＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第 2章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§ 1～§ 2

2003. 03. 09 byKENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

§ 1. はじめに

・電磁場と力学系の相互作用 ・・・ Maxwellの方程式 と Lorentsの力で記述できる。
　すると直ちに起こる疑問①～④

① 電磁場と力学系の間にエネルギーやその他の物理量の交換があり得るか？
② 荷電粒子が電磁場と相互作用してエネルギーを失った場合、そのエネルギーはどこへいく?
③ 電磁場の運動量や他の物理量はどのように定義したらよいのか？
④ 電磁波の散乱や発射・吸収の計算したい場合、何を計算すればいいのか？

・これらの疑問は虚心になって考えればすぐ思いつく。しかし、大抵、耳年増になってしまって、その答えをぼんやりとはいえある程度知ってしまっているから、なかなか素直な疑問として浮かんでこない、、もっとも小生だけの場合かも知れないが。。。
・しかし、ここでは、初心に立ちかえって、これらの疑問を味わいつつ第２章に取り組んでいくことにする。

§ 2. 荷電粒子の物理量

・Lorent zの力だけが働いている 1個の荷電粒子のNewton の運動方程式は、粒子の位置座標を $x(t)$ で表すと、

$$m\ddot{x}(t)=e\{E(x(t),t)+\dot{x}(t)\times B(t,t)\} \tag{2.1}$$

・電荷 e をもった点粒子の非相対論的な理論での電荷および電流の密度は、それぞれ

$$\rho(\mathbf{x},t)=e\,\delta(\mathbf{x}-x(t)) \tag{1.8a}$$
$$\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)=e\dot{x}(t)\,\delta(\mathbf{x}-x(t)) \tag{1.8b}$$

そこで、式 (2.1) の両辺に左から $\delta(\mathbf{x}-x(t))$ を掛けると

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t)\,\delta(\mathbf{x}-x(t)) &= e\{E(x(t),t)+\dot{x}(t)\times B(t,t)\}\,\delta(\mathbf{x}-x(t)) \\ &= \rho(\mathbf{x},t)E(\mathbf{x},t)+\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)\times B(t,t) = \boldsymbol{f}(x,t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

《留意事項》
ここで電荷密度の定義と電流密度の定義を見比べると、電流密度（電荷密度の流れ）は電荷密度に荷電粒の位置ベクトル $x(t)$ の時間微分すなわち速度を掛けた形をしていることに留意。この形はすぐ後ででてくる「荷電粒子の質量密度とその流れ」や「エネルギー密度とその流れ」の定義式に顔をだす。
電荷密度の定義　　$\rho(\mathbf{x},t)=e\,\delta(\mathbf{x}-x(t))$
電流密度の定義　　$\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)=e\dot{x}(t)\,\delta(\mathbf{x}-x(t)) = \rho(\mathbf{x},t)\dot{x}(t)$

・ところで(1.8a)、(1.8b)が連続の方程式を満たしていることをチェックしておきましょう。

連続の方程式 ････ $\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\dfrac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=0$ ①

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}&=e\frac{\partial}{\partial t}\delta(\boldsymbol{x}-x(t))=e\frac{\partial}{\partial t}\delta(x_1-x_1(t))\delta(x_2-x_2(t))\delta(x_3-x_3(t))\\
&=e\dot{x}_1\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x_1-x_1(t))\delta(x_2-x_2(t))\delta(x_3-x_3(t))\\
&\quad+e\dot{x}_2\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(x_1-x_1(t))\delta(x_2-x_2(t))\delta(x_3-x_3(t))\\
&\quad+e\dot{x}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\delta(x_1-x_1(t))\delta(x_2-x_2(t))\delta(x_3-x_3(t))\\
&=e\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\boldsymbol{x}-x(t))=-e\dot{x}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-x(t))
\end{aligned}
\qquad ②
$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=e\nabla\cdot\dot{x}(t)\delta(\boldsymbol{x}-x(t))=e\dot{x}(t)\nabla\cdot\delta(\boldsymbol{x}-x(t)) \qquad ③$$

$$\therefore\ \partial_t\rho(\boldsymbol{x},t)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=0$$

[注]

合成関数の微分を考えます。$z=x-y$の関数 $f(z)$について

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{df}{dz}=\frac{df}{dz},\quad \frac{\partial f(x-y)}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{df}{dz}=-\frac{df}{dz},\quad \frac{\partial f(x-y)}{\partial x}=-\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}$$

・さて、この荷電粒子の質量密度と質量密度の流れは、e を m に置き換え、それぞれ

$$\rho^{(p)}(\boldsymbol{x},t)=m\delta(\boldsymbol{x}-x(t)) \qquad (2.4a)$$

$$\boldsymbol{J}^{(p)}(\boldsymbol{x},t)=m\dot{x}(t)\delta(\boldsymbol{x}-x(t)) \qquad (2.4b)$$

これは上で計算したと同様に連続の方程式を満たしますね。

・次に、質量の流れ (2.4b) に対して、質量の流れの流れ (歪みテンソル) を次式で定義する。

$$t_{ij}^{(p)}(x,t)\equiv m\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\delta(\boldsymbol{x}-x(t)) \qquad (2.5)$$

すると、点粒子の質量の流れの密度に対して次のバランス方程式 (付録7) が成り立つ。

$$\dot{J}_i^{(p)}(\boldsymbol{x},t)+\partial_j t_{ij}^{(p)}(x,t)=f_i(\boldsymbol{x},t) \qquad (2.6)$$

・上のバランスの方程式を計算で確かめてみよう。

$$
\begin{aligned}
\dot{J}_i^{(p)}(\boldsymbol{x},t)&=m\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{x}_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-x(t))\right)\\
&=m\ddot{x}_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-x(t))-m\dot{x}_i(t)\dot{x}\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-x(t))
\end{aligned}
\qquad (i)
$$

$$\partial_j t_{ij}^{(p)}(x,t)=\sum_j^3\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}^{(p)}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x_1}t_{i1}^{(p)}+\frac{\partial}{\partial x_2}t_{i2}^{(p)}+\frac{\partial}{\partial x_3}t_{i3}^{(p)}$$

$$=m\dot{x}_i(t)\left(\dot{x}_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1}+\dot{x}_2(t)\frac{\partial}{\partial x_2}+\dot{x}_3(t)\frac{\partial}{\partial x_3}+\right)\delta(\mathbf{x}-x(t))$$

$$=m\dot{x}_i(t)\dot{x}\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad \text{(ii)}$$

$$\therefore\quad \dot{J}_i^{(p)}(\mathbf{x},t)+\partial_j t_{ij}^{(p)}(x,t)=m\ddot{x}_i(t)\delta(\mathbf{x}-x(t))=f_i(\mathbf{x},t) \qquad \text{(iii)}$$

右辺に電磁的なLorents力が出てきたことに留意しておきましょう。

・次に、粒子のエネルギー密度とその流れを次式で定義する。

$$\boldsymbol{E}^{(pe)}(\mathbf{x},t)\equiv\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad \text{(2.7a)}$$

$$J_i^{(pe)}(\mathbf{x},t)\equiv\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\dot{x}_i(t)\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad \text{(2.7.b)}$$

するとエネルギーに対するバランス方程式（注：テキスト（2.8）の左辺 第1項は時間微分が抜けている：誤植）

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(pe)}(\mathbf{x},t)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(pe)}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)\cdot E(\mathbf{x},t) \qquad \text{(2.8)}$$

式（2.8）を計算で確かめてみる。

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(pe)}(\mathbf{x},t)=m\dot{x}(t)\ddot{x}(t)\delta(\mathbf{x}-x(t))-\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\dot{x}(t)\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad ①$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(pe)}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)\dot{x}(t)\nabla\cdot\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad ②$$

①＋②より

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{(pe)}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(pe)}=m\dot{x}(t)\ddot{x}(t)\delta(\mathbf{x}-x(t)) \qquad ③$$

③式の右辺は

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t)\delta(\mathbf{x}-x(t))=e\dot{x}(t)\cdot[E(x(t),t)+\dot{x}(t)\times B(x(t),t)]\delta(\mathbf{x}-x(t))$$

$$=e\dot{x}(t)\cdot E(x(t),t)\delta(\mathbf{x}-x(t))$$

$$+\underbrace{e\dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t)\times B(x(t),t)}_{\text{ベクトル算法によりゼロ}}\delta(\mathbf{x}-x(t))$$

$$=e\dot{x}(t)\cdot E(x,t)\delta(\mathbf{x}-x(t))=\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)\cdot E(\mathbf{x},t) \qquad ④$$

$$\therefore\quad \dot{\boldsymbol{E}}^{(pe)}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(pe)}=\boldsymbol{J}(\mathbf{x},t)\cdot E(\mathbf{x},t) \qquad ⑤$$

ということで、式（2.6）、（2.8）は「粒子の質量の流れ$\boldsymbol{J}^{(p)}(\mathbf{x},t)$やエネルギー$\boldsymbol{E}^{(pe)}(\mathbf{x},t)$は粒子系だけでは保存していない」ことを示している、とテキストには書かれていますね。（2.6）や（2・8）の左辺は粒子系の記述ですが、右辺は電磁的力(エネルギー)が顔をだしている、すなわち電磁的なエネルギー（湧き出し）が力学的エネルギーに変化する割合を示しているという ことになるわけですね。まぁ、この辺りは次の§3にいけばもっと鮮明に分かるんでしょうなぁ、、、

まぁゴタゴタと計算が続きましたね。§3も同様な事態が続きそうですが、頑張って参りましょうか。。。。
尚、連続の方程式の計算でμさんhttp://nisimiyu.netの助言をいただきました。ありがとうございました。

-- おつかれさま　CoffeeBreak♪∂