＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第３章　電磁場の力線と調和振動子
§５ Fourie 係数とMaxwellの方程式

2003．05．25 by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Coulombの法則は

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{e_0} r(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.20}$$

と書かれる。$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) p_k^{(3)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

であるから、（1．20）に代入すると、

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} i\boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) p_k^{(3)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} i|\boldsymbol{k}| p_k^{(3)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

$$= \frac{r(\boldsymbol{x}, t)}{e_0}$$

$$\therefore \quad r(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} i e_0 |\boldsymbol{k}| p_k^{(3)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ①$$

①をFourie逆変換すると、Coulombの法則は

$$i e_0 |\boldsymbol{k}| p_k^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{e_0}{V}} \int_V r(\boldsymbol{x}, t) exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$$\therefore \quad |\boldsymbol{k}| p_k^{(3)}(t) = -\frac{i}{\sqrt{e_0 V}} \int_V r(\boldsymbol{x}, t) exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{3.24}$$

となります。

Faradayの電磁誘導の法則（1．21）は次式で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.21}$$

電場横成分と磁場のFourie変換はそれぞれ下式となる。

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) p_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3.15b}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{i}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) q_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3.16}$$

(1. 21) をFourie変換すると $\tilde{\mathbf{N}} \rightarrow i\boldsymbol{k}$ となることに留意して

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) p_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ③$$

となる。次ぎに右辺は

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) \dot{q}_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ④$$

これからFaradayの電磁誘導の法則は

$$p_k^{(r)}(t) = \dot{q}_k(t) \qquad (r=1,2) \qquad (3.\ 25)$$

とまぁ非常にシンプルな式となった。次ぎに、 (1. 22) 式を料理する。

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = m_0 \left\{ \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) + e_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \right\} \qquad (1.\ 22)$$

ここで $\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t)$ をFourie変換を考えておく。

$$\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) x_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑤$$

これのFourie逆変換は

$$x_k^{(r)}(t) = \sqrt{\frac{e_0}{V}} \int_V \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{x} \qquad ⑥$$

(1. 22) の左辺のFourie変換は

$$\tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = i\boldsymbol{k} \times \frac{-i}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) q_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}^2 q_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑦$$

となる (ここで ベクトル公式 $a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c$ を使った)。

(1. 22) の右辺第2項は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}} \frac{1}{c^2} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) \dot{p}_k^{(r)}(t) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑧$$

となる。以上を (1. 22) に入れると

$$-\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k}^2 q_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})=m_0\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})x_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$
$$+\frac{1}{c^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\dot{p}_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑨$$

これを整理して

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\left\{\dot{p}_k^{(r)}(t)+c^2\boldsymbol{k}^2q_k^{(r)}(t)\right\}exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$
$$=-\frac{1}{e_0}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})x_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑩$$

$$\therefore\ \dot{p}_k^{(r)}(t)+c^2\boldsymbol{k}^2q_k^{(r)}(t)=-\frac{1}{e_0}x_k^{(r)}(t)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\int_V \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t})d\boldsymbol{x}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{t})d\boldsymbol{x} \qquad (3.\ 26)$$
$$(r=1,2)$$

式の展開ばかり続いて大変うんざりしたが、(3.26)には注目していただきたい！！(3.25)の関係式を使うと

$$\ddot{q}_k(t)+c^2\boldsymbol{k}^2q_k(t)=Q(\boldsymbol{k}) \qquad ⑪$$

と書けて、これは横型電流によって強制振動を受けている、角振動数 $w_k=c|\boldsymbol{k}|$ をもった調和振動子の方程式である。つまり、**電磁場は横型電流によって強制された調和振動子の集まりである**、ということができる。

磁場のFourier係数 q_k は調和振動子の一般化座標となった。電場のFourier係数 p_k は (3.25) より一般化運動量として定義できる。§4の冒頭に述べた「電磁場を空間変数について Fourier変換してみる。こうすると、先の話しになるが、実はFourier変換の係数が解析力学でいう一般化座標として取り扱えることなり、従ってLagrangianやHamiltonianの理論が電磁場にも応用できるようになる。これは電磁場を量子論的に取り扱う準備ともなるわけです。」ということがこれで明らかになったでしょう。

ついでに、電荷、電流の保存則 $\tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)+\dot{r}(\boldsymbol{x},t)=0$ を調べておくと

$$\tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=\frac{i\boldsymbol{k}}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r=1,2}\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})x_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑫$$

①より

$$\dot{r}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0V}}\sum_{\boldsymbol{k}}ie_0|\boldsymbol{k}|\dot{p}_k^{(3)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑬$$

連続の式

$$i\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{\sum_{r=1,2}x_k^{(r)}(t)+e_0|\boldsymbol{k}|\dot{p}_k^{(3)}(t)\right\}exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})=0 \qquad ⑭$$

を得る。

【蛇足】

調和振動子の式⑪を見ると座標 $\boldsymbol{x}$ が全然入っていないことに気を付ける必要がある。これは調和振動子をうんぬんするかぎり、それが空間のどこに散らばっているのだろうか、などということを問題にしては**いかん！**、ということを意味します。この調和振動子は空間のどこにあるというものではなく、考えている立方体の全体にわたって、一様に存在する、いわば全空間的なものなのです。Fourie変換論の構造を考えると、例えば電場をFourie変換すると、空間に依存する電場が、波数ベクトルの和で与えられますね。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{p}_k(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \quad ⑮$$

これにFourie逆変換すると

$$\boldsymbol{p}_k(t)=\sqrt{\frac{e_0}{V}}\int_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)exp(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad ⑯$$

となり、こんどは空間積分がでてきます。調和振動子の一般化座標 $\boldsymbol{p}_k(t)$ は、いろいろな場所の電場を寄せ集めたものとなります。つまり、定まった波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を正確に指定したときは、波の位置は完全に分からなくなる。これは波に対する不確定性関係の現われである。なにやら量子力学の「不確定性関係」を彷彿とさせるものであるが、古典論では波数と位置ベクトルの不確定性は場を問題にする限りでてきます。純古典的な波動性には、上のFourie変換の構造でみたように、**波の位置と波数の間**には次ぎの不確定性関係が存在することが導かれます（←この導出は機会を見てTryしようとおもっています。今のところ天下り的。）

$$D\boldsymbol{x}\,D\boldsymbol{k}\sim 1 \quad ⑰$$

不確定性の関係は量子力学の専売特許ではないのかと思われるムキも多いと思いますが、量子力学のそれは、実は波動性からの結論だったのです。 普通、量子力学の不確定原理の一般的説明関係は、光を用いて量子を観測する場合、光子が量子の状態をかく乱してしまうため、量子の位置と運動量に不可避的な不確定性が生ずる」とされていますね。これは、Heisenbergの思考実験で知られているように歴史的な説明で、かつ表面的な説明なのです。つまり、難しく言うと、「不確定性原理は、本質的には量子の2種類の物理的属性がお互いに共役関係にある2種類の直交関数で表されることと、その関数の間にFourie展開の不確定原理が成り立つことに由来している。従って、観測によるかく乱の原理が適用できない場合でも、不確定性原理は成立しているし、量子力学の根本原理といわれる理由がここにもある」←『”我楽田頓陳館”より引用させていただきました（http://homepage1.nifty.com/snap/index.html)。

くどいがもう少し続けます。古典力学では運動量と位置は同時に正確に測ることができることがわかっていました。運動量 $\boldsymbol{p}$ を持った粒子が波数 $\boldsymbol{k}$ を持った **波** に対応するものとし

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k} \quad ⑱$$

とおくと、ことは重大となってくる。というのは、式⑰と⑱より

$$D\boldsymbol{x}\,D\boldsymbol{p}\sim\hbar \quad ⑲$$

となり、古典的力学像で考えられる粒子の“**位置**”と“**運動量**”の間に⑲のような制限がでてきますから、ことは深刻になりました。

さて、調和振動子の数は幾つあるか、波数 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ の間に何個あるか・・・・この計算はテキストP113の”§７ 光量子のモードの数”の項に載っていますのでそこを参照してください。

○エピローグ

以上で第４章の§５をおわります。計算がゴテゴテと続き、何をしているのか途中わからなくなりそうでしたが、この§でいいたかったのは、電磁場は無限個の調和振動子で充満しているということと電場、磁場のＦourie係数が調和振動子の一般化座標となっているということですね。

-- おつかれさま～　CoffeeBreak♪∂∇*f x y d z c r p*