

第 1 章 Maxwell の方程式

§ 1 ~ § 3

2003.01.19 byKENZOU

§ 1.はじめに

近接作用論の立場

< Maxwell の理論は時間推進に対して不変である > ...エネルギー保存則

何百万年の昔でも光はMaxwellの方程式を満たす。このことから電磁場のエネルギー (と荷電粒子のもつエネルギーの和)が保存されることがでてくる。

< Maxwell の理論は空間推進に対して不変である > ...電磁場の運動量保存則

Maxwellの理論は地球上のみならず何億光年のかなたの星の上でも成り立つ。このことから電磁場の運動量 (と荷電粒子の質量の流れの和)が保存されることがでてくる。

< Maxwell の理論は座標回転に対して不変である > ...角運動量保存則

電場や磁場はベクトル場であり、座標の回転に対して決まった変換を受ける。Maxwellの方程式は座標の回転に対し決まった変換をするように与えられているから、互いに回転で結ばれるような座標系ならどんな座標系で書いても同じ形をしている。このことから角運動量保存則がでてくる。

< ベクトル場 >

・「場」というもののイメージ。場とは、次のようなものである。まず座標系を設定する。例えば3次元の直交座標を考えよう。その空間の各点に、1個ずつ勝手な数字を書き込む。それらの数字全体の分布を考えたとき、それがスカラー場である。また、空間の各点に1個ずつ矢を書きこむ。これらの矢の分布を考えたとき、それがベクトル場である。矢の長さが、その点における場の大きさであり、矢の方向が、その点における場の方向である。これらの矢が、あっちでもこっちでも、よきによき長くなったり短くなったり、方向を変えたりしていれば、それが時間に依存するベクトル場である。そのよきによきの仕方を決めるのが、場の運動方程式である。』 ...高橋康 著 「古典場から量子場への道」より

・ベクトル場には「発散(流れ)」と「回転」がある。したがって発散(1成分)と回転(3成分)の合計4個の量を知る必要がある。しかし、3次元空間の自由度は3だから、4個の量はおれぞれ独立でなく、そのうち3個が独立でなければならない。

・電場と磁場の2個の場を規定するためには、発散・回転を入れて合計2×4=8個の方程式(うち6個が独立)、つまりMaxwellの方程式は全部で8個の方程式が必要となるが、空間の自由度は6個であるから、結局8個のうち6個が独立した方程式となる。

§ 2. Maxwell (Heaviside, Hertz) の方程式

ベクトル場の空間分布を決めるには、発散(1成分)と回転(3成分)を指定しなければならない。

< 真空中におけるMaxwellの基本方程式 >

電場と磁場を記述するため合計8個の方程式となるが、すべてが独立ではない。

(1) 電場 E (x, t) の発散は、電荷 (x, t) によって決まる。

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(x, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, t) \quad (1.1)$$

(2) 電場の回転は磁場の時間的変化で与えられる。

$$\tilde{N} \times E(x, t) = - \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

(3) 磁場の回転は電場の時間変化と電流の密度で与えられる。

$$\tilde{N} \times B(x, t) = \mu_0 \left\{ J(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right\} \quad (1.3)$$

(4) 磁場の発散は0。

$$\tilde{N} \cdot B(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

・方程式の数は合計8個、未知数は電場と磁場の合計6個。
未知数より方程式の数の方が多い。2個の方程式は独立でなく、なんらかの関係で結ばれている。

電流密度と電荷密度の連続の方程式がでる。

$$\tilde{N} \cdot J(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

従って、式(1.1)と式(1.3)とは連続の方程式でしっかり結びつけられた仲ということになる。

《連続の方程式の導出》

$$\tilde{N} \cdot \{ \tilde{N} \times B(x, t) \} = \mu_0 \left\{ \tilde{N} \cdot J(x, t) + \frac{\partial \tilde{N} \cdot E(x, t)}{\partial t} \right\} = \mu_0 \left\{ \tilde{N} \cdot J(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \right\}$$

左辺はベクトル演算の公式から0となるから

$$\tilde{N} \cdot J(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

この式は、空間に固定した単位体積Vをとり、その内部から単位時間に外部流出する電荷量 $-\tilde{N} \cdot J(x, t)$ は電荷密度(*) $\rho(x, t)$ の単位時間の変化に等しいということで連続の方程式と呼ばれる。

(*)電荷が連続的に分布している場合、単位体積当たりの電荷量として電荷密度 ρ を定義する。

[Gauss の定理]

任意の閉曲面Sを通して出ていく電気力線()の数はSの内部に含まれる電荷量に等しい。

()強さ q の電荷は電気力線が q 本湧き出している電荷のこと。

< 電磁場と荷電粒子の相互作用 >

・電荷密度を $\rho(x, t)$ と電流の密度を $J(x, t)$ とすると、それに働く力(Lorentz力)は

$$f(x, t) = \rho(x, t) E(x, t) + J(x, t) \times B(x, t) \quad (1.7)$$

・電荷 e をもつ点粒子では、電荷および電流密度はそれぞれ

$$\rho(x, t) = e \delta(x - x(t)) \quad (1.8a)$$

$$J(x, t) = e \dot{x}(t) \delta(x - x(t)) \quad (1.8b)$$

となる。ここで $x(t)$ は点粒子の位置ベクトル。

・電荷粒子に働く電磁氣的な力は Newton の運動方程式により

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}' \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = e \{ \mathbf{E}(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t), t) + \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t), t) \} \quad (1.9)$$

式(1.9)の右辺に出てきた \mathbf{E} や \mathbf{B} は荷電粒子の位置における電場と磁場で、それらにはこの粒子以外からきた電磁場と同時に粒子自身によって作られた電磁場 (自己場) も含まれている。
 式(1.9)は「荷電粒子の質量の流れ()の時間的变化は、荷電粒子の点における Lorentz の力に等しい」ことを表現。

() 電磁場と相互作用している粒子では運動量 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ と質量の流れとは別物になる。

$$m \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - e \mathbf{A}(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t), t)$$

右辺の $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を電磁場のベクトルポテンシャルと呼ぶ。

§ 3 . 縦成分と横成分への分解

電流の縦成分と横成分

(1)連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.10)$$

・連続の方程式より、与えられた荷電分布 $\rho(\mathbf{x}, t)$ と電流の関係は、公式

$$\tilde{\mathbf{N}}^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4 \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.11)$$

を使って (1.10) から

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t)}_{\text{電流の横成分}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{x}' \tilde{\mathbf{N}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t')}{\partial t'}}_{\text{電流の縦成分}} \quad (1.12)$$

$\mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t)$ は電流の横成分で、恒等的に

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.13)$$

を満たすものなら全く勝手に、電荷分布の時間的变化とは無関係に与えられるものである。



これは、**電荷密度の時間的变化は電流の一部しか与えない、つまり、電流には電荷密度の時間的变化と全く無関係な部分がある、** ということだ。

【蛇足】: 中性子は電荷をもっていないが、静止状態においても磁気能率による電流が流れている。したがって、**電流をいつでも電荷の動きと理解するのは無理なことがある。** (確かにこの後にでてくる変位電流というヤツなんかは電荷の動きではないということか)

$J_L(x, t)$ を電流の縦成分とすると

$$J_L(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \tilde{N} \frac{1}{|x-x'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x', t) \quad (1.14)$$

で、電荷密度の時間変化によって決まる。 $J_L(x, t)$ は恒等的に

$$\tilde{N} \times J_L(x, t) = 0 \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} \cdot J_L(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \tilde{N}^2 \frac{1}{|x-x'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x', t) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \tilde{N} \cdot (x-x') \frac{\partial}{\partial t} \rho(x', t) = - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

を満たす。(1.16)は連続の方程式。

【連続の方程式を解く】

$$\tilde{N} \cdot J(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t)$$

電流を縦成分と横成分に分けると

$$J(x, t) = J_L(x, t) + J_T(x, t)$$

ただし

$$\tilde{N} \times J_L(x, t) = 0$$

$$\tilde{N} \cdot J_T(x, t) = 0$$

これから

$$\tilde{N} \cdot J_L(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t)$$

より $J_L(x, t)$ は常にあるスカラーポテンシャル $\phi(x, t)$ の grad で表されるから

$$J_L(x, t) = \tilde{N} \phi(x, t)$$

これを (1.16) に代入すると

$$\tilde{N}^2 \phi(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t)$$

これはよく知られた Poisson の方程式【Note: Green関数参照】と呼ばれる姿をしている。

この解は空間領域が無限大の時は (無限遠で $\phi = 0$)

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \frac{1}{|x-x'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x', t)$$

と求まる。これを (1.14) に代入すると

$$J_L(x, t) = \tilde{N} \phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \tilde{N} \frac{1}{|x-x'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x', t)$$

【Note: Green関数】

Green関数のさわりだけを復習しておきます。突っ込んで勉強したい向きは下記の参考書等を見ましょう。。

1. Green関数のレビュー

L をある微分演算子とする微分方程式

$$L(x) = f(x) \quad (1)$$

に対する Green関数 $G(x, x')$ は方程式

$$L G(x, x') = \delta(x-x') \quad (2)$$

を満たす。ここで、 G が求まれば、解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (3)$$

と求められます。

しからば G をどのように求めるかということになるが、Fourier変換を使います。

$G(\mathbf{x})$ の Fourier変換は

$$\hat{G}(\mathbf{p}) = \int G(\mathbf{x}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

その逆変換は

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(\mathbf{p}) \exp(-i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{p} \quad (5)$$

2. 《PoissonEq を解く》

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \quad (6)$$

ステップを踏んで解いていきましょう。

(6) の右辺を 関数で置き換えて

$$\nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (7)$$

$G(\mathbf{r})$ の Fourier変換と逆 Fourier 変換

$$\hat{G}(\mathbf{p}) = \int G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (8)$$

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(\mathbf{p}) \exp(-i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p} \quad (9)$$

関数のFourier 積分表示は

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(\mathbf{p}) \exp(-i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{p} \quad (10)$$

ただし $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ とおきました。

(7)の両辺の Fourier変換を計算します。(7)の両辺に $\exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ を掛けて \mathbf{r} について積分すればよいので

$$\int \nabla^2 G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (11)$$

まず 左辺 を計算します。一気にやるのは分かりにくいので、 x 成分についてみると

$$\int \frac{\partial^2 G(\mathbf{r})}{\partial x^2} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r})}{\partial x^2} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz \quad (12)$$

ここで x について部分積分すると(12)式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i p_x) \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz \quad (13)$$

(13)の第2項をもう一回 x について部分積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x} \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right]_{-\infty}^{\infty} + i p_x [G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})]_{-\infty}^{\infty} + (i p_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz \\ & = -p_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz \end{aligned} \quad (14)$$

(14) の1項と2項は $\exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ が $x = \pm \infty$ でゼロとなりるのでゼロとなり、最後の項だけ残ります。

y, z 成分についても同様の計算をすると、結局左辺は(8) を睨んで

$$\int \nabla^2 G(\mathbf{r}) \exp(i \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} = -p^2 \hat{G}(\mathbf{p}) \quad (15)$$

次に 右辺 を計算します。

$$\int (r) \exp(-\hat{p} r) dr = \exp(-\hat{p} 0) = 1 \quad (16)$$

ここで 関数の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f(r) \delta(r) dr = f(0)$ というのを使いました。

(15) と(16) より

$$\hat{G}(\hat{p}) = -\frac{1}{\hat{p}^2} \quad (17)$$

求める $G(r)$ は (17) を (9) に入れて

$$G(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\hat{p}^2} \exp(i\hat{p} r) d\hat{p} \quad (18)$$

となります。メダシメダシ、、、だが(18)の右辺の積分を実行しなければなりません。
この積分は、テキスト付録の数学公式 (A.8.6 P173) より

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (19)$$

となります。

求める解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_0 \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (20)$$

[参考書 : 今村 勤 著 「物理とフーリエ変換」岩波全書、1978]

電場の縦成分と横成分

(1) Coulomb の法則

電場も「縦」と「横」の成分に分けて

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) \quad (117)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (118)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (119)$$

磁場は、「横成分」しかもっていない。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t)$$

Maxwell の方程式を「横」と「縦」の成分で書くと

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow (1) \text{ Coulomb の法則} \quad (1.20)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \Rightarrow (2) \text{ Farady の法則} \quad (1.21)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \left\{ \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} \quad \Rightarrow (3) \text{ 変位電流} \quad (1.22)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \Rightarrow (4) \text{ 単磁極} \quad (1.23)$$

(1.20)を上「連続の方程式を解く」と全く同じやり方で解くと

$$E_L(x, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \tilde{N} \frac{1}{|x-x'|} \quad (x, t) \quad (1.24)$$

これは電荷に対するCoulombの法則である。ところで式(1.24)と見比べると

$$\frac{1}{\epsilon_0} E_L(x, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} J_L(x, t) \quad (1.28)$$

電場の縦成分の時間微分は電流の縦成分で与えられるということで、(1.22)より **横型電流と横型電場の時間的変化だけが磁場を発生させる** () ということになる。

$$\begin{aligned} \tilde{N} \times B(x, t) &= \mu_0 \left\{ J(x, t) + \epsilon_0 \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right\} = \mu_0 \left\{ \left(J_{\parallel}(x, t) + \epsilon_0 \frac{\partial E_{\parallel}(x, t)}{\partial t} \right) + \left(J_{\perp}(x, t) + \epsilon_0 \frac{\partial E_{\perp}(x, t)}{\partial t} \right) \right\} \\ &= \mu_0 \left(J_{\perp}(x, t) + \epsilon_0 \frac{\partial E_{\perp}(x, t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

() 独白 : ちょっとまってくれ~! 先程の中性子の電流の話としいい、この話としいい、横型電流は言わば回転電流 (なんて言葉があるかどうか知らんが、感覚的に) みたいなものだ。この回転電流の時間的変化がその回転軸に垂直な方向に磁場を発生させる、なる程 とうとういのかなあ、(^^); ;

- ・【蛇足】には(1.24)は右辺と左辺で同一の時刻が入っているのは、近接作用の考え方と矛盾するように見える、ことが指摘されている。ふ~ん、ということで 鋭い方はとうに感ずかれているのかもしれないけど、実は矛盾しないということが遅延 Green関数というものを使うとその解答が得られるらしい (P38)。今は、まあ、それまで目をつぶっておくことにする。。。よく分からんから(笑); ;)

原点に静止している電荷Qによる電場は、

$$E(x, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} \quad (1.25)$$

$$E_L(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tilde{N} \frac{Q}{|x|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \frac{1}{|x|^2} \quad (1.26)$$

・点 xにある電荷 Qcに働く力は、Lorentzの力により

$$F_c = Qc E_L = \frac{QQc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|^2} \quad (1.27)$$

磁場の時間変化

(2) Faradyの(電磁誘導の)法則

・式(1.21)に Stokesの定理

$$\int_S \mathcal{C} \cdot (\tilde{N} \times F) = \oint_{\mathcal{C}} dx \cdot F$$

(Fは閉曲面Cを境界にもつ曲面S上のベクトル場。∫Sは曲面Sを包む閉じた曲線を意味する) を使って

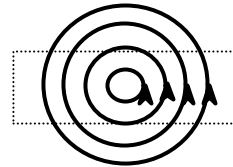
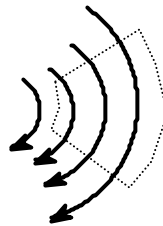
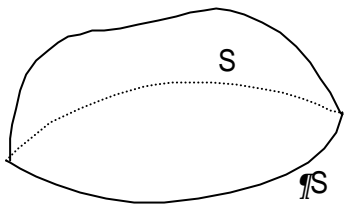
$$\int_S \mathcal{C}(x) \cdot (\tilde{N} \times E_T(x, t)) = \oint_{\mathcal{C}} dx \cdot E_T(x, t)$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = - \frac{d}{dt} \Phi_B(t) \quad (1.29)$$

Φ_B は静止している面 S を貫く磁束

$$\Phi_B(t) = \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.30)$$

ところで(1.23)より $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ は湧き出しがない、つまりどのような閉曲面を考えても、入ってきた磁力線は必ず出ていくということを意味している。従って(1.30)は面 S の形に依らない(閉曲線 \mathcal{C} には関係しなかつた!)ということになる。



閉曲面の選び方によらず入ってくる磁力線と出ていく磁力線の数は等しい。

式(1.29)の左辺は閉曲線 \mathcal{C} にそって横電場をたし合わせたもので

$$E_{\mathcal{C}}(t) \equiv \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) \quad (1.31)$$

で定義される量を e.m.f (起電力) とし、 \mathcal{C} の上に電荷 e を置くと、その電荷には Lorentz 力が働き、その電場は \mathcal{C} を一周する間に

$$e E_{\mathcal{C}}(t) = e \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) \quad (1.32)$$

だけの仕事をする。これが、磁束の時間的変化が emf を生むという Faraday の電磁誘導の法則。

$$E_{\mathcal{C}}(t) = - \frac{d}{dt} \Phi_B(t) \quad (1.33)$$

【Faraday の法則】

閉回路に生じる起電力 V は、閉回路を貫く磁束 Φ_B が時間的に変化する割合に等しく、その向きは磁束の変化を補償する方向に働く。

(3) 変位電流

式(1.22)に Stokes の定理を使うと

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \left\{ \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) + \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t)}{c} \right\} \\ &= \mu_0 \left\{ \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

(1.34) の右辺第2項は、面 S を貫く **横電場の電束** (ここでまた **横** '電場が出てきた')

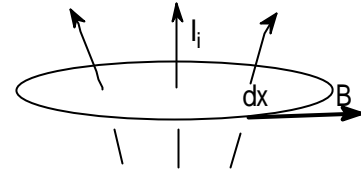
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{dS}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) \quad (1.35)$$

の時間的変化の割合を示しているが、こいつはまるで電流のような働きをしており、これを Maxwell の変位電流 (電場の変化として伝わる電流) と呼んでいる。結局(1.34)は Ampere の法則を Maxwell の変位電流まで含めて拡張したものとなっている。

【Ampere の法則】

閉曲線 \mathcal{C} を縁にもつ任意の曲面を電流 I_i が貫いているとき、その電流の代数和は閉曲線 \mathcal{C} に沿ってとった磁界の強さ B の線積分に等しい。

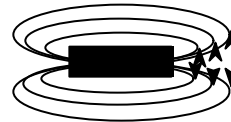
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_i I_i$$



(4) 磁気単極子

・式(1.23)より単磁極はあり得ない。

・電界の Gauss の法則・・・閉曲面から出ていく電束の垂直成分の和は内部の電荷の和に等しい
 ・磁界の Gauss の法則・・・閉曲面から出ていく磁束の垂直成分の和は磁荷がないのでゼロになる
 つまり、磁力線はかららず輪になる。電気力線と違って、始点と終点はない。



磁気双極子とは、直感的に磁極の N と S がボウでつながったようなものを考えてはだめ。

輪になった電流をとり、それをうんと遠くから眺めると、それがあたかも磁極と南極を棒でつないだものが発生したような磁場に見える ということ。

----- おつかれさま Coffee Break