＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第1章　Maxwellの方程式

§4〜§5

2003.02　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

兎も角§4にまで辿りついた、フ〜ッ。さて、第1章の最後の山場に立ち向かうとしますか。。。

§4. 単位の問題

テキストを参照してください。（各自独習）

§5. 電磁波の方程式

・*Maxwell* の方程式から横成分を分離することを考える。くどいが再度書くと

$$\boxed{\nabla\cdot E_L(x,t)=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,t)} \quad \Rightarrow \text{(1) Coulomb 法則} \tag{1.20}$$

$$\boxed{\nabla\times E_T(x,t)=-\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}} \quad \Rightarrow \text{(2) Farady の法則} \tag{1.21}$$

$$\boxed{\nabla\times B(x,t)=\mu_0\left\{J_T(x,t)+\varepsilon_0\frac{\partial E_T(x,t)}{\partial t}\right\}} \quad \Rightarrow \text{(3) 変位電流} \tag{1.22}$$

$$\boxed{\nabla\cdot B(x,t)=0} \quad \Rightarrow \text{(4) 単磁極} \tag{1.23}$$

・(1.21)に左から∇を掛けると、ベクトル算法を使って

$$\nabla\times(\nabla\times E_T(x,t))=\nabla\big(\underbrace{\nabla\cdot E_T(x,t)}_{\text{横成分だから}\ \downarrow\ 0}\big)-\nabla^2E_T(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla\times B(x,t)}_{\downarrow\ \text{(1.22)参照}} \tag{1.55}$$

これから

$$\boxed{\nabla^2E_T(x,t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_T(x,t)=\mu_0\frac{\partial}{\partial t}J_T(x,t)} \tag{1.56}$$

・(1.22)に左から∇を掛けると、

$$\nabla\times(\nabla\times B(x,t))=\mu_0\left\{\nabla\times J_T(x,t)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times E_T(x,t)\right\}$$

これから

$$\boxed{\nabla^2B(x,t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}B(x,t)=-\mu_0\nabla\times J_T(x,t)} \tag{1.57}$$

右辺がゼロなら、速度$c\equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$で伝播する波動の方程式。この c が物質のない空間を電磁波が伝播する速度となる。電磁波の源は電流

そのものではなく、電流の変化がそれになっていることに留意。

・(1.56)、(1.57)の右辺をゼロとおくと

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.59}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}_T(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.60}$$

電場と磁場の関係式

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.61}$$

次に

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{e}(k)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t) = \boldsymbol{e}(k)\exp\left(i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right) - i\omega t\right) \tag{1.62}$$

$$\boldsymbol{B}_T(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{b}(k)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t) \tag{1.63}$$

を代入すると

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{e}(k)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t) = \left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{e}(k) = 0 \tag{1.64}$$

$$\left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{b}(k) = 0 \tag{1.65}$$

$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ が 0でないとき

$$c^2\boldsymbol{k}^2 = \omega^2 \tag{1.66}$$

$$\omega_{\mathrm{k}} = c|\boldsymbol{k}^2| \tag{1.67}$$

$$\omega = \pm\,\omega_{\mathrm{k}} \tag{1.68}$$

(1.61)より 電場、磁場と電磁波の伝播方向の相互関係を調べる

右辺

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= i\left\{\left(k_y e(k_z) - k_z e(k_y)\right)\boldsymbol{i} + \left(k_z e(k_x) - k_x e(k_z)\right)\boldsymbol{j} + \left(k_x e(k_y) - k_y e(k_x)\right)\boldsymbol{k}\right\}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$$

$$= i\left(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(k)\right)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$$

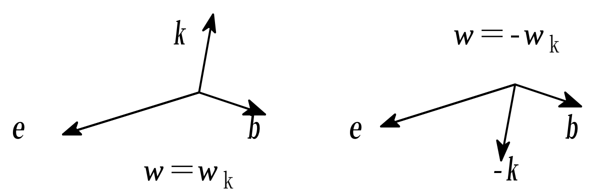
左辺

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = i\omega\,\boldsymbol{b}(k)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$$

(1.68)を使って

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(k) = \pm\omega_{\mathrm{k}}\,\boldsymbol{b}(k) \tag{1.69}$$

ベクトル $\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{b}$ は右手系を作る。



・(1.67)(1.69)より

$$|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})| = c|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})| \tag{1.70}$$

つまり、電場の振幅は磁場の振幅の c倍大きい。

・ここで取り扱った電場は、電場の全体ではなく、その横成分だけであることに注意しておきましょう。

********** これで第1章を終了します ***********

-- おつかれさま Coffee Break♪