＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第２章　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

§８ 粒子と電磁場の相互作用

2003．04．13 ｂｙKENZOU

2003．.04．14　　⑨式導出追記

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

8. 粒子と電磁場の相互作用

・電磁場に中の荷電粒子のＮewtonの運動方程式は（テキストＰ３２）

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = e\left\{\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)+\dot{\boldsymbol{x}}(t)\times\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)\right\} \tag{2.1}$$

となります。右辺はこの粒子に働く電磁的な Lorentz力です。電磁場を電磁ポテンシャルで 表すと

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}A_0,\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{①}$$

を（2．1）に代入して

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}A_0+\dot{\boldsymbol{x}}(t)\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right\} \tag{②}$$

となります。右辺の料理にこれからかかるわけですが、少しだらだらと計算が続きますので、退屈な向きは⑨式まで飛んでください（笑い）。さて、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$ の時間微分は

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=(\dot{\boldsymbol{x}}\bullet\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{③}$$

となります。②の右辺第３項は $\boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{x}}$ として

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{k}=\alpha\,\boldsymbol{i}+\beta\,\boldsymbol{j}+\gamma\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}=\left(v_2\gamma-v_3\beta\right)\boldsymbol{i}+\left(v_3\alpha-v_1\gamma\right)\boldsymbol{j}+\left(\beta v_3-\alpha v_2\right)\boldsymbol{k}$$

$$v_2\gamma-v_3\beta=v_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)-v_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)=\left(v_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)-\left(v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)$$

$$=\left(v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial A_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)-\left(v_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{\nabla})A_1 \tag{④}$$

$$v_3 a \ - v_1 g = \frac{\partial}{\partial x_2}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v} \bullet \tilde{\mathbf{N}}) A_2$$ ⑤

$$b\, v_3 \ - v_2 a \ = \frac{\partial}{\partial x_3}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v} \bullet \tilde{\mathbf{N}}) A_2$$ ⑥

④⑤⑥より $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{x}$ に戻して (^^) ;

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \times (\tilde{N} \times \boldsymbol{A}) = \tilde{\mathbf{N}}(\dot{\boldsymbol{x}} \bullet \boldsymbol{A}) - (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}) \boldsymbol{A}$$ ⑦

となります。あともう少し (^^)。③と⑦を②に代入すると

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = e\left\{ - \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \tilde{\mathbf{N}} A_0 + \tilde{\mathbf{N}}(\dot{\boldsymbol{x}} \bullet \boldsymbol{A}) \right\}$$ ⑧

⑧を整理すると、Newtonの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A}) = -e\tilde{\mathbf{N}} \bullet \left(A_0 - \dot{\boldsymbol{x}} \bullet \boldsymbol{A} \right)$$ ⑨

となりました。ここで⑨式左辺の被微分項は正準運動量 $\boldsymbol{p}$ と呼ばれます。

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}} + e\boldsymbol{A}$$ ⑩

$\boldsymbol{p}$ が何故正準運動量かと思われる方は、当HP"解析力学ノート"の「正準形式の理論」の項を参照して下さい。

・電磁場の中にある荷電粒子の「慣性の流れ」と「運動量」の関係は上で見たように

$$m\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{p}(t) - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(t), t)$$ (2.58)

でした。ここで $\boldsymbol{p}$ は正準運動量ですね。さて、電磁場のベクトルポテンシャルがゲージ変換

$$\boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) + \tilde{N}\, l(x)$$

を受けた場合、「慣性の流れ」がゲージ不変であるための条件を求めてみます。ゲージ変換後の「運動量」を $\boldsymbol{p}'$ とすると「慣性の流れ」がゲージ不変であるためには①式が成り立たねばならない。

$$\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}' - e(\boldsymbol{A} + \tilde{N}\, l) = (\boldsymbol{p}' - e\tilde{N}\, l) - e\boldsymbol{A}$$ ①

従って正準運動量はゲージ不変ではなく、②式のゲージ変換を受けるということになります。この②式を **粒子の運動量に対するゲージ変換** と呼んでいます。

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + e\tilde{N}\, l$$ ②

・さて、これで以前に導いた保存則(2.10)や(2.17)がゲージ変換に対して不変であることを明らかにするために、これら保存則を(2.58)を使って書きなおしましょう。(2.10)は

$$\frac{\partial}{\partial t}E\ (x)+\tilde{\boldsymbol{N}}\bullet\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}=0$$

と書けます。ここで全エネルギー密度とその流れはそれぞれ

$$E\ (x)=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2 d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\ )+\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{2.60}$$

$$\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}=\frac{1}{2m^2}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\ )+\frac{1}{m_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{2.61}$$

となります。また、慣性の流れの保存則（2.17）は

$$\frac{\partial}{\partial t}J_i+\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}=0 \tag{2.62}$$

全慣性密度とその流れは

$$J_i=(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\ )+e_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_i \tag{2.63}$$

$$t_{ij}=\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_j d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\ )+d_{\mathrm{ij}}\left(\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2\right)$$
$$-e_o E_i E_j-\frac{1}{m_o}B_i B_j \tag{2.64}$$

となります。これらの式はゲージ変換

$$\boldsymbol{A}'(x)=\boldsymbol{A}(x)+\tilde{N}\ l(x)$$
$$A_0'(x)=A_0(x)-\frac{\partial}{\partial t}\ l(x)$$

と運動量のゲージ変換 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+e\tilde{N}\ l$ に対して不変となります。

○エピローグ

ふ～ッッツ！ なんとか第２章のおわりまできた。兎に角前進あるのみという方針でやっているため、いろいろと物理的考察の不充分なところが多多あろう。第１回目の readingとしては致し方ないとしておこう。ところで第2回目の readingを行なうかどうかは全く不明であるが、、、

第３章は物理の話しが主流とのこと、ボチボチと後ろを振り返らずに行きますか、、、それではまた～

--- おつかれさま～　Coffee Break ♪ ∂∇ *f x y d z*