＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第２章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§７ ゲージ変換

2003．04．06 ｂyKENZOU

(04．13　おまけ追加)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

7. ゲージ変換

•前回は、Maxwell の方程式自体がもつややこしさ（6個の未知量に対して 8個の方程式という形）をなんとかして、未知量と方程式の数を一致させることができないかを検討した。その結果、ベクトル量 $\boldsymbol{A}$ とスカラー量 A_0 を新たに導入することで方程式の数と未知量の数を一致させることができた（それぞれ１0個となったが）。ポイントは磁場に関する方程式で、Maxwell の方程式では磁場 $\boldsymbol{B}$ は発散しない、すなわち $\tilde{N}\cdot\boldsymbol{B}=0$ と記述されているが、ここを新たに、磁場 $\boldsymbol{B}$ はベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転で記述される、すなわち $\boldsymbol{B}=\tilde{N}\times\boldsymbol{A}$ としたこと。言ってみれば磁場の特長を積極的に表現したということになろうか。ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる。

$$\boldsymbol{B}=\tilde{N}\times\boldsymbol{A} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\tilde{N}A_0 \tag{2.30}$$

・ところで、与えられた磁場や電場を与えるようなポテンシャルは $\boldsymbol{A}$ と A_0 に限られない。ベクトル算法 $\tilde{N}\times(\tilde{N}f)=0$ を考えると（2．28）より

$$\boldsymbol{A}'(x)=\boldsymbol{A}(x)+\tilde{N}\,l(x) \tag{2.34a}$$

新たなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}'$ が（2．30）を満たす条件を求めると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}'-\tilde{N}A'_0&=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\tilde{N}\frac{\partial}{\partial t}l-\tilde{N}A'_0\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\tilde{N}\left[\frac{\partial}{\partial t}l+A'_0\right]\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\tilde{N}A_0\\&=\boldsymbol{E}\end{aligned} \qquad ①$$

①より $A_0=\dfrac{\partial}{\partial t}l+A'_0$ が求める条件となる。これを整理して

$$A'_0(x)=A_0(x)-\frac{\partial}{\partial t}l(x) \tag{2.34b}$$

ここで、$l(x)$ は全くの任意の関数である。このように、ダッシュのついたポテンシャルは全く同じ電場と磁場を与える。（2．34）を**ポテンシャルに対するゲージ変換**と呼ぶ。電場と 磁場はポテンシャルに対するゲージ変換に対し不変であるということになる。

・さて、前回 「かし（2．31）、（2．32）を解くにはまだ複雑だ。 c を含む第 2項が邪魔である。 それが なければ 波動方程式のGreen関数で原理的に容易に解が求められるのだが。χ を消し去る秘策はないものか、、、」と模索の言葉を吐いたが、いよいよここで秘策が解き明かされる。そのポイントだが、ベクトルポテンシャル

の発散 $\tilde{N} \bullet \boldsymbol{A}$ は電場、磁場の定義に含まれず、c だけに含まれているから、それを適当に決めて、c を消してしまう！つまり、電場と磁場はポテンシャルに対するゲージ変換に対して不変であるから、ゲージ変換を施したときに c が消えるようにすればよいということがポイント。

•その処方箋は次の通り。$c(x)$ がゲージ変換を受けて $c\,'(x)$ になったとすると

$$
\begin{aligned}
c\,' &= \tilde{N} \bullet \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A'_0 \\
&= \tilde{N} \bullet (\boldsymbol{A}(x) + \tilde{N}\, l(x)) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_0(x) - \frac{\partial}{\partial t} l(x)\right) \\
&= \tilde{N} \bullet \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] l(x) \\
&= c + \left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] l(x) \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$l(x)$ を適当に選べば、変換後の $c\,'$ をゼロとすることが可能である！ 実は、この適当な選び方、つまり $c\,'$ をゼロにするやり方が、後ででてくる **Lorentz ゲージ** や **Coulomb ゲージ** と呼ばれるものとなる。そこでこれらゲージの話しをここで先にやっておこう。

・まず**Lorentz ゲージ**であるが、これは (2. 36) の右辺の各項を０となるようにしたもの、つまり $c(x) = 0$ で且つ

$$
\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] l_L(x) = 0 \qquad (2.40)
$$

を満たすゲージ $l_L(x)$ を選ぶことである。ポテンシャル c に は次の条件がつく

$$
c = \tilde{N} \bullet \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0 = 0 \qquad (2.38)
$$

(2. 38) を眺めると、まずベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の横成分だけを問題にしており（縦成分は∇•A＝０）加えてスカラー量の時間微分が入っている。"空間の項と時間的な項"を一緒くたにして０としているが、実は Lorentz ゲージは四次元の意味でポテンシャルの横成分だけを問題にすることである・・・とテキストに注意は記されている。一方、Coulombゲージはすぐ下に見るように、３次元の意味（？）でベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の横成分だけを問題にしている。

なお、注意しなければならないのは、Lorentz ゲージにはまだゲージ変換する余地が残っているという点。Lorentzゲージ (2. 40) の条件下で (2. 38) に矛盾しないようなゲージ変換 (2. 39) が許されるということ。つまり (2. 40) を満たすLorentz ゲージ l_L は、無限遠方でゼロとなる境界条件下でいろいろな解をもつため、$\boldsymbol{A}'$ や A_0 は Unique には決まらないということである。(※)

(※) 但し、テキストの蛇足にはLorentzゲージはCoulombゲージと同じように、ゲージの自由度がないことが指摘されているが、ここではその点を深刻に考えないで、従来通りに考えることとする。

$$
\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \tilde{N}\, l_L \qquad (2.39a)
$$

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial}{\partial t} l_L \qquad (2.39b)$$

このゲージ変換に対して電場、磁場は不変である（←上の議論を辿れば自明ですね）。

・一方、**Coulomb ゲージ** は

$$\tilde{N} \bullet \boldsymbol{A}' = c' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A'_0 \qquad ②$$

として、$\tilde{N} \bullet \boldsymbol{A}' = 0$ つまり、ベクトルポテンシャルの発散を０に制限するものである。上に述べたようにベクトルポテンシャルの横成分だけを問題にしている。この場合のゲージはどないなるのかを調べると（2．36）より

$$\tilde{N} \bullet \boldsymbol{A}' = c' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A'_0 = c + \left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] l - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[A_0 - \frac{\partial}{\partial t} l\right]$$

$$= \tilde{N} \bullet \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0 + \left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] l - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[A_0 - \frac{\partial}{\partial t} l\right]$$

$$= \tilde{N} \bullet \boldsymbol{A} + \tilde{N}^2 l(x)$$

$$= 0 \qquad ③$$

となる。③が恒等的０となるには

$$\tilde{N} \bullet \boldsymbol{A} = 0$$

$$\tilde{N}^2 l_c(x) = 0 \qquad (2.45)$$

が成り立たねばならない。つまり、**Coulomb ゲージ** は（2．45）を満たすものに限られる。
ところでCoulombゲージの場合、Lorentzゲージと違って、もうこれ以上ゲージ変換する余地はない。というのは、（2．45）を満たすCoulombゲージ l_c は、無限遠方でゼロになるという境界条件下では、至るところでゼロであるという解以外は存在しない。つまり、ゲージ変換の自由度は全くないということになる。

以上でゲージ変換の話しを一応終えますが、Maxwell 理論がゲージ不変であるということは電荷保存と強く結びついているという点に注意が必要です（この§の最後おまけも参照してください）。いつでも理論の不変性―――解析力学のコーナでやりましたように時間推進とか空間回転とかはエネルギーや角運動量の―――保存則を意味しましたが、ゲージ不変性もその例外ではないということです。

・さて、（2．31）（2．32）は ゲージ変換（Lorentz ゲージ）でどのようになるのかを見てみよう。
まず（2．31）は

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] A'_0 + \frac{\partial}{\partial t} c'(x)$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]A_{0}-\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\frac{\partial}{\partial t}l\,(x)+\frac{\partial}{\partial t}\left\{c(x)+\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]l\,(x)\right\}
$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]A_{0}+\frac{\partial}{\partial t}c\,(x)=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]A_{0}=-\frac{1}{e_{0}}r \qquad (2.37a)
$$

となる。スッキリした形になっている。これは波動方程式でHelmholtz型方程式と呼ばれていますね。
Green関数の本に必ずのっていますね。方程式の具体的な解き方はそれらの本を参照してください。
[参考書] 今村 勤　物理とグリーン関数」岩波全書、松浦武信他　物理・工学のためのグリーン関数入門」東海大学出版会

・次に (2. 32) も全く同様にして

$$
\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A}'-\tilde{N}\,c\,'
$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right](\boldsymbol{A}+\tilde{N}\,l)-\tilde{N}\left\{c+\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]l\,(x)\right\}
$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A}(x)=-m_{0}\boldsymbol{J} \qquad (2.37b)
$$

となる。 スッキリした形となりました。Helmholtz型の方程式ですね。

・次にCoulombゲージを取ってみると (2. 31) は

$$
\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]A'_{0}+\frac{\partial}{\partial t}c'\,(x)=\tilde{N}^{2}A_{0}'+\frac{\partial}{\partial t}\left[c'-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t}A'_{0}\right]=\tilde{N}^{2}A_{0}-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{N}^{2}l_{c}
$$

$$
=\tilde{N}^{2}A_{0} \qquad \text{Coulomb Gaugeで 0}
$$

$$
=-\frac{1}{e_{0}}r \qquad (2.42a)
$$

(2. 32) は

$$
\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A}'-\tilde{N}\,c\,'=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right](\boldsymbol{A_T}+\tilde{N}\,l_c)-\tilde{N}\left\{c+\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]l_c\right\}
$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A_T}-\tilde{N}\,c=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A_T}-\tilde{N}\left(\tilde{N}\bullet\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t}A_{0}\right)
$$

$$
=\left[\tilde{N}^{2}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\right]\boldsymbol{A_T}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{N}A_{0}=-m_{0}\boldsymbol{J} \qquad ④
$$

④を整理して

$$\left[\tilde{N}^{2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A_T} = -m_0\,\boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{N}A_0 \tag{2.42b}$$

・(2．42a) はすぐに積分できて（Green関数を使う。以前やりましたね。）

$$A_0 = \frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\boldsymbol{x}\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}r(x')\ |_{t'=t} \tag{2.43}$$

これを（2．42b) に代入すると

$$\left[\tilde{N}^{2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A_T} = -m_0\,\boldsymbol{J} + \frac{m_0}{4p}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\boldsymbol{x}\tilde{N}\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}r(x')\ |_{t'=t}\right] \tag{2.44a}$$

$$= -m_0\,\boldsymbol{J_T} \tag{2.44b}$$

・(2．44a) の第 2項に電荷によるCoulombの項がでてきたが、これがCoulombゲージと呼ばれる理由となっている。

[蛇足]

蛇足の（2) を覗いみる。Lorentz Gaugeの場でベクトル　$\boldsymbol{A}$ の成分を縦成分と横成分に分けると

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_T + \boldsymbol{A}_L \tag{2.52}$$

となる。電場の横成分と縦成分を　$\boldsymbol{A}$　と A_0 で表してみるとなにがでてくるか？

電場の横成分と縦成分は $\boldsymbol{E} = E_T + E_L = -(\dot{\boldsymbol{A}}_T + \dot{\boldsymbol{A}}_L) - \tilde{N} A_0$ より

$$\boldsymbol{E}_T = -\dot{\boldsymbol{A}}_T \ \ ,\ \ \boldsymbol{E}_L = -\dot{\boldsymbol{A}}_L - \tilde{N} A_0 \tag{2.53}$$

と書ける。一方、磁場の方はいつでも横成分であるから

$$\boldsymbol{B} = \tilde{N}\times\boldsymbol{A} = \tilde{N}\times\boldsymbol{A_T} \tag{2.54}$$

ところで $\tilde{N}(\tilde{N}\bullet\boldsymbol{A}) = (\tilde{N}\bullet\tilde{N})\boldsymbol{A} - \tilde{N}\times(\tilde{N}\times\boldsymbol{A})$ であるから、$\boldsymbol{A}$ の縦成分 $(\tilde{N}\times\boldsymbol{A_L}=0)$ は形式的に

$$\boldsymbol{A}_L = \frac{1}{\tilde{N}^{2}}\tilde{N}(\tilde{N}\bullet\boldsymbol{A}) \tag{2.55a}$$

と書ける。ここでLorentz条件 $(\tilde{N}\bullet\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\dot{A}_0 = 0)$ を使うと

$$\boldsymbol{A}_L = -\frac{1}{c^2\tilde{N}^{2}}\tilde{N}\dot{A}_0 \tag{2.55b}$$

これを（2．53) に代入すると、（2．37）を使って

$$\boldsymbol{E}_L = \frac{1}{c^2\tilde{N}^{2}}\tilde{N}\ddot{A}_0 - \tilde{N}A_0 = \frac{1}{\tilde{N}^{2}}\tilde{N}\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \tilde{N}^{2}\right\}A_0 = \frac{1}{e_0}\frac{1}{\tilde{N}^{2}}\tilde{N}\,r \tag{2.56}$$

これはCoulombの法則（1．24) に他ならない。つまり$\boldsymbol{E}_L$ は電荷によって作られるCoulomb場ということになる。

一方、電場の横成分の方の時間微分は（2．37b）と先ほどのベクトル算法を使って

$$\dot{\boldsymbol{E}}_T = -\ddot{\boldsymbol{A}}_T = -c^2\left\{\tilde{N}^2\boldsymbol{A_T} + m_0\boldsymbol{J_T}\right\} = c^2\tilde{N}\times(\tilde{N}\times\boldsymbol{A_T}) - c^2 m_0\boldsymbol{J_T} \qquad (2.57a)$$

$$\therefore\ \tilde{N}\times\boldsymbol{B} = m_0\left\{\boldsymbol{J_T} + e_0\dot{\boldsymbol{E}}_T\right\} \qquad (2.57b)$$

これはAmpereの法則（1．22）に他ならない。

［蛇足終わり］

＜おまけ＞

■ Lorentz ゲージが電荷と電流の連続方程式と矛盾しないこと

＜Lorentz ゲージ＞

$$\tilde{N}\bullet\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0 = 0 \qquad ①$$

＜Maxwellの方程式＞

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0 = -\frac{1}{e_0}r \qquad ②$$

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) = -m_0\boldsymbol{J} \qquad ③$$

③の左から $\tilde{N}\bullet$ を掛けると

$$\tilde{N}\bullet\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) = \left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{N}\cdot\boldsymbol{A}(x) \qquad ④$$

ここで $\tilde{N}$ 演算子と $\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \equiv \Box^2$ 演算子（ダランベール演算子）の互換性を使った。

次に④に①のLorentz条件をつかうと（面倒なのでダランベール演算子を使う）

$$\Box^2\tilde{N}\cdot\boldsymbol{A}(x) = -m_0\tilde{N}\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{1}{c^2}\Box^2\frac{\partial}{\partial t}A_0 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Box^2 A_0$$

$$= -e_0 m_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{e_0}r\right) = m_0\frac{\partial r}{\partial t} \qquad ⑤$$

$$\therefore\ \frac{\partial r}{\partial t} + \tilde{N}\cdot\boldsymbol{J} = 0 \qquad ⑥$$

-- おつかれさま～　*Coffee Break* ♪ ∂∇***f x y d***