

=====
第2章 物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§ 1~ § 2

2003 .03 .09 byKENZOU
=====

§ 1.はじめに

- ・電磁場と力学系の相互作用 … Maxwellの方程式 と Lorentsの力で記述できる。
すると直ちに起こる疑問 ~

電磁場と力学系の中にエネルギーやその他の物理量の交換があり得るか？
荷電粒子が電磁場と相互作用してエネルギーを失った場合、そのエネルギーはどこへいく？
電磁場の運動量や他の物理量はどのように定義したらよいのか？
電磁波の散乱や発射・吸収の計算したい場合、何を計算すればいいのか？

- ・これらの疑問は虚心になって考えればすぐ思いつく。しかし、大抵、耳年増になってしまって、その答えをぼんやりとはいえある程度知ってしまっているから、なかなか素直な疑問として浮かんでこない、もっとも小生だけの場合かも知れないが。。
- ・しかし、ここでは、初心に立ちかえって、これらの疑問を味わいつつ第2章に取り組んでいくことにする。

§ 2.荷電粒子の物理量

・Lorentzの力だけが働いている1個の荷電粒子のNewtonの運動方程式は、粒子の位置座標を $x(t)$ で表すと、

$$m\ddot{x}(t) = e\{E(x(t), t) + \dot{x}(t) \times B(x(t), t)\} \quad (2.1)$$

・電荷 e をもった点粒子の非相対論的な理論での電荷および電流の密度は、それぞれ

$$\rho(x, t) = e \delta(x - x(t)) \quad (1.8a)$$

$$J(x, t) = e\dot{x}(t) \delta(x - x(t)) \quad (1.8b)$$

そこで、式(2.1)の両辺に左から $\delta(x - x(t))$ を掛けると

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) \delta(x - x(t)) &= e\{E(x(t), t) + \dot{x}(t) \times B(x(t), t)\} \delta(x - x(t)) \\ &= \rho(x, t)E(x, t) + J(x, t) \times B(x, t) = f(x, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

《留意事項》

ここで電荷密度の定義と電流密度の定義を見比べると、電流密度(電荷密度の流れ)は電荷密度に荷電粒子の位置ベクトル $x(t)$ の時間微分すなわち速度を掛けた形をしていることに留意。この形はすぐ後で出てくる「荷電粒子の質量密度とその流れ」や「エネルギー密度とその流れ」の定義式に顔をだす。

電荷密度の定義 $\rho(x, t) = e \delta(x - x(t))$

電流密度の定義 $J(x, t) = e\dot{x}(t) \delta(x - x(t)) = \rho(x, t)\dot{x}(t)$

・ところで(18a), (18b)が連続の方程式を満たしていることをチェックしておきましょう。

$$\text{連続の方程式} \quad \dots \quad \tilde{N} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial (\rho, t)}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho, t)}{\partial t} &= e \frac{\partial}{\partial t} (\rho - \rho(t)) = e \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 - \rho_1(t)) (\rho_2 - \rho_2(t)) (\rho_3 - \rho_3(t)) \\ &= e \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho_1 - \rho_1(t)) (\rho_2 - \rho_2(t)) (\rho_3 - \rho_3(t)) \\ &\quad + e \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho_1 - \rho_1(t)) (\rho_2 - \rho_2(t)) (\rho_3 - \rho_3(t)) \\ &\quad + e \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho_1 - \rho_1(t)) (\rho_2 - \rho_2(t)) (\rho_3 - \rho_3(t)) \\ &= e \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho - \rho(t)) = -e \dot{x}(t) \cdot \tilde{N} (\rho - \rho(t)) \end{aligned}$$

$$\tilde{N} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = e \tilde{N} \cdot \dot{x}(t) (\rho - \rho(t)) = e \dot{x}(t) \cdot \tilde{N} (\rho - \rho(t))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho, t) + \tilde{N} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$$

[注]

合成関数の微分を考えます。z = x - y の関数 f(z) について

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{df}{dz} = \frac{df}{dz} \quad \frac{\partial f(x-y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{df}{dz} = -\frac{df}{dz} \quad \frac{\partial f(x-y)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}$$

・さて、この荷電粒子の質量密度と質量密度の流れは、e を m に置き換え、それぞれ

$$\rho^{(p)}(\mathbf{x}, t) = m (\rho - \rho(t)) \tag{2.4a}$$

$$\mathbf{j}^{(p)}(\mathbf{x}, t) = m \dot{x}(t) (\rho - \rho(t)) \tag{2.4b}$$

これは上で計算したと同様に連続の方程式を満たしますね。

次に、質量の流れ (2.4b) に対して、質量の流れの流れ (歪みテンソル) を次式で定義する。

$$t_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}, t) = m \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) (\rho - \rho(t)) \tag{2.5}$$

すると、点粒子の質量の流れの密度に対して次のバランス方程式 (付録 7) が成り立つ。

$$\mathbf{j}_i^{(p)}(\mathbf{x}, t) + \partial_j t_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) \tag{2.6}$$

・上のバランスの方程式を計算で確かめてみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i^{(p)}(\mathbf{x}, t) &= m \frac{\partial}{\partial t} (\dot{x}_i(t) (\rho - \rho(t))) \\ &= m \ddot{x}_i(t) (\rho - \rho(t)) - m \dot{x}_i(t) \dot{x}(t) \cdot \tilde{N} (\rho - \rho(t)) \end{aligned} \tag{ }$$

$$\begin{aligned} \partial_j t_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} t_{i1}^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_2} t_{i2}^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_3} t_{i3}^{(p)} \\ &= m \dot{x}_i(t) \left(\dot{x}_1(t) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2(t) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3(t) \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \\ &= m \dot{x}_i(t) \dot{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{N}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \end{aligned} \quad ()$$

$$\mathcal{J}_i^{(p)}(\mathbf{x}, t) + \nabla_j t_{ij}^{(p)}(\mathbf{x}, t) = m \ddot{x}_i(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) = f_i(\mathbf{x}, t) \quad ()$$

右辺に電磁的な Lorentz 力が出てきたことに留意しておきましょう。

次に、粒子のエネルギー密度とその流れを次式で定義する。

$$E^{(pe)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad (2.7a)$$

$$\mathcal{J}_i^{(pe)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \dot{x}_i(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad (2.7b)$$

するとエネルギーに対するバランス方程式 (注: テキスト (2.8) の左辺 第 1 項は時間微分が抜けている: 誤植)

$$\dot{E}^{(pe)}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{J}^{(pe)}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

式 (2.8) を計算で確かめてみる。

$$\dot{E}^{(pe)}(\mathbf{x}, t) = m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) - \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \dot{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{N}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{J}^{(pe)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \dot{x}(t) \tilde{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

+ より

$$\dot{E}^{(pe)} + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{J}^{(pe)} = m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

式の右辺は

$$\begin{aligned} m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) &= e \dot{x}(t) \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + \dot{x}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)] (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \\ &= e \dot{x}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \underbrace{e \dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)}_{\downarrow} (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \end{aligned}$$

ベクトル算法によりゼロ

$$\begin{aligned} &= e \dot{x}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ \dot{E}^{(pe)} + \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{J}^{(pe)} &= \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

ということで、式 (2.6)、(2.8) は「粒子の質量の流れ $\mathcal{J}^{(p)}(\mathbf{x}, t)$ やエネルギー $E^{(pe)}(\mathbf{x}, t)$ は粒子系だけでは保存していない」ことを示している、とテキストには書かれていますね。(2.6) や (2.8) の左辺は粒子系の記述ですが、右辺は電磁的な力(エネルギー)が顔をだしている、すなわち電磁的なエネルギー(湧き出し)が力学的エネルギーに変化する割合を示しているということになるわけですね。まあ、この辺りは次の § 3 にいけばもっと鮮明に分かるんでしょなあ、

まあゴタゴタと計算が続きましたね。§ 3 も同様な事態が続きそうですが、頑張ってくださいませ。尚、連続の方程式の計算で μ さん <http://nisimiyunet> の助言をいただきました。ありがとうございました。

おつかれさま *Coffee Break*