＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

正準変換と無限小変換

2001.6.27　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

最初に「正準変換と母関数」を一読しておく必要があります。

１．恒等変換

変換 $q_i=q_i\left(Q_1,\cdots,Q_f,P_1,\cdots,P_f\right)$，$p_i=p_i\left(Q_1,\cdots,Q_f,P_1,\cdots,P_f\right)$において、

$$q_i=Q_i \quad ①$$

$$p_i=P_i \quad ②$$

となる変換を恒等変換と呼ぶ。この変換の母関数Wは

$$W=\sum P_i q_i \quad ③$$

となる。このことは次式からも確かめられる。

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=P_i,\quad Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=q_i \quad ④$$

２．無限小変換

恒等変換からわずかにずれた変換を次に考える。恒等変換の母関数は③式で与えられているから、無限小変換の母関数は

$$W=\sum P_i q_i+e\,G(q\,;p) \quad ⑤$$

と表わされる。e は無限小のパラメータで、$G(q\,;p)$は考えている変換によって異なる q_i,p_i の関数である。ここで留意すべき点は、１次までの無限小を考えるから、G はq_iとp_iの関数と考えても、q_iとP_iの関数と考えても、それらの差は高次の無限小になるから同じであるということ。さて、母関数⑥式より

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=P_i+e\,\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial q_i} \quad ⑥$$

$$Q_i=\frac{\partial W}{\partial P_i}=q_i+e\,\frac{\partial G(q\,;P)}{\partial P_i}\longrightarrow(\text{高次の無限小をカット})\longrightarrow q_i+e\,\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial p_i} \quad ⑦$$

が得られる。

$$d\,q_i=Q_i-q_i,\quad d\,p_i=P_i-p_i \quad ⑧$$

とすると、⑦式と⑧式より

$$d\,q_i=e\,\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial p_i} \quad ⑨$$

$$d\,p_i=-e\,\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial q_i} \quad ⑩$$

となる。$G(q;p)$を与えると、⑨、⑩式からdq_iとdp_iが定まるので、$G(q;p)$を無限小変換の母関数という。

２－１．空間推進（座標の無限小推進）

$\boldsymbol{q}'$を新しい座標系での位置ベクトル、$\boldsymbol{q}$を旧座標系での位置ベクトルとする。$\boldsymbol{e}$を無限小成分を持ったベクトルとする。座標の無限小推進は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{e} \quad ⑪$$

両座標系で、粒子の速度は同じであるから運動量も同じである。

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p} \quad ⑫$$

⑪、⑫式より

$$dq_i=q_i'-q_i=e_i,\ dp_i=p_i'-p_i=0 \qquad i=1,\cdots,f$$

とすると、３次元空間の無限小空間推進の母関数$G(q;p)$は、⑨⑩より

$$eG=\sum_{i=1}^{f}e_i p_i$$

と書ける。これから、空間推進の母関数は本質的に運動量であることになる。

２－２．無限小回転

[空間の回転の復習]
３次元空間の回転の復習をしておく。３次元空間の中の単位ベクトル$\boldsymbol{e}$のまわりに無限小角εだけ回転した座標系をダッシュで区別すると、両座標系における粒子の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+e\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e} \quad ⑬$$

なる関係にある。
いま、$\boldsymbol{e}=(0,0,1)$とすると

$$\left(x_1',x_2',x_3'\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)+e\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left(x_1+e\,x_2,x_2-e\,x_1,x_3\right)$$

$$\therefore\quad x_1'=x_1+e\,x_2,\ x_2'=x_2-e\,x_1,\ x_3'=x_3$$

[２次元空間の無限小回転]
さて、３次元の無限小回転にいく前に、２次元空間の無限小変換を考えることにする。
$x_1=x, x_2=y$と置き換えて⑭式より

$$dx=x'-x=ey,\ dy=y'-y=ex$$

xとy方向の運動量は、これに従って

$$dp_x=m\left(\dot{x}'-\dot{x}\right)=ep_y,\ dp_y=m\left(\dot{y}'-\dot{y}\right)=-ep_x$$

となる。この回転の母関数Gを求めるのに、例によって⑨、⑩式の関係を使えば

$$G=\left(y\,p_x-x\,p_y\right)$$

となることがわかる。この母関数の姿は紙面に直角な上向きの軸のまわりの角運動量の符号をかえたものである。つまり、無限小回転の母関数は角運動量である、ということになる。

[３次元空間の無限小回転]

３次元空間$\left(x,y,z\right)$で、単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ のまわりに無限小角 e だけ回転した新しい座標系を$\left(x',y',z'\right)$とすると、この新しい座標系における粒子の位置ベクトル$\boldsymbol{x}^{¢}$は旧座標系での位置ベクトル$\boldsymbol{x}$と次の関係で結ばれることは復習の項で述べた。

$$\boldsymbol{x}^{¢}=\boldsymbol{x}+e\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}$$

⑬式より各x,y,z座標の無限小変化は（z軸まわりの回転を考える）

$$d\,x=x'-x=e\,y,\quad d\,y=y'-y=e\,x,\quad d\,z=z'-z=0$$

と書け、これをベクトル表示すると

$$d\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{¢}-\boldsymbol{x}=e\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}$$

また、回転においては運動量成分も x,y,z 座標と同じように変換されるから

$$d\,p_x=p_x'-p_x=e\,p_y,\quad d\,p_y=p_y'-p_y=e\,p_x,\quad d\,p_z=p_z'-p_z=0$$

これをベクトル表示すると

$$d\,\boldsymbol{p}=m\left(\dot{\boldsymbol{x}}^{¢}-\dot{\boldsymbol{x}}\right)=e\,m\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{e}=e\,\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}$$

となる。

ところで、位置座標と運動量の無限小変換は、⑨、⑩式で表わされるように無限小変換の母関数Gから導かれる関係にある。

$$d\,x_1=e\frac{\partial G}{\partial p_1}=e\,x_2,\qquad d\,x_2=e\frac{\partial G}{\partial p_2}=-e\,x_1,\qquad d\,x_3=e\frac{\partial G}{\partial p_3}=0 \qquad ⑭\text{-}1$$

$$d\,p_1=-e\frac{\partial G}{\partial x_1}=e\,p_2,\quad d\,p_2=-e\frac{\partial G}{\partial x_2}=-e\,p_1,\quad d\,p_3=-e\frac{\partial G}{\partial x_1}=0 \qquad ⑭\text{-}2$$

このことから母関数Gを具体的に求めてみる。その前に次のことを念頭に置いておこう。つまり、３次元の回転を指定するには、

$(a)$$\boldsymbol{e}$ の方向（回転軸が上向きか下向きか）を指定する２つのパラメータが必要

(b)回転角 e の指定

の３つのパラメータが必要になるという点である。例えば回転軸をz軸とした場合を想定すると、回転が右回りか左回りかで回転軸を+z軸方向か-z軸方向かになるし、回転の角度はどないなんだ、ということで合計３つのパラメータを指定しないと回転が決まらない(^^)。

今、３次元空間の回転を考えているから、x,y,zぞれぞれの独立した回転軸があるわけで、各軸を中心とした無限小回転を考える必要がある。すると、各回転軸に相当して３つの母関数G_1,G_2,G_3 が必要となるので、母関数$\boldsymbol{G}$をベクトルのように扱えば便利である。

$$e\,G=e\,\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}=e\left(G_1e_1+G_2e_2+G_3e_3\right)$$

２次元無限小回転の母関数からの類推で母関数$\boldsymbol{G}$を

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{x} \qquad ⑮$$

ととると、

$$e\,G=e\,\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}=e\left(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}$$

となる。また、

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,p_i$$

$$-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}=-\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\rangle_i x_i$$

となるので

$$e\,G=\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,p_i$$

$$=-\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,x_i \qquad ⑯$$

となる。さて、⑮式が求める母関数であるかの検証に移る。

⑯式を使えば

$$d\,x_1=e\frac{\partial G}{\partial p_1}=e\frac{\partial}{\partial p_1}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,p_i=e\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_1=e\,x_2$$

$$d\,x_2=e\frac{\partial G}{\partial p_2}=e\frac{\partial}{\partial p_2}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,p_i=e\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_2=-e\,x_1$$

$$d\,x_3=e\frac{\partial G}{\partial p_3}=e\frac{\partial}{\partial p_3}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,p_i=e\langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}\rangle_3=0$$

となって⑭式がでてくる。⑮式も同様にして算出される。

$$d\,p_1=-e\frac{\partial G}{\partial x_1}=e\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,x_i=e\,p_2$$

$$d\,p_2=-e\frac{\partial G}{\partial x_2}=e\frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,x_i=-e\,p_1$$

$$d\,p_3=-e\frac{\partial G}{\partial x_3}=e\frac{\partial}{\partial x_3}\sum_{i=1}^{3}\langle\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{e}\rangle_i\,x_i=0$$

このことから、無限小回転の母関数を⑮式とおいても良いことが判った。つまり、無限小回転の母関数は、回転の軸のまわりの角運動量（の符号を変えたもの）であるということになる。

２－３．時間推進

無限小変換の母関数Gは次式で与えられた。

$$d\,q_i=e\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial p_i}$$

$$d\,p_i=-e\frac{\partial G(q\,;p)}{\partial q_i}$$

さて、正準方程式の類推から、母関数を$G=H(q\,;p)$とし、e を微小な時間間隔 dt であるような無限小変換を考えると上式より

$$d\,q_i=dt\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i dt=dq_i$$

$$d\,p_i = e\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i$$

となる。これらの式は、この変換が時刻 t における座標と運動量の値を、時刻 $t+dt$ における座標と運動量の値に変えるということを意味している。つまり「時間間隔 dt の間における系の運動は、Hamiltonian $H(q\,;p)$を母関数とする無限小変換によって記述することができる」ということになる。

さて、有限の正準変換は、無限小の正準変換の連鎖で表すことができるので（すべての正準変換は群を形成する）、t_0 から t までの有限の時間間隔にわたる系の運動は一連の無限小正準変換の連鎖によって表わすことができる、ということになってくる。このことからHamiltonianは系の時間的な運動に関する母関数であるということになる。

-(P.S)---

【正準変換群について】

(1) $T_1:(q,p)\to(q',p')$, $T_2:(q',p')\to(q'',p'')$を２つの正準変換とすれば $(q,p)\to\langle q'',p''\rangle$もまた１つの正準変換である。

[証明]

$W=W(q_i;Q_i,t)$で t をパラメータ、q_i, Q_iを独立変数と考え、q_i, Q_iに任意の微小変化dq_i, dQ_iを与えたときのWの変化をdWとすると

$$dW=\sum_i \frac{\partial W}{\partial q}dq+\sum_i \frac{\partial W}{\partial Q}dQ=\sum_i p_i dq_i-\sum_i P_i dQ_i$$

の関係より

$$T_1:\quad dW_1=\sum_i p_i dq_i-\sum_i p_i' dq_i'$$

$$T_2:\quad dW_2=\sum_i p_i' dq_i'-\sum_i p_i'' dq_i''$$

$$T_3:\quad dW_3=\sum_i p_i'' dq_i''-\sum_i p_i''' dq_i'''$$

これから

$$d(W_1+W_2)=\sum_i p_i dq_i-\sum_i p_i'' dq_i''$$

となって、正準変換の条件を満たす。

《注》正準変換$\langle q,p\rangle\to\langle Q,P\rangle$は$\sum p_i dq_i-\sum_i P_i dQ_i$ が完全微分であるようなものである。

(2) $(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$の結合則が成り立つ

[証明]

$$T_1T_2\quad :\ d(W_1+W_2)=\sum_i p_i dq_i-\sum_i p_i'' dq_i''$$

$$T_2T_3\quad :\ d(W_2+W_3)=\sum_i p_i' dq_i'-\sum_i p_i''' dq_i'''$$

$$(T_1T_2)T_3 : \quad d(W_1+W_2+W_3)=\sum_i p_i dq_i - \sum_i p_i''' dq_i'''$$

$$T_1(T_2T_3) : \quad d(W_1+W_2+W_3)=\sum_i p_i dq_i - \sum_i p_i''' dq_i'''$$

(3)正準変換は恒等変換を含む

[証明]

略

(4)$T:(q,p)\rightarrow(Q,P)$に対して$T^{-1}:(Q,P)\rightarrow(q,p)$の逆変換を含む。

[証明]

正準変換$\langle q,p\rangle\rightarrow\langle Q,P\rangle$: $dW=\sum p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i$ **より、逆変換**$\langle Q,P\rangle\rightarrow\langle q,p\rangle$:

$dW'=\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i = -dW$ **となるから、逆変換も正準変換である。**

以上の(1)～(4)の条件を満たすとき、群を形成するという。したがって、正準変換の全体は群をつくっている、ということになり、これを正準変換群という。

(以上)