

兎も角 § 4 にまで辿りついた、フ〜ツ。さて、第 1 章の最後の山場に立ち向かうとしますか。。。

§ 4 . 単位の問題

テキストを参照してください。(各自独習)

§ 5 . 電磁波の方程式

Maxwell の方程式から横成分を分離することを考える。くどいが再度書くと

$\tilde{N} \cdot E_L(x, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, t)$	⇒ (1) Coulomb 法則	(1.20)
---	------------------	--------

$\tilde{N} \times E_T(x, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial B(x, t)}{\partial t}$	⇒ (2) Faraday の法則	(1.21)
--	-------------------	--------

$\tilde{N} \times B(x, t) = \mu_0 \left\{ J_T(x, t) + \epsilon_0 \frac{\partial E_T(x, t)}{\partial t} \right\}$	⇒ (3) 変位電流	(1.22)
--	------------	--------

$\tilde{N} \cdot B(x, t) = 0$	⇒ (4) 単磁極	(1.23)
-------------------------------	-----------	--------

(1.21) に左から \tilde{N} を掛けると、ベクトル演算を使って

$$\tilde{N} \times (\tilde{N} \times E_T(x, t)) = \tilde{N} (\underbrace{\tilde{N} \cdot E_T(x, t)}_0) - \tilde{N}^2 E_T(x, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \tilde{N} \times \underbrace{B(x, t)}_{(1.22) \text{ 参照}}$$

横成分だから ↓ 0

これから

$\tilde{N}^2 E_T(x, t) - \epsilon_0 m_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial E_T(x, t)}{\partial t} = m_0 \frac{1}{\epsilon_0} J_T(x, t)$	(1.56)
--	--------

(1.22) に左から \tilde{N} を掛けると、

$$\tilde{N} \times (\tilde{N} \times B(x, t)) = \mu_0 \left\{ \tilde{N} \times J_T(x, t) + \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{N} \times \frac{\partial E_T(x, t)}{\partial t} \right\}$$

これから

$\tilde{N}^2 B(x, t) - \epsilon_0 m_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = -m_0 \tilde{N} \times J_T(x, t)$	(1.57)
---	--------

右辺 がゼロなら、速度 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 m_0}$ で伝播する波動の方程式。この c が物質のない空間を電磁波が伝播する速度となる。電磁波の源は電流

そのものではなく、電流の変化がそれになっていることに留意。

(1.56)、(1.57)の右辺をゼロとおくと

$$\left(\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.59)$$

$$\left(\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.60)$$

電場と磁場の関係式

$$\tilde{N} \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.61)$$

次に

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) = \mathbf{e}(\mathbf{k}) \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z) - i\omega t) \quad (1.62)$$

$$\mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad (1.63)$$

を代入すると

$$\left(\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{e}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) = \left(-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \mathbf{e}(\mathbf{k}) = 0 \quad (1.64)$$

$$\left(-k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 \right) \mathbf{b}(\mathbf{k}) = 0 \quad (1.65)$$

↓
e, b が 0 でないとき

$$c^2 k^2 = \omega^2 \quad (1.66)$$

$$\omega_k = c |k| \quad (1.67)$$

$$\omega = \pm \omega_k \quad (1.68)$$

(1.61)より 電場、磁場と電磁波の伝播方向の相互関係を調べる

右辺

$$\begin{aligned} \tilde{N} \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \{ (k_y \langle k_z \rangle - k_z \langle k_y \rangle) \mathbf{i} + (k_z \langle k_x \rangle - k_x \langle k_z \rangle) \mathbf{j} + (k_x \langle k_y \rangle - k_y \langle k_x \rangle) \mathbf{k} \} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \\ &= \{ \mathbf{k} \times \mathbf{e}(\mathbf{k}) \} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \end{aligned}$$

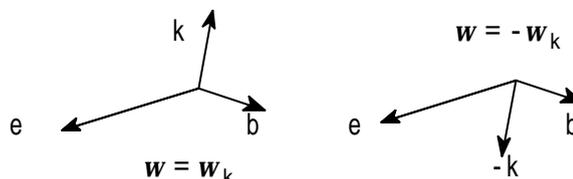
左辺

$$- \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{b}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

(1.68)を使って

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}(\mathbf{k}) = \pm \omega_k \mathbf{b}(\mathbf{k}) \quad (1.69)$$

ベクトル \mathbf{k} , \mathbf{e} , \mathbf{b} は右手系を作る。



(1.67)(1.69)より

$$|\mathbf{e}(\mathbf{k})| = c |\mathbf{b}(\mathbf{k})| \quad (1.70)$$

つまり、電場の振幅は磁場の振幅の c 倍大きい。

・ここで取り扱った電場は、電場の全体ではなく、その横成分だけであることに注意しておきましょう。

***** これで第1章を終了します *****

おつかれさま Coffee Break