＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第 2章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§３電磁場のエネルギー

2003. 03. 15 byKENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

§ 3. 電磁場のエネルギー

・さて、Maxwellの方程式（1. 21）（1. 22）を引っぱりだして次のような演算をしてみる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \right\} \tag{1.3}$$

（1. 2）の両辺に左から$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$を掛けて整理すると

$$-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad ①$$

次に（1. 3）の両辺に左から$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$を掛けて整理すると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \qquad ②$$

① と ② を加えあわすと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) - \left\{ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}, t) + \mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t) \right\} = \mu_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \qquad ③$$

ベクトル演算公式$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$を使うと 式 ③は空間と時間を 1つの文字 xで表して

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \right\rangle - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) = \boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{J}(x) \tag{2.9a}$$

となる。バランス方程式$\langle \partial_t G(x) + \nabla\cdot\sum(x) = q(x) \rangle$ですね。（2. 9a）式を荷電粒子を含む3次元の任意 の体積Ｖについて積分すると

$$\frac{d}{dt}\int_V \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \right\} = -\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\{\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) + \boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{J}(x)\}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\int_{\partial S} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) - \int_V d^3x\,\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x) \tag{2.9b}$$

・§２ででてきたエネルギーのバランス方程式（2. 8）の左辺を（2. 9a）の左辺に代入するとナンとうまい具合に連続の方程式がでてきます。以下にそれを計算します。

$$\dot{E}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.8}$$

(2.9a) より

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}E^{(\mathrm{pe})}(x)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x) \qquad ④$$

$$\therefore\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)+E^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}$$

$$+\nabla\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))+\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}=0 \qquad (2.10)$$

・連続の方程式（2.10）は、体積Ｖの中には粒子のエネルギ‐密度 $E^{(\mathrm{pe})}(x)$ と電磁場のエネルギー密度 $E^{(\mathrm{ele})}(x)$

$$E^{(\mathrm{ele})}(x)\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \qquad (2.11\mathrm{a})$$

があり、その体積の表面には、粒子のエネルギーの流れ $\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x)$ と電磁場のエネルギーの流れ $\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)$ がある、ということになります。

$$\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)\equiv\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) \qquad (2.11\mathrm{b})$$

この電磁場のエネルギーの流れ $\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)$ を **Poyntingベクトル** と呼んでいます。

※§2の終わりで、少し長い引用ですが

「ということで、式（2.6）、（2.8）は　粒子の質量の流れ $\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)$ やエネルギー $E^{(\mathrm{pe})}(\boldsymbol{x},t)$ は粒子系だけでは保存していない」ことを示している、とテキストには書かれていますね。（2.6）や（2・8）の左辺は粒子系の記述ですが、右辺は電磁的力(エネルギー)が顔をだしている、すなわち電磁的なエネルギー（湧き出し）が力学的エネルギーに変化する割合を示しているという ことになるわけですね。まぁ、この辺りは次の§3にいけばもっと鮮明に分かるんでしょうなぁ、、、」と書いたことを憶えていますか？ この点を検証してみましょう。。。

式（2.10）を積分形式で書くと

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)+E^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}$$

$$+\int_V d^3x\nabla\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))+\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int_V d^3x E^{(\mathrm{ele})}(x)\right]+\int_V d^3x\nabla\cdot\left\{\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)+\boldsymbol{J}^{(\mathrm{pe})}(x)\right\}=0 \qquad ⑤$$

体積を十分大きくし、表面を十分遠方にもっていくと $\boldsymbol{E}(x)$ や $\boldsymbol{B}(x)$ は小さくなるから、エネルギーの流れは消滅することになりますね。従って、そのとき全エネルギーの保存則は⑤より

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+E_{\mathrm{ele}}^{\infty}\right]=0 \qquad ⑥$$

となります。つまり粒子系だけではエネルギー保存則は成り立たないということですね。

【蛇足】

・この§の最後、テキストの蛇足を見てみましょう。第１章でMaxwellの方程式の符号についての注意(P13)が載っていました。そのときは歯牙にもかけませんでしたが・・・分からなかったから(笑い)、改めて考えて見ましょう。

○Maxwell の方程式 $Ñ\times \boldsymbol{E}(x)=-\dot{\boldsymbol{B}}(x)$ の右辺の負の符号の任意性はない。

●Maxwell の方程式 $Ñ\times \boldsymbol{E}(x)=\dot{\boldsymbol{B}}(x)$ としましょう。すると エネルギー密度 $E^{(\mathrm{ele})}(x)$ は上でやった計算を辿り

$$E^{(\mathrm{ele})}(x)\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{0}\boldsymbol{E}^{2}(x)-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_{0}}\boldsymbol{B}^{2}(x) \qquad ⑦$$

となります。これはエネルギーが正値を取るべしという条件を必ずしも満たしていませんね。つまり、”エネルギーは常に正値”という条件からMaxwellの方程式の符号が決まっているということですね。

○実際に流れるエネルギーはPoynting ベクトルの縦成分だけで、横成分の方はエネルギーの出入りには関係がない。

●バランス方程式 $\partial_{t}G(x)+Ñ\cdot å(x)=q(x)$ で、ベクトル場 $å(x)$ は縦成分しか効きませんね。というのは $å_{\mathrm{T}}(x)$ を横成分とすると $Ñ\cdot å_{\mathrm{T}}(x)=0$ だから。

従って

$$Ñ\cdot \boldsymbol{J}^{(\mathrm{ele})}(x)=Ñ\cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{L}}^{(\mathrm{ele})}(x)=Ñ\cdot\frac{1}{\mu_{0}}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))=Ñ\cdot\frac{1}{\mu_{0}}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{T}}(x)\times\boldsymbol{B}(x))$$

つまり、電場の縦成分はエネルギーの流れに関与しない。電磁波は横波で、そのエネルギーは波の進む方向に運ばれる、となります。

エ～ッっと、ここらで今まで議論してきた物理系のイメージを自分なりにまとめておきます。

<Lorentz力を受けて電磁場中を動きまわっている荷電粒子の物理>

・電荷 e 、質量 m をもった1個の荷電粒子が電磁場の中にあり、この荷電粒子に電磁的なLorentz力（荷電粒子自身が作る電磁場も含まれる）が働いて自由運動しています。

このような系では

①荷電粒子の電荷密度と電流密度は連続の方程式を満たす。

②荷電粒子の質量密度とその流れは連続の方程式を満たす。

これは、荷電粒子の電荷密度や質量密度は、増えもしなければ減りもしないということですね。

・次に、荷電粒子の運動量の時間変化を調べると Lorentz力 を湧き出し量としたバランス方程式がでてきました。これはLorentz力が荷電粒子の運動量の時間変化と釣り合っているということですね（運動量の時間変化は力の次元）。

・次に荷電粒子の運動エネルギーの時間変化を調べると、$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ という電磁気的エネルギー

を湧き出し量としたバランス方程式がでてきました。これは電磁気的エネルギーが力学的運動エネルギーの時間変化と釣り合っている、つまり電磁気的エネルギーは力学的エネルギーに変化したといえますね。

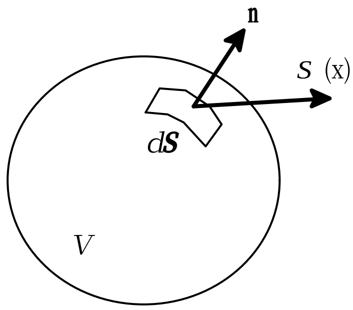
・しからば、全体系のエネルギー保存則はどうなるのかということが問題になってきますが、電磁場のエネルギーを

$$E^{(\mathrm{ele})}(x) \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} B^2(x)$$

と定義することにより、荷電粒子の運動エネルギーと電磁場のエネルギーの総和が保存されることになります。

【参考】

<Balance方程式と連続の方程式>



・空間にある物理量が分布しているとする。その分布を $G(x)$ と書く。$G(x)$ は物質の密度や電荷密度でもよいし、流体の速度場のように方向をもった量でもよい。

・空間に固定された体積Vを考えその内部と表面に目をつけよう。体積Vの中の $G(x)$ の総量の時間的変化はVの表面の単位面積を単位時間に流れ出る量（方向まで含めて）をΣ (x)、体積中の点 xから単位時間に湧きでる量を q (x) とすると、全量がバランスする条件は

$$\partial_t G(x) + \tilde{N} \cdot S(x) = q(x)$$

これをバランス方程式とよびます。もし湧き出しがなかったら q (x) = 0で連続の方程式となります。

$$\partial_t G(x) + \tilde{N} \cdot S(x) = 0$$

[参考文献：高橋 康「古典場から量子場への道」]

--- おつかれさま *CoffeeBreak* ♪ ∂∇