＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第３章　電磁場の力線と調和振動子

§４ Fourie 変 換

2003. 05. 21 by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

§４ Fourie 変換

電磁場を空間変数について Fourie変換してみる。こうすると、先の話しになるが、実はFourie変換の係数が解析力学でいう一般化座標として取り扱えることなり、従ってLagrangianやHamiltonianの理論が電磁場にも応用できるようになる。これは電磁場を量子論的に取り扱う準備ともなるわけです。

さて、Fourie変換［中身は sin関数、cos関数の寄せ集め］をやるのに、一辺Lの大きな立方体の中に電磁場の全体系を入れ、周期的境界条件をつけると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{p}_k(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{q}_k(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3.9}$$

となります。ここでFourie係数は複素数ベクトルです。また、和は周期的境界条件を満たすという条件から

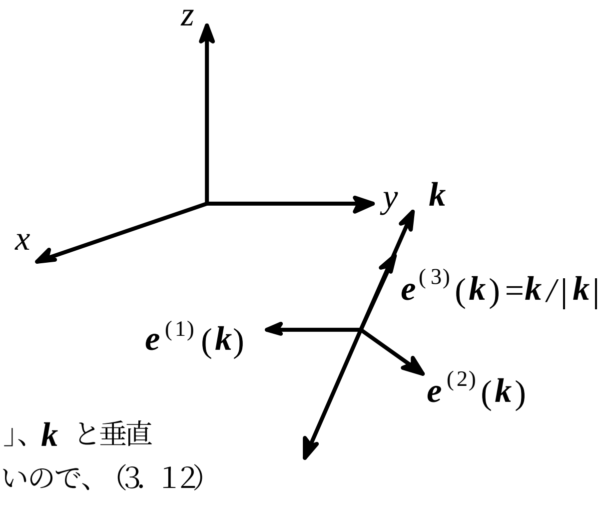
$$\boldsymbol{k}\equiv\frac{2p}{L}\boldsymbol{n}\qquad \boldsymbol{n}=0,\ \pm1,\ \pm2\ \cdots \tag{3.10}$$

のすべての n についての３重の和です。

ここで後の便利を考えてFourie係数を３個の互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)},\boldsymbol{e}^{(3)}$ で展開すると

$$\boldsymbol{p}_k(t)\equiv\sum_{r=1}^{3}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)}(t) \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{q}_k(t)\equiv -i\sum_{r=1,2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})q_k^{(r)}(t) \tag{3.12}$$



と書ける。ここで $\boldsymbol{e}^{(3)}$ は

$$\boldsymbol{e}^{(3)}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$$ とする。

Fourie成分の $\boldsymbol{k}$ の方向を向いたのを「**縦成分**」、$\boldsymbol{k}$ と垂直なのを「**横成分**」と呼ぶ。磁場は横成分しかないので、(3.12) は (3.11) と違って $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{e}^{(r)}$: $r=1,2$ の外積で表わすことができますね。また、虚数 i は外に無理やり引っ張り出したと考えておけばいいでしょう。この $\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)}$ は偏極ベクトルと呼ばれる。

３個の単位ベクトルの間には規格化直交条件

$$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{k})=d_{rs} \tag{3.13a}$$

と完全性条件

$$\sum_{r=1}^{3}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})=\sum_{r=1,2}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})+e_i^{(3)}(\boldsymbol{k})e_j^{(3)}(\boldsymbol{k})$$

$$=\sum_{r=1,2} e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{k^2}k_ik_j=\boldsymbol{d}_{ij} \qquad (3.\ 13b)$$

が各 $\boldsymbol{k}$ について成り立つ。ここで $e_i^{(r)}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(r)}$ が細文字となり、しかも足に i, j などが付いていることにギョッとされた向きがおられるのではないでしょうか。じつはこの足は慣性系座標（x, y, z）の成分を意味する足なのですね。ここで完全性条件なるものを簡単に復習しておくことにしましょう。

【復習】

関数 $f(x)$ が ① のように展開される時、⑤を完全性の条件（{f_i(x)}の要素のほかには直交する関数が 1つもないとき {f_i(x)}は**完全**であるといわれ、この場合 {f_i(x)}は**完全正規直交関数系**であるという）と呼ぶ。

$$f(x)=\sum_i C_i \boldsymbol{f}_i(x),\quad \int_a^b f^2(x)dx=1 \quad \text{（規格化直交関数系）} \qquad ①$$

$$C_i=\int_a^b \boldsymbol{f}_i^*(x)f(x)dx \qquad ②$$

$$\int_a^b \boldsymbol{f}_i^*(x)\,\boldsymbol{f}_j(x)\,dx=\boldsymbol{d}_{ij} \quad \text{直交条件}\ \ \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i^*=\boldsymbol{d}_{ij}\ \text{）} \qquad ③$$

$$f(x)=\int_a^b \sum_i f_i(x)\,\boldsymbol{f}_i^*(x')f(x')dx' \qquad ④$$

$$\sum_i f_i(x)\,\boldsymbol{f}_i^*(x')=\boldsymbol{d}(x-x') \quad (\sum_i \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i^*=1) \qquad ⑤$$

$$\int_a^b \boldsymbol{d}(x-x')f(x')dx'=f(x) \qquad ⑥$$

今、簡単な例として（手抜きだが、、、）

$f(x)=C_1\boldsymbol{f}_1+C_2\boldsymbol{f}_2$ とすると

$$\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^b\left(C_1^2\boldsymbol{f}_1^2+C_2^2\boldsymbol{f}_2^2+C_1C_2\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2+C_2C_1\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_1\right)dx$$

$$=C_1^2+C_2^2=1 \quad \text{・・完全性③の焼き直し} \qquad ⑦$$

そこで（3. 11）式に立ち戻ると

$$\boldsymbol{p}_k(t)\equiv\sum_{r=1}^{3}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)}(t)=\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})p_k^{(1)}(t)+\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})p_k^{(2)}(t)+\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})p_k^{(3)}(t) \qquad (3.\ 11)$$

右辺の各項の係数 $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ はベクトルであるから、これをそれぞれ 3成分（x, y, z）に分解すると

$$\boldsymbol{p}_k(t)=\begin{pmatrix} e_1^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(1)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} p_k^{(1)}+\begin{pmatrix} e_1^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(2)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} p_k^{(2)}+\begin{pmatrix} e_1^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(3)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} p_k^{(3)}$$

と書けます。従って、⑦より完全性条件として

$$\begin{pmatrix} e_1^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(1)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(1)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(1)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_1^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(2)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(2)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(2)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_1^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(3)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_2^{(3)}(\boldsymbol{k}) \\ e_3^{(3)}(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}=1$$

となって、これをまとめると（3. 13b）がでてくることになります。

【余禄】

Fourie変換で Ñ ® ik となることを見てみる。$G(\boldsymbol{x},t)$ の3次元 Fourie変換を次のように定義します。

$$\widehat{G}(\boldsymbol{k},t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(\boldsymbol{x},\ t)\,exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \qquad ①$$

さて、Ñ$G(\boldsymbol{x},t)$ をFourie 変換すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ñ}G(\boldsymbol{x},\ t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \qquad ②$$

となります。$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ は内積の定義より$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=k_1\ x_1+k_2\ x_2+\ k_3\ x_3$ となるから、その x 成分は

$$\int \frac{\partial G}{\partial x}exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial G}{\partial x}exp\{-i\left(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3\right)\}d\boldsymbol{x} \qquad ③$$

と書ける。まず x_1 について部分積分を行なうと、③式は

$$③=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left[Gexp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-ik_1\right)Gexp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,dx_1\right)dx_2dx_3 \qquad ④$$

ここで③の右辺第1項は0となる（$\because e^{\pm ik_1x_1}=0\ :x_1=\pm\ \infty$）。従って

$$③\ =ik_1\int_{-\infty}^{+\infty}Gexp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,dx_1 \qquad ⑤$$

$x_2,\ x_3$ 成分についても同様な計算を行なうと ②式は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\nabla G(\boldsymbol{x},\ t)\,exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=i\boldsymbol{k}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\boldsymbol{x},\ t)\,exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=i\boldsymbol{k}\,\widehat{G}(\boldsymbol{k},t) \qquad ⑥$$

つまりFourie変換で

$G(\boldsymbol{x},t)\rightarrow\widehat{G}(\boldsymbol{k},t)$, Ñ$G(\boldsymbol{x},t)\rightarrow i\boldsymbol{k}\,\widehat{G}(\boldsymbol{k},t)$

となるから、Ñ のFourie変換は Ñ $\rightarrow i\boldsymbol{k}$ と書けるという次第。

余禄ついでにFourie変換の性質をリストアップしておく。これはhttp://boat.zero.ad.jp/~ zbe89326/math.htm からのパクリ（^^;）。

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)exp(-ikx)dx \quad \cdot\cdot\cdot f(x)\text{から}F(k)\text{へのFourie変換}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)exp(ikx)dk \quad \cdot\cdot\cdot F(k)\text{から}f(x)\text{へのFourie逆変換}$$

$f(x)$ のFourie変換が $F(k)$ であることを$f(x)\leftrightarrow F(k)$で表すと

● $f(x)$ の微分の変換 $\quad \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)\leftrightarrow(ik)^nF(k)$ ⑦

● $f(x)$ の積分の変換 $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\leftrightarrow\frac{1}{ik}F(k)$ ⑧

●相似性 $\quad f(ax)\leftrightarrow\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{k}{a}\right)$ ⑨

● k の移動 $\quad exp(iax)f(x)\leftrightarrow F(k-a)$ ⑩

● x の移動 $\quad f(x-a)\leftrightarrow exp(-iak)F(k)$ ⑪

● $F(k)$ の微分の逆変換 $\quad (-ix)^nf(x)\leftrightarrow\dfrac{d}{dk^n}F(k)$ ⑫

●畳み込みの定理 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2p}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(i)g(x-i)d\,i\leftrightarrow F(k)G(k)$ ⑬

ついでのついでに

$$d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{\sqrt{V}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp(i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'))d\boldsymbol{k} \qquad ⑭$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\partial_i d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=ik_i d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad ⑮$$

長い余禄になってしまった。これで余禄終わり。

以上の余禄は次ぎの関係を引き出す時に活用できる。

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}e_i^{(r)}(\boldsymbol{k})e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})exp\, i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{d_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right\}exp\, i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$=\left\{d_{ij}-\frac{\partial_i\partial_j}{\tilde{N}^2}\right\}d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (3.13c)$$

(3.11)、(3.12)をそれぞれ(3.8)、(3.9)に代入すると、まず電場の方は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1}^{3}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (3.14)$$

これを縦、横成分にバラシテ書くと

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})p_k^{(3)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (3.15a)$$

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (3.15b)$$

となり、磁場の方は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{i}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})q_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (3.16)$$

となります。ところで電場や磁場は実数(物理量)であるから$-\boldsymbol{k}$の成分に対しても同じように成り立たねばならない(行きと戻りの対称性とでもいいましょうか)。ここでそれぞれの場合のFourie係数の関係を調べる分けですが、話しを分かりやすくするためFourie係数をC_k(複素数)とおいて$\boldsymbol{E}=\sum C_k exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$と書くことにします。するとその共役複素数をとると

$$\boldsymbol{E}^*=\sum C_k^* exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

となります。電場は実数ですから$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^*$。これから$C_k^*=C_{-k}$という関係がでてきます。

さて、係数を元に戻すして、係数間の関係式を求めると、(3.15a)の電場の縦成分の場合は複素係数ベクトルの向きが逆方向となるので

$$p_k^{(3)*}=-p_{-k}^{(3)} \qquad (3.17b)$$

(3.15b)の横型成分の場合は

$$p_k^{(r)*}=p_{-k}^{(r)} \quad (r=1,2) \qquad (3.17a)$$

磁場の場合も同様にして

$$q_k^{(r)*}=q_{-k}^{(r)} \quad (r=1,2) \qquad (3.18)$$

となります。

この章の冒頭でFourier係数は一般座標として扱い得るということを言いましたが、ディメンジョンを調べてみると、詳しいことをテキストを参照していただくとして

$$\left[p_k^{(r)} \right] = M^{\frac{1}{2}} L T^{-1} \tag{3.22}$$

となって、これはエネルギーの平方根に次元となっています。また

$$\left[q_k^{(r)} \right] = M^{\frac{1}{2}} L \tag{3.23}$$

となり、いずれにしても双方とも**力学的なディメンジョン**を持っていることになります。通常の力学で運動量×位置のディメンジョンは角運動量ですね。（3.22）と（3.23）の積は

$$\left[p_k^{(r)} q_k^{(r)} \right] = M L^2 T^{-1} \tag{3.22}$$

となり、まさに角運動量のディメンジョンとなっています！

○エピローグ

以上で第4章の§4をおわります。Ｆｏｕｒｉｅｒ変換の導入により縦型・横型の意味が鮮明になりました。しかしまぁ、規格直交関数系といい、完全性の条件といい、はっきりいってずっと昔に勉強した、今ではぼんやりと記憶のかなたに潜んでいたものを引きずりだしながらの勉強でした（^^;；結構しんどかった。

-- おつかれさま～　Coffee Break ♪ ∂∇f x y d z c r