==================================

第３章　電磁場の力線と調和振動子

§１ はじめに

§２ 力　　線

§３ 電磁場のエネルギーと応力テンソル

2003. 05. 04 by KENZOU

==================================

§１ はじめに

＜力線＞

流体力学でおなじみの力線（流線ともいう）という概念を用いると、抽象的な電場や磁場がVisibleになるというメリットがあります。また、前章で勉強した**電磁場のエネルギー密度**や**Maxwellの応力テンソル（※）**が力線という概念で理解すると、**圧力**とか**張力**といった今まで使いなれた力学的な量で記述できるというメリットがあります。しかし、力線で電磁場の時間的動きを理解するにはしんどい。むしろ不向きである。

※）面を通過する運動量の流れが"面に働く応力"に相当することからMaxwellの応力テンソルと呼ばれているが、本来は電磁運動量流テンソルと呼ぶべきものである。

＜一般化座標＞

一方、場の問題に対しての有効な力学的手法として解析力学でやった**一般化座標**を用いるやり方があります。これを使うと、LagrangianやHamiltonianの方法がすぐ転用できて、**量子論**へ移行する際に便利というメリットがあります。

ということで、本章では**力線の方法**と**一般化座標**の方法を勉強します。

§２ 力 線

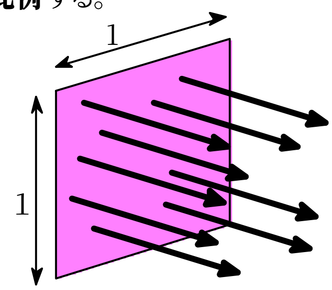
ベクトル場の空間に、線を書き、その線上の任意の点における接線がその場所でのベクトル場の方向と一致するとき、その線をベクトル場の力線という。無論、時間は固定しての話し。･･･まぁ、早い話しが流体力学でいう「**流れの道筋**」というものを浮かべればいいですね。電場の力線を電気力線、磁場の力線を磁力線と呼びます。

① 電場も磁場も一価であるから自分自身と交わることはない。ただし互いに交錯することはできる。

② **力線の密度**（単位体積当たり）はその点における**場の強さに比例**する。

③ 電気力線に垂直な単位面積をＤ本の電気力線が貫いているとき、その点での電束密度はＤである。電束密度と電場の関係は $D=\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ で定義する。

④ 同様に磁束密度Ｂが定義できて、磁力線に垂直な単位面積にＢ本の磁力線が貫いている時、その点での磁束密度はＢである。



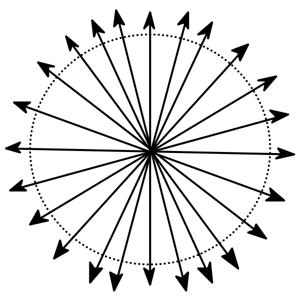
●電束密度 ε_0E（本）

●磁束密度 B（本）

電荷ＱによるCoulombの場では、放射状の電気力線の数はＱ本である。電束密度は電荷からの距離の２乗の逆比例して小さくなる。

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\ ,\quad Q=4\pi r^2\cdot\varepsilon_0 E$$

Ｑ本



球殻面積

$4\pi r^2$

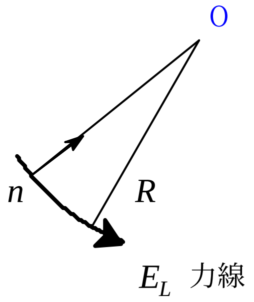
縦型の場（渦無し場）では力線の曲がる方向に強くなるという特長を持っています。言いかえると、電気力線が曲がっている場合には、電場は電気力線の内側に向かって強くなるということです。数学的には次ぎの定理を参照してください。

[力率曲線の定理]

渦無しベクトル場 $\boldsymbol{E}_L$ では、場の強さ$E_L = |\boldsymbol{E}_L|$ は力線の内側に向かって強くなる。定量的には、E_L の力線の法線方向の変化は微分幾何学で知られているように

$$\frac{\partial E_L}{\partial n} = \frac{E_L}{R}$$

と表される。但しRは力線の曲率半径である。



電気力線の線要素を $d\boldsymbol{r}$ とすると、$d\boldsymbol{r}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ に平行である。つまり、

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{3.1b}$$

となる。これを x, y, z の成分に分けると

$$(dyE_z - dzE_y)\boldsymbol{i} + (dzE_x - dxE_z)\boldsymbol{j} + (dzE_y - dyE_x)\boldsymbol{k} = 0$$

各成分はそれぞれ 0 となるという条件より、整理して

$$\frac{dx}{E_x(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dy}{E_y(\boldsymbol{x}, t)} = \frac{dz}{E_z(\boldsymbol{x}, t)} \tag{3.1a}$$

が得られる。（3. 1a）は電気力線の数学的な定義式となっています。

電場が横型であるとき（$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_T = 0$）、任意の閉じた面について

$$\oint_{\partial V} \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.2}$$

が成り立つから、有限な面を貫く電束の数は面の形によらない、また、磁束はいつでも横型だから、一定の面を貫く磁束の数はいつでも面の形によらない（この数はもちろん時間的には変わる）ということになる。したがって、空間の一点で磁力線が切れるようなことは絶対に起こらない。磁力線は無限のかなたからきて無限のかなたに去っていくか、それとも自分自身でループになっているか、いずれかである、ということになります。

§ 3．電磁場のエネルギーと応力テンソル

荷電粒子の無いところでの電磁場のエネルギー密度とエネルギーの流れはそれぞれ

$$\mathcal{E}^{(\mathrm{ele})}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \tag{3.3a}$$

$$\boldsymbol{J}^{(ele)}(x)=\frac{1}{m_0}\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{3.3b}$$

となる。これを力線の言葉で表現すると

(i) 1本の電気力線は、単位長さについて $\frac{1}{2}E$ だけのエネルギーを持っている。

$$\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x)=\frac{1}{2}E\times e_0E$$

(ii) 1本の磁力線は、単位長さについて $\frac{1}{2}B/m_0$ だけのエネルギーを持っている。

$$\frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x)=\frac{1}{2}B/m_0\times B$$

(iii) 電気力線と磁力線が交わるところでは、$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}/m_0$ だけのエネルギーが、面積 $d\boldsymbol{S}$ を通して単位時間に流れている。

慣性の流れの密度

$$\boldsymbol{J}^{(elm)}(x)=e_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{3.4a}$$

とMaxwellの応力テンソル

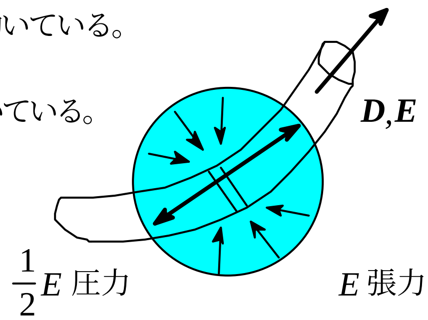
$$-t_{ij}^{(elm)}(x)=e_0E_i(x)E_j(x)+\frac{1}{m_0}B_i(x)B_j(x)-d_{ij}\left(\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{2m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right) \tag{3.4b}$$

は、やはり荷電粒子の無いところで

(i) 電気力線と磁力線が交わるところでは、単位面積に $e_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ だけの慣性の流れが、面積 $d\boldsymbol{S}$ を通して単位時間に流れている。

(ii) 電気力線に沿った面には球対称な圧力 $\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2$ が働いている。

(iii) 磁力線に沿った面には球対称な圧力 $\frac{1}{2}B^2/m_0$ が働いている。



また、

(iv) 1本の電気力線の沿って張力 E が働いている。

(v) 1本の磁力線に沿って張力 B/m_0 が働いている。

電気力線からなる無限小の束の断面積を $d\boldsymbol{S}$ とすると

$d\boldsymbol{S}$ は電場の方向を向いているから

$$\boldsymbol{E}(x)\cdot d\boldsymbol{S}=E(x)dS \tag{3.5}$$

従って

$$-t_{ij}^{(elm)}(x)\,dS_j=e_0E_i(x)E_j(x)dS_j-\frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x)dS_i$$

$$=e_0E_i(x)E(x)dS-\frac{1}{2}e_0E(x)E(x)dS_i \tag{3.6}$$

右辺第1項が張力、第2項が等方的圧力からきている。電場と$d\boldsymbol{S}$が同じ方向を向いていることを考慮すると、張力と圧力の合計は

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{e_0}E(x)E(x)dS_i(x)E(x)dS_i \tag{3.7}$$

となるから、各電気力線（$\boldsymbol{e_0}E$ 本ある）に対して差し引き$\frac{1}{2}E$だけの面を引っ張る張力が働いていることになる。言いかえると、力線は、縦の方向に縮もうとし、横の方向には膨らもうとする。この張力と圧力が平衡して力線を一定の形に保っている、ということになります。

○エピローグ

以上で第３章の§１～３をおわります。力線の話しは理解できましたか？ 小生はあまりピンときませんでした。まぁ力線という概念を使うと、場がより具象的でわかり易く見えるというメリットがあるということでしょうね。しかし、何度も言うようだが小生にはイマイチピンとこなかった、、、、

さぁ、次ぎの章からは、いよいよ電磁場の解析的取り扱いを勉強することになります。お楽しみに～

--- おつかれさま～　*CoffeeBreak* ♪ ∂∇*f x y d z c*