$	$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\ Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i},\ K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$
(C)	$W(p;Q,t)$	$q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\ P_i=-\frac{\partial W}{\partial Q_i},\ K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$
(D)	$W(p,P,t)$	$q_i=-\frac{\partial W}{\partial p_i},\ Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i},\ K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$

次に本論に入ります。

2．*Hamilton -Jacobi*の理論

正準変換は力学の問題を簡単に解けるようにするための一般的な手順を提供するというものですね。そこで、次の２つのケースについて調べてみることにします。

(A) *Hamiltonian*がq, p, t の任意の関数である場合

$$H=H(q,p,t)$$

(B) *Hamiltonian*が保存される場合 ($dH/dt=0$)

$$H=H(q,p)$$

(A) *Hamiltonian*: $H=H(q,p,t)$ - - - - - - - - - - - - - - - - -

この場合の手法は、正準変換されたすべての新しい座標 Q_i, P_i が運動の定数となるような正準変換を探すことです。具体的には、変換後の*Hamiltonian* K をゼロとするような母関数Wを選べぶことになります。この母関数Wの満たすべき条件は後で求めるとして、新しい*Hamiltonian* Kを使った正準方程式は

$$\frac{\partial K}{\partial P_i}=\dot{Q}_i=0 \tag{4}$$

$$-\frac{\partial K}{\partial Q_i}=\dot{P}_i=0$$

となり、(4)式の解は直ちに得られて

$$Q_i=b_i \tag{5}$$

$$P_i=a_i$$

となり、確かに正準変換されたすべての新しい座標 Q_i, P_i は運動の定数となりますね。

さて、$K=0$ を実現する母関数Wの条件を次に求めてみます。変換後の*Hamiltonian* K はもとの*Hamitonian* Hと母関数 Wと次の関係でむすばれていますね。

$$K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

ここから、$K=0$を実現する母関数Wの条件としては

$$H(q,p,t)+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{6}$$

を満たすものであればよいということになります。母関数Wの具体的な関数形を決めるのに独立変数として新しい運動量 P と時間 t をとることにします（2項の(B)参照)。すると

$$W=W(q;P,t), \quad p_i=\partial W/\partial q_i, \quad Q_i=\partial W/\partial P_i \tag{7}$$

と書くことができて、(6)式を改めて書きなおすと

$$\frac{\partial W(q;P,t)}{\partial t}+H(q,p,t)=0 \tag{8}$$

となります。

(8)式の*Hamiltonian*を同じ変数の関数として書き直すと($p_i \to \partial W/\partial q_i$と置き変える)

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial W}{\partial q_f},t\right)=0 \qquad (9)$$

となります。(9)式は、q_i と t の合計（f+1)個を独立変数とするWに関する偏微分方程式で、これを**Hamilton -Jacobi の偏微分方程式**と呼んでいます。また、このような変換を引き起こす母関数Wを**Hamiltonの主関数**と呼び $S=S(q\,;P\,,t)$と書かれます。*Hamilton* の主関数 S を用いて(9)式を書きなおすと(普通このような表記が一般的です）。

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_f},t\right)=0 \qquad (10)$$

次に、方程式(10)の解について調べます。(10)式は数学的には$(f+1)$個の変数についての１階の偏微分方程式ですからその完全解は(f+1)個の独立な積分定数 $a_1,\cdots,a_f,a_{f+1}$ を含まなければなりません。(5)式から新しい運動量 P_i は定数であり、詳しい議論は抜きにして、これを偏微分方程式の f 個の積分定数に選ぶことができます。また、方程式(10)をよく眺めると(10)式は S の q および t に関する偏導関数だけを含んでおり、S自身は含んでいないことがわかりますね。S を解の１つとするなら、a を任意の定数として $S+a$ もまた解となります(微分すれば定数aは消えてしまう）。従って、S の付加定数 a を残り１個の積分定数に選びます。

以上、話がゴタゴタしたので整理すると

① f 個の積分定数 $P_i=a_i$ は一定の値を持つ新しい運動量である。

また

$$p_i=\frac{\partial S(q_i,P_i,t)}{\partial t}=\frac{\partial S(q_i,a_i,t)}{\partial t}$$

であり、この方程式は時間について１階の微分方程式であるから、f 個の a_iと時刻 t_0 における q_i,p_i の初期値を与えれば完全に解くことができる。

② 新しい座標Q_iも一定の値を持つ新しい座標を与える。

$$Q_i=b_i=\frac{\partial S(q_i,a_i,t)}{\partial a_i}$$

定数b_i は同様にして初期条件から求められる。そのためには右辺を$t=t_0$ における q_iの初期値と上で求めたa_i の値を用いて計算すればよい。

[余談] *Hamilton* の主関数と*Lagrangian* の関係について
Sの時間に関する全導関数をとると

$$\frac{dS}{dt}=\sum_i\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t}$$

となる（ただしP_i は時間的に定数であるからその導関数は現れない）。

ここで、$p_i=\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, $\dfrac{\partial S}{\partial t}+H=0$ という関係式を使うと上の関係式は

$$\frac{dS}{dt}=\sum_i p_i\dot{q}_i-H=L$$

と書ける。つまり、$Hamilton$の主関数Sと$Lagrangian\ L$は

$$S=\int dtL+\text{定数}$$

という関係で結びついていることがわかる(テキストP60の演習問題５参照)。

さて、頭を整理するために次の例題をやりましょう（＾＾）。

[例題１] １次元調和振動子の問題を$Hamilton-Jacobi$の方法で解け

[略解２] 調和振動子の$Hamitonian$ ：$H=\dfrac{1}{2m}p^2+\dfrac{k}{2}q^2$，$k$：バネ定数 ①

pを$\partial S/\partial q$とおいて$Hamiltonian$に代入すれば、Sに対する$Hamilton-Jacobi$方程式が得られる。新しい$Hamiltonian$がゼロでなければならないという要求から

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\frac{k}{2}q^2+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \qquad ②$$

となる（ここまでは(10)式の議論）。②式は座標 q を含む部分と t だけを含む部分で構成されているから変数分離を行なうことができるのでこの方程式の解を

$$S(q,a,t)=W(q,a)-a\,t \qquad ③$$

とおく。ここでaは積分定数（上の$P_i=a_i$というやつですね）。

すると②式は

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{k}{2}q^2=a \qquad ④$$

となり積分すると

$$W=\sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2a}{k}-q^2}$$

となる。③式より

$$S=\sqrt{mk}\int dq\sqrt{\frac{2a}{k}-q^2}-a\,t \qquad ⑤$$

さて、$b=\partial S/\partial a$ という関係を利用すると

$$b=\frac{\partial S}{\partial a}=\sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2a}{k}-q^2}}-t \qquad ⑥$$

この積分を行なうと q が飛び出してくる

$$t+b=-\sqrt{\frac{m}{k}}\cos^{-1}\left(q\sqrt{\frac{k}{2a}}\right)$$

これから

$$q=\sqrt{\frac{2a}{k}}\cos w(t+b),\quad w=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ⑦$$

次に、a, b を具体的に求める。このために初期条件を次のように設定する。「$t=0$ で粒子は静止しており(従って$p_0=0$)、釣り合いの位置からq_0だけ変位していた」とする。

a を求めるには $t=0$ に対する②式(B)を計算すればよい。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_{t=0}=p_0=0=\sqrt{2m}\sqrt{a-\frac{kq_0^2}{2}}$$

これから

$$a=\frac{kq_0^2}{2}=\frac{mw^2q_0^2}{2}$$

つまり、定数a は系の全エネルギーの初期値となる。今の場合$Hamiltonian$は保存されるので a は系の全エネルギーに等しいということになる（新しい運動量P_iは全エネルギーに等しいものだということになりました）。⑦式より

$$q=q_0\cos w(t+b)$$

となり、初期条件 $t=0, q=q_0$の条件下では$b=0$(すなわち運動量＝０)であることがわかる。

($P.S$)

$Hamilton$の主関数 S は全エネルギーに等しい正準運動量と恒等的にゼロに等しい（ただしここでの初期条件）正準座標bへの正準変換の母関数である。

(B)$Hamiltonian$: $H=H(q,p)$-----------------

この場合は、新しい運動量がすべて運動の定数となり、そして特にa_1が運動の定数Hになるような１つの正準変換を考えます。この変換の母関数を$W(q,P)$と書くと、変換式は2項表(B)より

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=\frac{\partial W}{\partial a_i} \tag{11}$$

いま、Wを定める条件は$Hamiltonian\ H$が新しい運動量a_1に等しくなければならないということから

$$H(q_i,p_i)=a_1$$

例によって$p_i\to\partial W/\partial q_i$の置き換えをすると母関数$W$に要求される条件がでてきます。

$$H\left(q_i,\frac{\P W}{\P q_i}\right)=a_1 \tag{12}$$

母関数Wはこの偏微分方程式を満たさなければなりません。方程式(12)も***Hamilton-Jacobi*の方程式**と呼ばれます。Wは時間を含みませんから、もとの$Hamiltonian\ H$と新しい$Hamiltonian\ K$ とは等しく従って$K=a_1$ となります。**母関数*W*は*Hamilton*の特性関数**と呼ばれすべての新しい座標がサイクリックになるような正準変換を引き起こします(¬そのような母関数を選んだのだから当たり前＾＾)。

さて、新しい$Hamiltonian\ K$のもとでは

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \longrightarrow {}_i = a_i \tag{13}$$

となり、K は運動量 a_i の１つ、つまりa_1 だけの関数ですから $\dot{Q}_i$に対する運動方程式は

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial a_1} = 1$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial a_i} = 0 \quad (i \neq 1)$$

となってその解は

$$Q_1 = t + b_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial a_1} \tag{14}$$

$$Q_1 = b_i \equiv \frac{\partial W}{\partial a_i} \qquad (i \neq 1)$$

と得られます。単なる運動の定数でない座標はQ_1だけであって、それは時間とある定数の和になります。

さぁ、この場合の$Hamilton$ - $Jacobi$方程式をどう解くのだぁ～ということになりますが、次にズバリこの問題に入っていきましょう。

サイクリックでない座標をq_1として、Wを

$$W = W_1 + \sum_i W_i(q_i, P_i)$$

の形におきます。サイクリック座標に共役な運動量は定数となりますから、$i \neq 1$に対する変換式は

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i = a_i \qquad i \neq 1 \tag{15}$$

この条件のもとでは$Hamilton$ - $Jacobi$の方程式は

$$H\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}, a_2, \cdots, a_f\right) = a_1 \tag{16}$$

となります。これはW_1に対する１階の微分方程式となるから直ちに解くことができます。
方程式(19)の解は

$$W_i = a_i q_i \qquad (i \neq 1)$$

となり、求める$Hamilton$の特性関数Wは簡単に

$$W = W_1 + \sum_{i=2}^{f} a_i q_i \tag{17}$$

と書けます。

例によって頭を整理するために例題をやりましょう（＾＾）。

[例題２] 一様な重力の作用の下の自由粒子の運動を$Hamilton$ - $Jacobi$の方法で解け

[略解２] 自由粒子の*Hamitonian*：$H=\dfrac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+mgz$ ①

xとyがサイクリック座標であるから、*Hamilton*の特性関数Wは(22)式より

$$W=W_1(z)+a_x x+a_y y \qquad ②$$

と書くことができる。ここでa_x, a_yは一定の値をもつp_x, p_yに等しい。*Hamilton -Jacobi*の方程式は(17)式より

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dW_1}{dz}\right)^2+a_x^2+a_y^2\right\}+mgz=a_1 \qquad ③$$

となる。ただしa_1は系の全ネルギーを表わす定数。

これを積分して

$$W_1=\int dz\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}$$

②式より

$$W=\int dz\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}+a_x x+a_y y \qquad ④$$

また⑲式より

$$t+b_1=\frac{\partial W}{\partial a_1}=\int\frac{mdz}{\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}}$$

$$=-\frac{1}{mg}\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz} \qquad ⑤$$

$$b_x=\frac{\partial W}{\partial a_x}=-\int\frac{a_x dz}{\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}}+x$$

$$=\frac{a_x}{m^2g}\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}+x \qquad ⑥$$

$$b_y=\frac{\partial W}{\partial a_y}=\frac{a_y}{m^2g}\sqrt{2ma_1-a_x^2-a_y^2-2m^2gz}+y \qquad ⑦$$

⑥、⑦式より軌道の方程式を求めると

$$\frac{x-b_x}{a_x}=\frac{y-b_y}{a_y},\quad z=\frac{a_1}{mg}-\frac{1}{2m^2g}\left(a_x^2+a_y^2\right)-\frac{m^2g}{2a_x^2}\left(x-b_x\right)^2$$

となる。整理すると

$$x=b_x+\frac{a_x}{m}\left(t+b_1\right) \qquad ⑧$$

$$y=b_y+\frac{a_y}{m}\left(t+b_1\right)$$

$$z=\frac{a_1}{mg}-\frac{1}{2m^2g}\left(a_x^2+a_y^2\right)-\frac{m^2g}{2a_x^2}\left(x-b_1\right)^2$$

となる。初期値として$t=0$の時の位置を$\left(x_0, y_0, z_0\right)$とし、初速度を$\left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right)$とする

と⑧式から

$$x_0 = b_x + \frac{a_x}{m} b_1, \quad v_{0x} = \frac{a_x}{m}$$

$$y_0 = b_y + \frac{a_y}{m} b_1, \quad v_{0y} = \frac{a_y}{m}$$

$$z_0 = \frac{a_1}{mg} - \frac{1}{2m^2 g}\left(a_x^2 + a_y^2\right) - \frac{m^2 g}{2a_x^2} b_1^2, \quad v_{0z} = -g b_1$$

となる。軌道の方程式は

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t$$

$$z = z_0 + v_{0z} t - (1/2) g t^2$$

となる。

（以上）