＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Lagrangianの対称性と物理量の定義
（Noetherの恒等式）

2002.12.23 by KENZOU
2002.12.28 2003.01.02
2003.01.03 2003.01.04

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1．はじめに

さて、いよいよLagrangianの対称性と物理量の定義の話しに入りましょう。その前に、前段として以下の話しにお付き合いください。

＜Lagrangianを求めて＞
小屋の入り口で番台が大声で叫んでいましたように「はじめに運動方程式が与えられとき、それをEuler-Lagrangeの方程式として再現するLagrangianは唯一ではなく、実は沢山ある～」っと、何とも困ったことが分かりました。まぁ、Euler-Lagrangeの方程式は微分方程式だから、そういうことは当然考えられるよッと、小生のように胸をはるのは一向にかまわないですが、困ったことは何一つ変わりませんね残念であるが。。。しかし、自然の物語を語るLagrangianはその中の一つにきっと違いない、はず。そのLagrangianをどうして求めればいいのか？？？
だけどだけど運動方程式があらかじめ与えられている場合はまだ罪が軽い（？）その運動方程式を与えるようなできるだけ簡単なLagrangianをとればよいわけだから（といってもLagrangianの多様性は上に述べたとおりで大変な辛苦(?)を伴うことは間違いない）。新しく発見された素粒子の運動など運動方程式がどんなものかサッパリ分っていない場合はどうするの？？？ この場合は一般原理や物理系の対称性（空間推進とか時間推進とか回転とかに対する性質：このあたりは以前勉強しましたね）などからLagrangianをできるだけ制限してそれから運動方程式を導き、実験と比較してLagrangianの品定めをしていくということになります。まぁ、いずれにしても苦労極まりないLagrangian探しの旅になにか指針、方針、杖、金棒、神・仏の導きはないものか。。。

それは**ある！**

神・仏は見捨てなかった。

＜神・仏の導き＞・・・何か新興宗教っぽいなぁ
『量子力学から一歩進んで素粒子論へ入ると、Noetherの恒等式なしで生きていけなくなる。多様な粒子の活躍する物理系を取り扱う場合、まず粒子の運動方程式を予想しなければならない。（略）つまりどんな相互作用Lagrangianを採用すべきかを決めなければならない。過去50年間の素粒子論の歴史は、この相互作用Lagrangianの模索の歴史であったといっても過言でない。この模索の歴史において、Noetherの恒等式の果たした役割の大きさは、はかりしれない』

このテキストからの引用文（P116）に登場した「Neotherの恒等式」がまさにそれなのである。このNeotherの恒等式を一言でいってしまうと、『ある座標変換に対するLagrangianの応答（つまりLagrangianの対称性）と、座標変換に伴って定義される物理量を結びつける恒等

式』ということになります。

＜導きの中身を少し伺う＞
先取りしてこの辺の事情をもう少し詳しく調べてみましょう。
時間の変換を伴わない無限小変換を考え、Lagrangianの変化を計算すると、Euler－Lagrangeの方程式の成り立つところで

$$\delta L=\sum_i\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\}\delta q_i+\frac{d}{dt}\left\{\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right\}$$
$$=\frac{d}{dt}\left\{\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right\}$$

となります（右辺の第１項はEuler-Lagrangeの方程式ですからゼロとなる）。つまり、ある無限小変換に対するLagrangianの変化は物理量$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \equiv \varepsilon N$の時間的変化に等しい。この無限小変換に関連する物理量ＮをNoether chargeと呼びます。δL＝０とすればその無限小変換に対してLagrangianは不変ですから、Lagrangianは対称であるといいますね。そのとき Noether Charge は保存量ということになります。つまり、Neotherの恒等式はLagrangianの対称性と保存則の関係を表したものなのです。これから「Lagrangianに十分多くの対称性を要求すれば、自然の物語を語るLagrangianはただ一つ決まる」ということになります。

「はじめに」がずいぶん長くなってしまいました、早速本論に入りましょう。

2．Lagrangianの多様性

＜留意事項＞
自由度ｆの系において

$$L'=L+\frac{dW}{dt}$$　（但しＷは$q_1, q_2, \cdots, q_f$の関数とする）

とＬとは全く同じEuler-Lagrangeの方程式を与えます。ここで議論するLagrangianはこのような２つのLagrangianの差が単なる時間の全微分にはならないようなLagrangianを取り上げることとします。

（１）２個の調和振動子

質量１、角振動数wの2個の調和振動子を考えましょう。Euler-Lagrangeの方程式として

$$\ddot{q}_1+w^2q_1=0 \qquad (2a)$$
$$\ddot{q}_2+w^2q_2=0 \qquad (2b)$$

を与えるLagrangianはいくつでもあるんだこれが（冷汗）。具体的には

$$L_1=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2-w^2q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2-w^2q_2^2\right) \qquad (2c)$$
$$L_2=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2-w^2q_1^2\right)-\frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2-w^2q_2^2\right) \qquad (2d)$$
$$L_3=\dot{q}_1\dot{q}_2-w^2q_1q_2 \qquad (2e)$$
$$\vdots$$

＜Lagrangianの対称性＞
さて、どれが本当のLagrangianなのでしょう。探索の第１歩としてこれらのLagrangianを対称性の観点から眺めましょう。振動子q_1とq_2の交換すると、L_1とL_3は変わりませんがL_2は符号が変わりますね。どちらの振動子を１とよび、どちらを２と呼ぶかわ全く勝手ですから、振動子１と２の交換でLagrangianの符号が変わるのは物理的に不合理ということになります。したがってこの段階でL_2候補は対象外ということになります。
次にL_3を調べてみましょう。２つの振動子の積がありますが、これが致命的（笑い）。というのはこの物理系では振動子１、２が単独では存在しえないのです。というのはq_1を０とおくとL_2は恒等的に０になってしまうから。この理由からL_3候補も対象外となってしまう。
結局、L_1だけが物理的に可能なLagrangianとして残ります。後ほどNoetherの定理を使って再び真のLagrangian探しをやってみますが、これは後のお楽しみ。

＜Hamiltonianの対称性＞
さて、Hamiltinianはどうかというと

$$H_1=\sum_i^2 p_i\dot{q}_i-L_1$$
$$=\frac{1}{2}(p_1^2+w^2q_1^2)+\frac{1}{2}(p_2^2+w^2q_2^2) \qquad (2f)$$

となり、このHamiltonianは時間的に保存します。また明らかに振動子１，２は対称に書かれており物理的に都合のよい形になっていますね。

（２）互いに距離に依存するポテンシャルで相互作用している１次元２粒子系

＜素直なLagrangian＞
ポテンシャル$V=V(|x_1-x_2|)$とすると、Newtonの運動方程式は

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial x_1}V \qquad (2g)$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial x_2}V \qquad (2h)$$

となります。このNewtonの運動方程式を与える最も素直なLagrangianは

$$L_1=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-V(|x_1-x_2|) \qquad (2i)$$

Hamiltonianは

$$H_1=\frac{1}{2m_1}p_1^2+\frac{1}{2m_2}p_2^2+V(|x_1-x_2|) \qquad (2j)$$

です。LagrangianもHamiltonianも特に目立った対称性は見えないですが、粒子１と２は同等に扱われていますね。

＜ひねくれたLagrangian＞
次に、Euler-Lagrangeの方程式を満たし、Newtonの運動方程式もでてくる、少々ひねくれたLagrangianを考えます。

$$L_2=m_1\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{1}{2}(m_2-m_1)\dot{x}_2^2+\frac{m_1}{m_2}V(|x_1-x_2|) \qquad (2k)$$

このLagrangianは粒子１、２を同等に扱わってはいませんね。Hamiltonianは

$$H_2 = \frac{1}{2m_1^2}\langle m_2 - m_1\rangle p_1^2 + \frac{1}{m_1} p_1 p_2 - \frac{m_1}{m_2} V \qquad (21)$$

となります。ここでも粒子１，２は同等に扱われていませんね。

さて、Newtonの運動方程式の段階では粒子１、２が対等に扱われているかどうかは全く分かりませんでしたが、 上の例のように、LagrangianまたはHamiltonianまでもってきてはじめて粒子の対等性が見えてくることに注意してください。 この点は非常に大事なことで、解析力学のウマミがまさにここに集約されているといえます。そこで少々脱線して解析力学のウマミについて整理してみましょう。

【脱線：解析力学のうまみについて】---
・Newton力学と解析力学のスタンスの違いを簡単に要約すると次のようになる。

＜Newton力学＞

個々の粒子を個別に捉え、それぞれを別々に運動方程式を考える(3g,3hを見よ)。例えば1つの粒子の位置はその時のその粒子に働く力を知れば決まるはずで、遠くのほうにどんな粒子があるかなど考えなくてもよい。つまり１つの粒子を孤立して考える立場である。

＜解析力学＞

個々の粒子を別々に考えず力学系全体の一員と見なす立場をとる。力学系はたった１つのLagrangian (Hamiltonian) によって完全に特長づけられる。突然だがこの点が量子力学では大変重要になる。量子力学では、ある物理量の値を決めるものはその瞬間におけるその近傍のものだけでなく、系全体が関係してくる。したがって系全体を代表するものがどうしてもなくてはならなくなる。だから量子力学ではHamiltonianが重宝されるのか。場の量子論にいけばLagrangianが大活躍する。兎も角この点がNewton力学の立場と決定的に異なっている。

ところで解析力学ではMaxwellの方程式のようないわゆる力学系でない系についてもLagrangeやHamiltonの形式をあてはめることができる。電磁系をHamilton形式で書くとそれの量子論的取り扱いが可能となるという大きなメリットがある。

・くどいようだがここで惑星の運動を考え、解析力学の有難味を再吟味する。一つの惑星の運動を調べるには１惑星だけに注目していても答えは得られない。つまりその惑星に働いているほかの惑星からの力の影響も考慮しなければならす、他のすべての惑星の運動についての知識が必要になる。これはたいへん厄介で、見通しもはなはだ悪い。 一方、解析力学では力学系全体を考え、関数(3i)のように力学系を記述するのにたった一つの関数Lagrangian(あるいはHamiltonian)が分かればよい(これがうまみの素)。LagrangianやHamiltonianはだからその力学系のもつ対称性を反映することになる。

-- (以上､脱線終わり)

自然の物語を語るLagrangianあるいはHamiltonianは、扱っている物理系のもつ対称性を反映しているというという性質をもっていることになりますが、これをすっきりした形で述べたのがNoetherの定理ということになりましょうか。。。

さて、ひねくれたLagrangianの取り扱いは後に譲るとして先を急ぎましょう（ややこしいのはあとまわし）。

３．物理量とLagrangianの対称性　～ Neotherの定理 ～

いよいよ本論に入ってきた。少し緊張するなぁ。。。

＜Noetherの恒等式＞

系をLagrangianで記述するとそのLagrangianの変換性とその変換に関連した物理量の定義お

よびその時間微分が直接に結びつく。これが『Noetherの恒等式』と呼ばれるもので、物理量の定義およびLagrangianの選択に重要な役割を果たします。

いま、時間の変換を伴わない無限小変換

$$q_i(t) \to Q_i(t) = q_i(t) + d q_i(t) \tag{3a}$$

を考えます。すると

$$\begin{aligned} dL &= L\left(Q_i, \dot{Q}_i\right) - L\left(q_i, \dot{q}_i\right) \\ &= L\left(q_i(t) + d q_i(t), \dot{q}_i + \frac{d}{dt} d q_i\right) - L\left(q_i, \dot{q}_i\right) \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} d q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} d q_i \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) d q_i + \frac{d}{dt}\left\{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d q_i\right\} \end{aligned} \tag{3b}$$

という恒等式が成り立ちます。これを『Noetherの恒等式』と呼びます。

＜Noether の定理＞

この式の意味するところは、もし式(3b)の左辺が０ならば、つまり無限小変換によってLagrangianが不変ならば、Euler-Lagrangeの方程式の成り立つところで量

$$N \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d q_i \tag{3c}$$

が保存するということを意味する。この物理量Nを「Noether charge」と呼びます。式(3b)はEuler-Lagrangeの方程式の成り立つところで

$$dL = \frac{d}{dt} N \tag{3d}$$

が成り立ち、$dL=0$ならばNの時間微分が0、つまりNは時間的に一定であるということになります。これを『Noetherの定理』と呼びます。

では、早速このNoetherの定理を使って”真の”Lagrangian探しをしてみましょう。

（１）1次元空間２粒子系のLagrangian

先程の素直なLagrangianとひねくれたLagrangianを調べてみることにします。素直なLagrangianが真のLagrangianでひねくれたLagrangianは自然の物語を語らないLagrangianなのか？

＜空間推進＞・・・素直なLagrangianもひねくれたヤツこの変換では不変となった ↓↓↓

●素直なLagrangianの場合

素直なLagrangianは空間推進

$$x_k \to x_k = x_k + \varepsilon \qquad k=1,2 \tag{3e}$$

に対して不変ですね。Noether chargeを作ってみると

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_k} d x_k = \varepsilon\left(m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2\right) \\ &= \varepsilon P \end{aligned} \tag{3f}$$

このＰは粒子系の全運動量です。これが保存するのは素直なLagrangianが空間推進に対して不変であるということの反映です。

●ひねくれたLagrangianの場合
ひねくれたLagrangianも空間推進に対して不変となります。Noether chargeを計算すると

$$N_2 = \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_k} dx_k = \varepsilon \left(m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \right)$$
$$= \varepsilon P \qquad (3g)$$

となって、素直なLagrangianの場合と同じ結果が得られます。したがって、空間推進という立場からはひねくれたLagrangianもその正当性を主張し、双方のLagrangianは区別できない、つまりこの段階ではひねくれたLagrangianも捨てられない！ということなります。

＜混ざった変換＞
むむっ！ならば次の手を考えねばならない。しからば混ざった変換でどうだ！となるが、そこに踏み込む前に混ざった変換の予備的練習をしておこう。

[練習 :混ざった変換] --

次のような q_1 と q_2 を混ぜる変換を考る。

$$q_1 \to Q_1 = q_1 \cos\alpha + q_2 \sin\alpha \qquad (ex-1)$$
$$q_2 \to Q_2 = -q_1 \sin\alpha + q_2 \cos\alpha \qquad (ex-2)$$

これは２次元座標系で原点の回りに角度αだけ回転した座標変換である。
力学系として２個の調和振動子系を取り上げよう。２個の調和振動子のLagrangianとしては先程 L_1, L_2, L_3 が候補に上がったが（対称性の観点から結局 L_1 に絞り込まれましたが、ここではNeotherの恒等式の威力を知る例として調べていきます）、これらのLagrangianがこの混ざった変換でどう変わるのか調べ、真のLagrangianを見出していくことにする。ここでαは時間によらないパラメータとしする（はっきり言えば2次元座標回転の回転角）。ちなみに $Q_1^2 + Q_2^2 = q_1^2 + q_2^2$ となるが、この変換は等長変換ということになりますね（←座標回転だから当たり前か）。
計算を進めるにあたり、再度候補となるLagrangianを列挙しておく。

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - \omega^2 q_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 - \omega^2 q_2^2\right) \qquad (ex-3)$$
$$L_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - \omega^2 q_1^2\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 - \omega^2 q_2^2\right) \qquad (ex-4)$$
$$L_3 = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \omega^2 q_1 q_2 \qquad (ex-5)$$

さて、計算を進めよう。まず L_1 から

$$\begin{aligned}
\delta L_1 &= L_1(Q, \dot{Q}) - L_1(q, \dot{q}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 - \omega^2 Q_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_2^2 - \omega^2 Q_2^2\right) \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 - \omega^2 q_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 - \omega^2 q_2^2\right) \right\} \\
&= 0 \qquad (ex-6)
\end{aligned}$$

次にNoether chargeを計算すると

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \\
&= \dot{q}_1 \delta q_1 + \dot{q}_2 \delta q \qquad (ex-7)
\end{aligned}$$

さて、この変換は座標回転の変換ですから角αが無限小であるとき、それを特にεと書くと

$$\sin\alpha = \varepsilon \qquad \text{(ex-8)}$$

$$\cos\alpha = 1 \qquad \text{(ex-9)}$$

となる。したがって

$$Q_1 = q_1 + \varepsilon q_2,\ \delta q_1 = Q_1 - q_1 = \varepsilon q_2 \qquad \text{(ex-10)}$$

$$Q_2 = q_2 - \varepsilon q_1,\ \delta q_2 = Q_2 - q_2 = -\varepsilon q_1 \qquad \text{(ex-11)}$$

質量は１としているから、$\dot{q}_1 = p_1$，$\dot{q}_2 = p_2$とおくと式(ex-7)は

$$N = \varepsilon\left(q_2 p_1 - q_1 p_2\right) \qquad \text{(ex-12)}$$

$q_2 p_1 - q_1 p_2$は正準変換と無限小変換のところで勉強した**角運動量の母関数**だ。

Noether chargeは角運動量であり、式(ex-6)と(ex-12)より、角運動量保存を表現していることになる。

Noether chargeと変換の母関数はこの場合同じになったが、この辺りの状況については後ほど「5. Noether chargeと母関数」のところで再度触れるのでそれまでヨロシク。

次にL_2のNoether chargeを計算すると

$$N = \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k$$

$$= \dot{q}_1 \delta q_1 - \dot{q}_2 \delta q_2$$

$$= \varepsilon\left(q_2 p_1 + q_1 p_2\right) \qquad \text{(ex-13)}$$

これは保存量ではない。したがってLagrangian L_2はこの変換に対して不変でないということになる。

ついでにL_3のNoether chargeを計算すると

$$N = \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_3}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k$$

$$= \dot{q}_2 \delta q_1 + \dot{q}_1 \delta q_2$$

$$= \varepsilon\left(q_2 p_2 - q_1 p_1\right) \qquad \text{(ex-14)}$$

これも保存量ではない。したがってLagrangian L_3はこの変換に対して不変でないということになる。直接δL_2、δL_3の計算は省略しましたが、それぞれ０となることを手を動かして確認しておいてください（←手抜き）。

ということで、Lagrangian L_1が ”真 ”のLagrangianであるということになった訳だ。めでたしめでたし。

------------------------------ 練習終わり）------------------------------

はぁ、やっと練習が終わった。

さて、ひねくれたLagrangianが混ざった変換でどう変化するのか、しないのかを以下に追求してみましょう。無論、変換は無限小変換をとる。

ところでこの混ざった変換は座標回転でしたね。ちょっと待って！１次元空間における2粒子の運動を調べているのに回転とはナンですか！！とお叱りを受けそうですが、まぁここは固く考えないで、例えば2次元空間における1次元運動とでも考えておきましょうか（冷汗）。

＜混ざった変換＞

$$x_1 \to X_1 = x_1 + \varepsilon x_2,\ d\mathbf{x}_1 = \varepsilon \mathbf{x}_2 \qquad (\varepsilon：\text{無限小})$$

$$x_2 \to X_2 = x_2 - \varepsilon x_1,\ d\mathbf{x}_2 = -\varepsilon \mathbf{x}_1 \qquad \text{(3h)}$$

●ひねくれたLagrangianのNoether charge

$$L_2 = m_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2}\left(m_2 - m_1\right)\dot{x}_2^2 + \frac{m_1}{m_2} V\left(|x_1 - x_2|\right) \qquad \text{(3i)}$$

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_k} dx_k \\
&= m_1 \dot{x}_2 dx_1 + m_1 \dot{x}_1 dx_2 + (m_2 - m_1) \dot{x}_2 dx_2 \\
&= \varepsilon \left\{ m_1 \left(x_2 \dot{x}_2 + x_1 \dot{x}_1 \right) + (m_2 - m_1) \dot{x}_2 x_1 \right\} \qquad (3j)
\end{aligned}
$$

●ひねくれたLagrangianの無限小変化

$$
\begin{aligned}
dL_2 &= L_2(X_i, \dot{X}_i) - L_2(x_i, \dot{x}_i) \\
&= m_1 \dot{X}_1 \dot{X}_2 + \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \dot{X}_2^2 + \frac{m_1}{m_2} V(|X_1 - X_2|) \\
&\quad - m_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \dot{x}_2^2 - \frac{m_1}{m_2} V(|x_1 - x_2|) \\
&= m_1 \left\{ \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \varepsilon \left(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 \right) \right\} + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)\left(\dot{x}_2^2 - 2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \varepsilon \right) \\
&\quad - m_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \dot{x}_2^2 \\
&= \varepsilon \left\{ m_1 \left(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2 \right) - (m_2 - m_1) \dot{x}_1 \dot{x}_2 \right\} \\
&\neq 0 \qquad (3k)
\end{aligned}
$$

（計算間違いしていないだろうな。まぁ手を使って確認してください）

ということで、ひねくれたLagrangianはこの変換に対して不変でないということになる。

●素直なLagrangianのNoether charge

$$
L_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - V(|x_1 - x_2|) \qquad (3l)
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \sum_{k=1,2} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_k} dx_k \\
&= m_1 \dot{x}_1 dx_1 + m_2 \dot{x}_2 dx_2 \\
&= \varepsilon (x_2 p_1 - x_1 p_2) \qquad (3m)
\end{aligned}
$$

●素直なLagrangianの無限小変化

この力学系では

①ポテンシャルVは粒子間距離だけに依存しており、座標を回転した新座標系においても距離は変わらないので、ポテンシャルエネルギーは不変

②運動エネルギーは1/2m×(△距離/△時間)^{2}の形をしており、回転座標系において距離は不変だから運動エネルギーも不変

（この①②を回転に対してスカラーという）となり$dL_1 = 0$、ということで、素直なLagrangianからはNoetherの恒等式より角運動量保存則がでてきました。

以上の結果、混ざった変換（無限小の座標回転変換）によりひねくれたLagrangian候補はめでたく落選（？）と相成ったわけでした、バンザ〜イ。

【おまけ】

おまけとして、荷電粒子の電磁相互作用のケースを調べてみよう。運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)$$

Hamiltonianは

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA_0$$

Lagrangianは

$$L = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - H$$

$$= \frac{1}{m}(\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 - \frac{2e}{c}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2) - eA_0$$

$$= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}) - eA_0,\quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})$$ を代入すると

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A} - eA_0$$

空間推進に対するNoether chargeを求めると

$$N = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} d x_k = \varepsilon\left(m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \varepsilon\,\mathbf{p}$$

4. 時間変化を含む変換に伴うNoetherの恒等式

時間の無限小変換

$$t \to t' = t + dt \tag{4a}$$

を伴う変数変換

$$q_k(t) \to Q_k(t') = q_k(t) + dq_k(t) \tag{4b}$$

さて、同時刻の$Q_k(t)$と$q_k(t)$の差を求めて見ましょう。どついてさすればもとのままという理屈(?)により

$$Q_k(t') - q_k(t) + Q_k(t) - Q_k(t')$$
$$= dq_k(t) - \{Q_k(t+dt) - Q_k(t)\}$$
$$= dq_k(t) - dt\,\dot{q}_k(t) \tag{4c}$$

となります。但し最後の段階で2次の無限小を省略しました。また、

$$dt' = \frac{dt'}{dt}dt = \left(1 + \frac{d\,dt}{dt}\right)dt \tag{4d}$$

$$d^L q_k(t) \equiv Q_k(t) - q_k(t)$$

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt} = \left(1 + \frac{d\,dt}{dt}\right)^{-1}\frac{d}{dt} = \left(1 - \frac{d\,dt}{dt}\right)\frac{d}{dt} \tag{4e}$$

2次以上の無限小は省略しています。

したがって式(4e)、(4d)より

$$\dot{Q}_k(t') \equiv \frac{d}{dt'}Q_k(t') = \left(1 - \frac{d\,dt}{dt}\right)\frac{d}{dt}(q_k(t) + dq_k(t))$$
$$= \dot{q}_k(t) - \frac{d\,dt}{dt}\dot{q}_k(t) + \frac{d}{dt}dq_k(t)$$
$$= \dot{q}_k(t) + \frac{d}{dt}\left(d^L q_k(t) - dt\,\dot{q}_k(t)\right) - \frac{d\,dt}{dt}\dot{q}_k(t)$$
$$= \dot{q}_k(t) + \frac{d}{dt}d^L q_k(t) - dt\,\ddot{q}_k(t) \tag{4f}$$

2次以上の無限小は省略しています。

同様に

$$\frac{d}{dt}L\left(q_k(t),\dot{q}_k(t)\right)=\sum_l\left\{\frac{\partial L}{\partial q_l(t)}\dot{q}_l(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l(t)}\ddot{q}_l(t)\right\} \quad (4g)$$

これはLagrangianがq_kと$\dot{q}_k$を通してのみ時間に依存していることを表しています。
以下、簡単のために

$$L[t]=L\left(q_k(t),\dot{q}_k(t)\right) \quad (4h)$$

$$L'[t']=L\left(Q_k(t'),\dot{Q}_k(t')\right) \quad (4i)$$

と書くことにします。

さて、時間変化を含む変換の場合、次の①、②のようなややこしい問題をはらんでいることに留意しておいてください。

① 正準形式では変換前後の変数はいつでも同時刻のものの比較が前提となる。

$$q_i=q_i\left(Q_1,\ldots,Q_f,P_1,\ldots,P_f\right),\ p_i=p_i\left(Q_1,\ldots,Q_f,P_1,\ldots,P_f\right)$$

$$Q_i=Q_i\left(q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots,p_f\right),\ \ P_i=P_i\left(q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots,p_f\right)$$

したがって時間の変換が入ってくると正準形式を保つために余分の数学的操作が必要になる。

② Euler-Lagrangeの式とか正準形式の理論は作用積分という量に関連しており、作用積分はLagrangianを時間で積分した量である。時間の変換を考慮すると積分の上限、下限まで変換されるため、変換以前の作用積分との比較が難しくなる。

$$\text{作用積分}\quad I=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L[t] \quad (4j)$$

まず、変換された系での作用積分 I' を考えます。

$$I'=\int_{t_1'}^{t_2'}dt'\,L'[t']$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(1+\frac{d\mathit{d}t}{dt}\right)L'[t'] \quad (4k)$$

ここで式(4b)を使いました。2次以上の無限小を省略して

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(L'[t']+\frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t]\right)$$

$$=I+\int_{t_1}^{t_2}dt\left(L'[t']-L[t]+\frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t]\right) \quad (4l)$$

したがって、運動方程式とは無関係に作用積分の変換は

$$I'-I=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(L'[t']-L[t]+\frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t]\right) \quad (4m)$$

となります。この式の右辺の被積分関数をさらに変形しましょう。

$$L'[t']-L[t]=\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\mathit{d}q_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathit{d}\dot{q}_k\right)$$

$$=\sum_k\left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}\left(Q_k(t')-q_k(t)\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{Q}_k(t')-\dot{q}_k(t)\right)\right\} \quad (4n)$$

ここで式(4b)を使いました。

$$\frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t]=\frac{d}{dt}(\mathit{d}t\ L)-\mathit{d}t\frac{dL}{dt} \quad (4o)$$

$$L'[t'] - L[t] + \frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t] =$$

$$\sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k}(Q_k(t') - q_k(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(\dot{Q}_k(t') - \dot{q}_k(t)) \right\} + \frac{d}{dt}(\mathit{d}t\, L) - \mathit{d}t \frac{dL}{dt}$$

ここで式(4f)、(4g)を使って

$$= \sum_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k}\mathit{d}q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{d}{dt}\mathit{d}^L q_k - \mathit{d}t\, \ddot{q}_k \right) \right\}$$

$$- \sum_k \mathit{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q_k(t)}\dot{q}_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)}\ddot{q}_k(t) \right) + \frac{d}{dt}(\mathit{d}t\, L)$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)\mathit{d}^L q_k + \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathit{d}^L q_k + \mathit{d}t\, L \right)$$

すなわち

$$L'[t'] - L[t] + \frac{d\mathit{d}t}{dt}L[t] = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)\mathit{d}^L q_k - \varepsilon \frac{d}{dt}N[t] \qquad (4p)$$

ただし

$$\varepsilon N[t] = -\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\mathit{d}^L q_k - \mathit{d}t\, L \qquad (4q)$$

このNが拡張されたNoether chargeで、式(4q)が一般的なNoetherの恒等式です。このNoether chargeはLagrangianと変換が与えられれば計算できるという特長を持っています。
時間の変換を含む変換に関連した物理量が式(4q)で与えられますが、前の式(3c)と比較するとNoether chargeは$-\mathit{d}t\, L$だけ前の場合と異なっていることが分かりますね。つまりLagrangianの対称性（の破れ）が物理量Nの形を決めているといえます。

Noetherの恒等式(4p)の両辺を時間についてt$_1$からt$_2$まで積分すると、Euler-Lagrangeの式が成立するところで

$$I' - I = -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt\, \varepsilon \frac{d}{dt}N[t] = \varepsilon\,(N[t_1] - N[t_2]) \qquad (4r)$$

が成り立ちます。この左辺は、ある変換に対して作用積分がどれだけ変化するか、つまり作用積分の対称性(の破れ)を示す量で、一方右辺は、変換に関連した物理量Nが時刻t$_1$とt$_2$の間でどれだけ変わるかを示す量です。つまりLagrangianの対称性と保存則が結びついているということを意味します。ここで一般的なNeotherの定理を表現しておきましょう。
『ある変換に対して作用積分が不変ならば、Euler-Lagrangeの方程式が成り立つところでNoether chargeは保存する』これを一般的なNeotherの定理と呼んでいます。

(1)時間推進

時間推進の場合

$$\mathit{d}t = \varepsilon \qquad (4s)$$

$$\mathit{d}q_k = 0 \qquad (4t)$$

これから

$$\mathit{d}^L q_k = \mathit{d}q_k - \mathit{d}t\, \dot{q}_k = -\varepsilon\, \dot{q}_k \qquad (4u)$$

Neother chargeを計算すると

$$\varepsilon N = -\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d^L q_k - dt\, L = \varepsilon \left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right)$$

$$L(Q_i, \dot{Q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d q_i \right\} \qquad (4r)$$

$$= \varepsilon \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L \right) \qquad (4v)$$

ただし、$p_k \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

この右辺の括弧の中はまさにHamiltonianの定義式ですね！つまり、時間推進に関連した物理量はHamiltonianであり、Lagrangianがこの変換に対して不変（対称）ならば式(4p)の左辺は０となり、Euler-Lagrangeの方程式が成り立つところでHamiltonianは保存する、ということになります。

$$L'[t'] - L[t] + \frac{d\,dt}{dt} L[t] = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) d^L q_k - \varepsilon \frac{d}{dt} N[t] \qquad (4p)$$

5．Noether Chargeと母関数

⑴ Hamiltonianの対称性と母関数の保存則

本解析力学ノートの第5章『Poisson括弧』にHamiltonianの対称性について書いていますので、ここを読む前に復習をかねて先に覗いておいてください。

さて、Hamiltonianの対称性について

$$H\langle Q_i(t)\,;P_i(t)\rangle - H\langle q(t)\,;p(t)\rangle = \varepsilon\,[H\langle q(t)\,;p(t)\rangle, G\langle q(t)\,;p(t)\rangle]_c$$

$$= -\varepsilon \frac{d}{dt} G\langle q(t)\,;p(t)\rangle \qquad (4q)$$

という関係が成り立ちます。無限小変換の母関数Gは無限小変換と関連した物理量を与えましたね。忘れた方は第3章の正準変換と無限小変換を読みなおしましょう。参考までに無限小変換に対して正準形式とLagrangian形式の場合の保存則を次の表にまとめておきます。

無限小変換	正準形式	Lagrangian形式
座標の無限小回転	母関数：角運動量	角運動量保存則
時間の無限小推進	母関数：エネルギー（Hamiltonian）	エネルギー保存則
座標の無限小推進	母関数：運動量	運動量保存則

式(4q)は、**母関数Gで生成される無限小変換によってHamiltonianが不変なら、母関数Gは保存する**、つまり、**Hamiltonianのある変換に対する不変性（対称性）と母関数の保存則を結びつける重要な定理**となります。

ところで、Noetherの恒等式はEuler-Lagrangeの方程式が成り立っているとき

$$dL = L(Q_i, \dot{Q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d q_i \right\}$$

となりました。これは式(4q)と非常によく似ています。このことから、正準変換の母関数Gに対応するNeother charge Nはいつでも存在するかというと、そういう訳にはいかない。しかし、母関数GとNoether charge Nが一致する必要十分条件はdqがp_kを含まずq_kのみの関数の場合となります。この

証明をついでにやっておきましょう。まぁ、この辺はややこしい議論なので興味なければ読み飛ばしてください。
LagrangianとHamiltonianの変換性が一致する場合を調べる。

$$H-L=\sum_i \dot{q}_i p_i \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
\delta H-\delta L&=\sum_i\left(\delta\dot{q}_i p_i+\dot{q}_i\delta p_i\right)\\
&=\sum_i\left\{\sum_k\left(\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\delta q_i}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)p_i+\dot{q}_i\delta p_i\right\}\\
&=\sum_{i,k}\left\{\left(\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\delta q_i}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)p_i+\dot{q}_i\delta p_i\right\}\\
&=\sum_{i,k}\left\{\left(\frac{\partial\delta q_i}{\partial p_k}p_i\right)\dot{p}_k+\left(\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}p_i+\delta p_k\right)\dot{q}_k\right\}
\end{aligned}\tag{b}$$

これが恒等的に０になるのは

$$\sum_i\frac{\partial\delta q_i}{\partial p_k}p_i=\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_i p_i\delta q_i\right)-\delta q_k=0 \tag{c}$$

$$\sum_i\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}p_i+\delta p_k=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_i p_i\delta q_i\right)+\delta p_k=0 \tag{d}$$

の時に限られる。これは変換の母関数を

$$G\equiv-\sum_i p_i\delta q_i \tag{e}$$

とした時の正準変換の式と同じです。すなわち

$$\delta q_k=-\frac{\partial G}{\partial p_k} \tag{f}$$

$$\delta p_k=\frac{\partial G}{\partial q_k} \tag{g}$$

式(e)は式(f)を使って

$$G=\sum_k p_k\frac{\partial G}{\partial p_k} \tag{h}$$

となる。式(h)は母関数Gがp_iの線形な関数であることを意味しており、そのことによって、δq_iはp_iを含まないq_iだけの関数であるということになります。まとめると、HamiltonianとLagrangianの変換が一致するのは、δq_iがq_1，q_2，…，q_Nだけの関数で変換の母関数が式(e)で与えられる場合だけである、となります。

6．おわりに

これでＮｏｅｔｈｅｒの定理を終わります。物理ではいかに対称性というものが問題追求の最有力な武器となるかということがわかりました。ここで活躍するのがＮｏｅｔｈｅｒの定理ですね。
ところで、不変性とか保存則は運動方程式がある変換に対して不変であっても、そのこと自体は直接保存則には結びつかない（※）ことに留意しなければなりません。では、Lagrangianがある変換に対して不変なら、それはHamiltonianの不変を意味するのかというと、そうもいきません。また、Hamiltonianが不変であってもLagrangianが同時に不変であるという保障もありません。その辺りの状況はすぐ上で調べました。
（※）最後に、運動方程式の不変性と物理量の保存則の間には、直接の関係はないということを簡

単な例で調べておきましょう。
質量1の粒子が重力下にあるとき落体の運動方程式は

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g \tag{4s}$$

これは空間推進

$$z\to Z=z+\varepsilon \tag{4t}$$

に対して不変です。式(4s)を与えるLagrangianは

$$L=\frac{1}{2}\dot{z}^2+gz \tag{4u}$$

これは変換(4t)に対して不変でない。Noetherの恒等式からは

$$\varepsilon g=\frac{d}{dt}(\varepsilon\dot{z}) \tag{4v}$$

つまり

$$\frac{d}{dt}\dot{z}=g \tag{4w}$$

となって、これは粒子の運動量が一定の割合で増すという式になります。つまり運動方程式は空間推進に対して不変であるが、それから直接保存則がでるわけではないという例でした。

●最後に
これで第７章を終了します、お疲れ様でした。中身がゴタゴタして分かりにくかったかも知れませんね。本ノートはできるだけ分かりやすく、かつ式の展開も可能ながきりやるという方針でやったいますから冗長な表現が多くあると思います。まぁ、そこは適当に読み流していただいて、意図するところを汲みとっていただければよろしいかと思います。それではまた〜。