

=====

第 2 章 物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§ 5 電磁場の波動方程式

2003 .04 .04 byKENZOU

=====

5 . 電磁場の波動方程式

Maxwellの方程式から電磁場の波動方程式を導く。第 1 章の § 5 では横成分を取り出して、それが波動方程式を満たすことを調べたが、それでは電磁場の縦成分 (磁場には縦成分がないから実際は電場の縦成分となる) はどうなるのか、、、実はこれも既に勉強していて、電場の縦成分からはCoulombの法則がでてくるのであった。

・さて、それでは計算にとりかかる。

<Maxwell の方程式>

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{B} = \mu_0 \left\{ \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\}$$

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B} = 0$$

の左から $\tilde{\mathbf{N}}$ を掛け、ベクトル算法公式を使うと

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}} \times (\tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{E}) &= \tilde{\mathbf{N}} (\tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E}) - \tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{N}} \rho - \tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{B} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

を整理すると

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{N}} \rho + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} \quad (2.21)$$

全く同様に の左から $\tilde{\mathbf{N}}$ を掛け、ベクトル算法公式を使うと

$$-\tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{B} = \mu_0 \tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

これを整理して

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{B} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{N}} \times \mathbf{J} \quad (2.22)$$

ただし、 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

一方、電場の横成分は (1.56)より

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}_T = m_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_T \quad (1.56)$$

を満たすから、電場の縦成分は $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T$ を考慮して (2.21)から (1.56)を差し引くと

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}_L = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{r} + m_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_L \quad (2.23)$$

が得られる。一見、電場の縦成分も波動方程式を満たすようにみえるが、よく見ると結局 $\tilde{\mathbf{N}}^2 \mathbf{E}_L = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{r}$ で Coulombの法則を表しているということになる (1章 § 3の蛇足参照)。

----- おつかれさま~ *Coffee Break* $\nabla f \mathbf{x}$