＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第２章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§６ ベクトルとスカラーのポテンシャル

2003．04．05 ｂｙKENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

6. ベクトルとスカラーのポテンシャル

•Maxwellの方程式を再度眺めてみる（ナヌ見飽きたと、、、まぁ我慢してくだされ）。

•Maxwell方程式の数をカウントすると①と④はスカラー量だからそれぞれ1つ、②と③はベクトル量だからそれぞれ３つ、合計１＋１＋３＋３＝８個となる。一方、未知量は電場と磁場のそれぞれ３成分（J、ρは与えられているとする）だから、合計３＋３＝６。つまり、未知量より方程式の数のほうが多い。これは独立でない方程式があることを意味している。例えば①と③より連続の方程式⑤が導かれたが、連続の方程式はいわば①と③を関係づける条件式ともいえますね。ここに方程式の数を減らすヒントがあると思うのですが、ことはそううまくいかないようですね、、、

《Maxwell Equation》

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad ① \qquad (2.24)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad ② \qquad (2.25)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right\} \qquad ③ \qquad (2.26)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad ④ \qquad (2.27)$$

《連続の式》

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\bullet\boldsymbol{J}=0 \qquad ⑤$$

•未知量と方程式の数を一致さすなにかうまい方法はないか、、、、方程式の数が未知量より多いのだから方程式の数を減らせばいいのだが、電場にしろ磁場にしろ、ベクトル３成分のある成分の方程式だけを減らすというのは土台無理な相談かな。というのは何故その成分の方程式だけが独立でないのか？説明に窮してしまう(←と感じる）。すると引いてダメなら押してみなということで、方程式の数を減らすかわりに未知量を増やすというやり方が考えられるますね。以下、そのやり方を学習しましょう。

•あるベクトル場$\boldsymbol{A}$(x)を導入すると（2．27）は

$$\boldsymbol{B}\equiv\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (2.28)$$

と書ける。これを（2．25）に代入すると

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)=0 \qquad (2.29)$$

となる。さて、$\boldsymbol{E}$ はベクトル算法 $\nabla\times(\nabla f)=0$ とあるスカラー関数 A_0(x) を使うと

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\nabla A_0 \qquad (2.30)$$

と書けますね。ここで未知量の数はベクトル場$\boldsymbol{A}(x)$の３成分とスカラー関数 $A_0(x)$ の１つで４つ、それに電場と磁場で３×２＝６となって未知量の数は合計１０個。方程式の数は元のMaxwellの方程式で（2．27）の代わりに（２．２８）としましたから合計で１０個となり、未知量の数と方程式の数が一致します。

・ということで、Maxwellの方程式を再度書くと

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.24}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{J} \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} - \nabla A_0 \tag{2.30}$$

となって、他の式はもう考えなくてもよいとなります。そこで、（2．28）と（2．30）をCoulombの法則（2．24）とAmpereの法則（2．26）に代入すると

$$\nabla\bullet\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}+\nabla A_0\right)=\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]A_0+\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\bullet\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}A_0\right]$$

$$=\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]A_0+\frac{\partial}{\partial t}\chi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad ⑥$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}+\nabla\frac{\partial}{\partial t}A_0\right]=\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$=-\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]\boldsymbol{A}+\nabla\left[\nabla\bullet\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}A_0\right]$$

$$=-\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]\boldsymbol{A}+\nabla\chi=\mu_0\boldsymbol{J} \qquad ⑦$$

となります。ここで再度整理すると

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]A_0+\frac{\partial}{\partial t}\chi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.31}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right]\boldsymbol{A}+\nabla\chi=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{2.32}$$

となります。ここで

$$\chi=\nabla\bullet\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}A_0 \tag{2.33}$$

です。したがって、与えられた電荷と電流の分布に対して (2. 31)、(2. 32) を解くことができれば、（２．２８）、（２．３０）によって電場と磁場を知ることができます。これで Maxwell の方程式は忘れ去ってしまって (2. 31) と (2. 32) だけを問題にすればよいということになる、、、、が、c の項があるため、方程式まだ複雑ですね。この c の項がなければ、いわゆる波動方程式で、Green関数を使って形式的に解くことが可能ですが、、、 c を消し去る秘策はないものか、、、なにか "スケール "を変えてやれば c を消し去ることができるのではないか、、、ということで登場する のがゲージ変換の概念となります。 このお話しの詳論は次回の§７にあります。次回を お楽しみに～ (^^)。

[補足]

(2. 28) と (2. 30) をよく眺めると、4個の量 $\boldsymbol{A}$ と A_0 を用いて６個の量 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を表現できるということになる。これは電荷と電流に関係のない式 (2. 25) と (2. 27) からの結論であり、電荷や電流の有無に関係なく常に言えることである。言いかえると、Maxwell の方程式は表面上６個の未知量 $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ を含んでいるように見えるが、これはあくまで見せかけで、実は４個の未知量しかないということなのだ。

-- おつかれさま～ *Coffee Break* ♪ ∂∇f x y