＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第 2章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§４電磁場の慣性の流れ

2003. 03. 26 byKENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

4. 電磁場の慣性の流れ

･慣性の流れ（運動量の流れといいたいが言えない）についても保存量が定義できる。それを調べる。
･Maxwellの方程式だけ使って

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{e_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\right\}=e_0\left\{\dot{\boldsymbol{E}}(x)\times\boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{E}(x)\times\dot{\boldsymbol{B}}(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{m_0}(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x)-\boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x)-e_0\boldsymbol{E}(x)\times(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{E}(x)) \qquad (2.13)$$

・(2. 13)の右辺第1項を計算する

$\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}$ であるからベクトル公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ より

$$(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}\right)\times\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}\right)\times\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}\right)\times\boldsymbol{B}$$

$$=(\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}-\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=-\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}\bullet\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{k}\right\}$$

$$+(\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_1}+(\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_2}+(\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{B})\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_3}$$

$$=-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{B}^2+(\boldsymbol{B}\bullet\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{B}=-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{B}^2+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{B}B_j-\boldsymbol{B}(\tilde{\boldsymbol{N}}\bullet\boldsymbol{B})$$

$$=-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{B}^2+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{B}B_j \qquad ①$$

$$\therefore\ \frac{1}{m_0}(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x)=-\frac{1}{2m_0}\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{B}^2+\frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{B}(x)B_j(x) \qquad ②$$

･次に（2. 13）の右辺第3項を計算する。

$$\boldsymbol{E}(x)\times(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{E}(x))=\boldsymbol{E}(x)\times\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_1}\right)+\boldsymbol{E}(x)\times\left(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_2}\right)+\boldsymbol{E}(x)\times\left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_3}\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}-(\boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{i})\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_1}+\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{j}-(\boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{j})\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_2}+\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{k})\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_3}$$

$$=\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}+\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{j}+\left(\boldsymbol{E}\bullet\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{E}\bullet\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{E}$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{E}^2 - (\boldsymbol{E}\bullet\tilde{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{E}^2 - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{E}E_j + \boldsymbol{E}(\tilde{\boldsymbol{N}}\bullet\boldsymbol{E})$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{E}^2 - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{E}E_j + \frac{r}{e_0}\boldsymbol{E} \qquad ③$$

$$\therefore\ e_0\boldsymbol{E}(x)\times(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{E}(x)) = \frac{1}{2}e_0\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{E}^2 - e_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{E}E_j + r\boldsymbol{E} \qquad ④$$

・以上の計算結果を (2. 13) に入れると

$$\frac{\partial}{\partial t}\{e_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\} = e_0\{\dot{\boldsymbol{E}}(x)\times\boldsymbol{B}(x) + \boldsymbol{E}(x)\times\dot{\boldsymbol{B}}(x)\}$$

$$= \frac{1}{m_0}(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x) - e_0\boldsymbol{E}(x)\times(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{E}(x))$$

$$= -\frac{1}{2m_0}\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{B}^2(x) + \frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{B}(x)B_j(x) - \boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x)$$

$$-\frac{1}{2}e_0\tilde{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{E}^2 + e_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{E}E_j - r\boldsymbol{E}$$

$$= -\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{N}}\left\{e_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}(x)B_j(x) + e_0\boldsymbol{E}(x)E_j(x)\right\}$$

$$-(r\boldsymbol{E}(x) + \boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) \qquad ⑤$$

・⑤式の i 成分を表したものが (2・15a) 式となります。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}\{e_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{d_{ij}\left\langle\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\rangle\right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle e_0E_i(x)\,E_j(x) + \frac{1}{m_0}B_i(x)\,B_j(x)\right\rangle = -r\,E_i(x) - (\boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i \qquad (2.15a)$$

(2. 15a) の右辺はLorentz力に負号をつけたものになっています。

・この式を積分する。Gaussの定理を使って体積積分を表面積分に直して

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x e_0(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i = -\int_{\partial V} dS_{ij}\,t_{ij}^{(elm)}(x) - \int_V d^3x\,f_i(x) \qquad (2.15b)$$

というバランス方程式が得られる。ただし

$$t_{ij}^{(elm)}(x) = \left\{d_{ij}\left\langle\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\rangle - e_0E_i(x)\,E_j(x) + \frac{1}{m_0}B_i(x)\,B_j(x)\right\} \qquad (2.16b)$$

ここで

$$J_i^{(elm)} \equiv \{e_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i \qquad (2.16a)$$

を定義する。すると粒子に関する式 (2. 6)

$$\dot{J}^{(p)}_i(\mathbf{x},t)+\partial_j t^{(p)}_{ij}(\mathbf{x},t)=f_i(\mathbf{x},t) \tag{2.6}$$

と一緒にして次の連続の方程式到達する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{J_i^{(p)}(x)+J_i^{(elm)}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{t_{ij}^{(p)}(x)+t_{ij}^{(elm)}(x)\right\}=0 \tag{2.17}$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_i^{(p)}(x)&\equiv m\dot{x}_i(t)d(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t)) \\ t_{ij}^{(p)}(x)&\equiv m\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)d(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t)) \end{aligned}}$$

・(2. 17) は運動量の保存則と考えたいが、電磁場と相互作用している粒子では運動量 $\boldsymbol{p}(t)$ と慣性の流れは別物となり

$$m\dot{\mathbf{x}}(t)=\boldsymbol{p}(t)-e\boldsymbol{A}(\mathbf{x}(t),t) \tag{2.18}$$

である。ここで $\boldsymbol{A}$ は電磁場のベクトルポテンシャルで後ほど勉強する。従って (2. 17) は運動量保存則と呼ぶわけにはいかない。あくまでそれは「慣性の流れ」の保存則ということになります。(2. 11b) と (2. 16a) を比較してみると

$$\boldsymbol{J}^{(ele)}(x)=\frac{1}{m_0}\left(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\right) \tag{2.11b}$$

$$=\frac{1}{e_0 m_0}\boldsymbol{J}^{(elm)}(x)=c^2\boldsymbol{J}^{(elm)}(x) \tag{2.19}$$

となります。左辺は「エネルギーの流れ」であり、右辺は「慣性の流れ」です。エネルギーと慣性が c^2 で結ばれているというのは、よく知られた相対論的関係

$$E=mc^2 \tag{2.20}$$

に他なりません(←アッと驚きましたか？小生はビックリしました)。

・つまり、Maxwellの理論ははじめからEinsteinの相対性原理を満たしているということですね。一方、荷電粒子のエネルギーの流れ (2. 7b) と慣性の流れ (2. 4b) の間には (2. 19) のような簡単な関係は存在しませんね。

$$\boxed{\begin{aligned} J^{(p)}(\mathbf{x},t)&=m\dot{\mathbf{x}}(t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t)) && (2.4b) \\ J_i^{(pe)}(\mathbf{x},t)&\equiv\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2(t)\dot{x}_i(t)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t)) && (2.7.b) \end{aligned}}$$

これは粒子に対するNewtonの方程式を使っているため、Einsteinの相対性理論をそのまま使うことはできないからでしょうネ。。。(←あまり自信がないが)

・ところで (2. 16b) で導入した量はMaxwellの応力と呼ばれています。

$$\text{Maxwell応力} \Rightarrow \left\{d_{ij}\left(\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)-e_0E_i(x)E_j(x)+\frac{1}{m_0}B_i(x)B_j(x)\right\}$$

Maxwell応力は真空中の慣性の流れ (電磁運動量の流れ？) ということですね。詳しいことは第 3章で勉強することになっています。

-- おつかれさま～ *Coffee Break* ♪ ∂∇*f*