＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第３章　電磁場の力線と調和振動子

§６　調和振動子による電磁場のエネルギーと慣性

03．05．29 by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

§6. 調和振動子による電磁場のエネルギーと慣性

電磁場のエネルギー（2．11a）を調和振動子の座標で書いてみましょう。すると何がでてくるか楽しみである。（2．11a）を全空間にわたって積分したものを

$$\begin{aligned}
H^{(\mathrm{em})} &= \frac{1}{2}e_0\int_V \boldsymbol{E}^2(x)d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\int_V \boldsymbol{B}^2(x)d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}e_0\int_V \left(\boldsymbol{E}_T + \boldsymbol{E}_L\right)^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\int_V \boldsymbol{B}^2(x)d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{2}\int_V \left\{e_0\boldsymbol{E}_T^2 + \frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}e_0\int_V \boldsymbol{E}_L^2 d\boldsymbol{x} \\
&= H_{\mathrm{rad}} + H_{coul}
\end{aligned} \tag{3．28}$$

とおく。ここで $\int_V \boldsymbol{E}_T\cdot\boldsymbol{E}_L d\boldsymbol{x} = 0$（直交）を使った。また、$\int_V d\boldsymbol{x} = \int_V d^3x$ ですね。また、エネルギーは実数ですから $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*$ 等であることに注意しましょう。

さて、これから（3．28）の計算を進める分けだが、念のため計算に使うエレメントを記しておく

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})p_k^{(3)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．15a}$$

$$\boldsymbol{E}_L^*(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})p_k^{(3)*}(t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．15a'}$$

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．15b}$$

$$\boldsymbol{E}_T^*(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{1}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \sum_{r=1,2} \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})p_k^{(r)*}(t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．15b'}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\ t) = -\frac{i}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})q_k^{(r)}(t)exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．16}$$

$$\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x},\ t) = \frac{i}{\sqrt{e_0 V}}\sum_k \sum_{r=1,2} \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})q_k^{(r)*}(t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3．16'}$$

$$\frac{1}{V}\int_V exp\left\{i\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'\right)\cdot\boldsymbol{x}\right\}d\boldsymbol{x} = d_{\boldsymbol{kk}'} \tag{3．29}$$

$$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{k}) = d_{rs} \tag{3．13a}$$

以上で材料は揃った。いよいよ計算を始める。ところでいきなり真っ正直に計算するのは慣れないうちは∑∑の計算などは非常に面倒なもので、頭が錯乱する元凶となる。そこで思い切って簡略化し、計算の筋道をはっきりさせて、それからちゃんとした計算結果を導くこととしましょう（^^）;。この方が健康によい 笑い）。ここで簡略化計算に使った記号の意味はいちいち説明しないが分かるでしょう。ということで、H_{rad} の第1項目の計算を行う。尚、rad は輻射場という意味。

$$\frac{1}{2}e_0\int_V d\boldsymbol{x}\boldsymbol{E}_T^*\boldsymbol{E}_T=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{V}\int_V dx\left\{\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^1 p_{\mathbf{1}}^{1*}exp(-i\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^2 p_{\mathbf{1}}^{2*}exp(-i\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^1 p_{\mathbf{2}}^{1*}exp(-i\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^2 p_{\mathbf{2}}^{2*}exp(-i\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x})\right\}$$

$$\bullet\left\{\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^1 p_{\mathbf{1}}^1 expi\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^2 p_{\mathbf{1}}^2 expi\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^1 p_{\mathbf{2}}^1 expi\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^2 p_{\mathbf{2}}^2 expi\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x}\right\} \qquad ①$$

ここで（3．29）（3．13a）を使い、簡略計算を目で追って（←やりすぎるとろくなことないが）、チャントした計算結果を推定すると

$$\frac{1}{2}e_0\int_V d\boldsymbol{x}\boldsymbol{E}_T^*\boldsymbol{E}_T=\frac{1}{2}\left(p_{\mathbf{1}}^{1*}p_{\mathbf{1}}^1+p_{\mathbf{1}}^{2*}p_{\mathbf{1}}^2+p_{\mathbf{2}}^{1*}p_{\mathbf{2}}^1+p_{\mathbf{2}}^{2*}p_{\mathbf{2}}^2\right)\rightarrow\frac{1}{2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}p_k^{(r)*}p_k^{(r)} \qquad ②$$

となる。次に第２項目の計算に入る。

$$\frac{1}{2m_0}\int_V d\boldsymbol{x}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$$

$$=\frac{c^2}{2}\times\frac{1}{V}\int_V d\boldsymbol{x}$$

$$\left\{\mathbf{1}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^1 q_1^{1*}exp(-i\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x})+\mathbf{1}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^2 q_1^{2*}exp(-i\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x})+\mathbf{2}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^1 q_2^{1*}exp(-i\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^2 q_2^{2*}exp(-i\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x})\right\}$$

$$\bullet\left\{\mathbf{1}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^1 q_1^1 expi\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x}+\mathbf{1}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}}^2 q_1^2 expi\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\times\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^1 q_2^1 expi\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}^2 q_2^2 expi\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{x}\right\} \qquad ③$$

ここでベクトル公式$[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_k^{(r)}]\cdot[\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{e}_{k'}^{(s)}]=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{e}_k^{(r)}\cdot\boldsymbol{e}_{k'}^{(s)})-(\boldsymbol{e}_k^{(r)}\cdot\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{e}_{k'}^{(s)}\cdot\boldsymbol{k})$ に注意して上式を整理し、チャントした計算結果を推定すると

$$\frac{1}{2m_0}\int_V d\boldsymbol{x}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}c^2\boldsymbol{k}^2\left(q_1^{1*}q_1^1+q_1^{2*}q_1^2+q_2^{1*}q_2^1+q_2^{2*}q_2^2\right)® \frac{1}{2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}w_k^2 q_k^{(r)*}q_k^{(r)} \qquad ④$$

となる。但し、$w_k^2=c^2\boldsymbol{k}^2$ 。以上のことから

$$H_{rad}=\frac{1}{2}\int_V\left\{e_0\boldsymbol{E}_T^2+\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}d\boldsymbol{x}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(p_k^{(r)*}(t)p_k^{(r)}(t)+w_k^2 q_k^{(r)*}(t)q_k^{(r)}(t)\right) \qquad (3.30a)$$

となる。このHamiltonian（電磁場のエネルギー）はまさに**調和振動子のHamiltonian**ではないか！

ここから粒子像のイメージがでてくるが、詳細は後回しとしょう。
次ぎに (3. 28) の第2項の計算に入る。例によって簡略計算からチャントした結果を推定することとする。

$$\frac{1}{2}e_0\int_V d\boldsymbol{x}\boldsymbol{E}_L^*\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{2}\frac{1}{V}\int_V d\boldsymbol{x}\left\{\boldsymbol{e_1^3}p_1^{3*}exp(-i\,1\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e_2^3}p_2^{3*}exp(-i\,2\cdot\boldsymbol{x})\right\}$$

$$\bullet\left\{\boldsymbol{e_1^3}p_1^3 exp(i\,1\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e_2^3}p_2^3 exp(i\,2\cdot\boldsymbol{x})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(p_1^{3*}p_1^3+p_2^{3*}p_2^3\right)$$

$$\to\frac{1}{2}\sum_k p_k^{(3)*}p_k^{(3)} \qquad ⑤$$

従って

$$H_{coul}=\frac{1}{2}\sum_k p_k^{(3)*}(t)p_k^{(3)}(t) \qquad ⑥$$

ところで (3. 24) のCou bmbの法則より

$$p_k^{(3)}(t)=-\frac{1}{|\boldsymbol{k}|}\frac{i}{\sqrt{e_0V}}\int_V d\boldsymbol{x}\,r(\boldsymbol{x},t)exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑦$$

がでてくる。これを⑥式の H_{coul} に代入すると、$\frac{1}{V}\sum_k\to\frac{1}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{k}\quad(V\to\infty)$ の関係を使って

$$H_{coul}=\frac{1}{2}\frac{1}{e_0V}\sum_k\int_V d\boldsymbol{x}\int_V d\boldsymbol{x}'\,r(\boldsymbol{x},t)\,r(\boldsymbol{x}',t)\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{e_0}\frac{1}{(2p)^3}\int_V d\boldsymbol{x}\int_V d\boldsymbol{x}'\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{k}r(\boldsymbol{x},t)\,r(\boldsymbol{x}',t)\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] \qquad ⑧$$

となる。付録 (A. 8. 6) の $\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}=\frac{4p}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\boldsymbol{k}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\ exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right]$ の関係を使うと⑧式は

$$H_{coul}=\frac{1}{2}\sum_k p_k^{(3)*}(t)p_k^{(3)}(t)$$

$$=\frac{1}{8pe_0}\int_V d\boldsymbol{x}\int_V d\boldsymbol{x}'\frac{r(\boldsymbol{x},t)\,r(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad (3.\ 30b)$$

となる。従って電磁場のエネルギーは

$$H^{(em)}=\frac{1}{2}\sum_{r=1,2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(p_k^{(r)*}(t)p_k^{(r)}(t)+w_k^2q_k^{(r)*}(t)q_k^{(r)}(t)\right)+\frac{1}{8pe_0}\int_V d\boldsymbol{x}\int_V d\boldsymbol{x}'\frac{r(\boldsymbol{x},t)\,r(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

となり、電荷がない場合は調和振動子のエネルギーだけになる。

次ぎに慣性（2．16a）を全空間にわたって積分したものを一般化座標で書くとどうなるかを計算する。[余談：これは電磁場の運動量の密度（Poyntingベクトル：Poytingは人の名前）で、その流れはMaxwellの応力テンソルということになる]。

$$G = \int_V dx \left\{ e_0 E(x) \times B(x) \right\}$$

$$= -\frac{i}{V} \int_V dx \left\{ \sum_k \sum_{r=1}^{3} e^{(r)}(k) p_k^{(r)}(t) exp(ik\cdot x) \times \sum_k \sum_{r=1,2} k \times e^{(r)}(k) q_k^{(r)}(t) exp(ik\cdot x) \right\} \quad ⑨$$

磁場 B は実数であることから $B=B^*$、つまり

$$-i \sum_k \sum_{r=1,2} k \times e^{(r)}(k) q_k^{(r)}(t) exp(ik\cdot x) = i \sum_k \sum_{r=1,2} k \times e^{(r)}(k) q_k^{(r)*}(t) exp(-ik\cdot x) \quad ⑩$$

の関係を使って⑨式は

$$G = \frac{1}{V} \int_V dx \left\{ \sum_k \sum_{r=1}^{3} e^{(r)}(k) p_k^{(r)}(t) exp(ik\cdot x) \times \sum_k \sum_{r=1,2} k \times e^{(r)}(k) q_k^{(r)*}(t) exp(-ik\cdot x) \right\} \quad ⑪$$

となる。ベクトル公式 $e_k^{(r)} \times (k' \times e_{k'}^{(s)}) = k'(e_k^{(r)} \cdot e_{k'}^{(s)}) - e_{k'}^{(s)}(k' \cdot e_k^{(r)})$ と（3．13a）と（3．29）を使うとベクトル公式で残ってくる項は $e_k^{(r)} \times (k' \times e_{k'}^{(s)})$ ® $k(e_k^{(r)} \cdot e_k^{(r)}) = k$ $(r=1,2)$ だけになる。この結果を使うと（もう面倒だから簡略計算もあらわに書かない（^^；；））①式は

$$G = i \sum_{r=1,2} \sum_k k \left\{ p_k^{(r)}(t) q_k^{(r)*}(t) \right\} \quad (3.31)$$

となる。（3．31）を見ると運動量密度であるの虚数 i が付いている。なんだこれはということになるが、それは（3．16）まで遡らなければならぬ。まぁ、係数 p_k に押しこめばいいのかも知れぬが、これ以上の話しは第５章輻射場のところまで待たねばならぬ。これで§６はおわり。疲れた！！

--------------------------------------- おつかれさま～ CoffeeBreak ♪ ∂∇ f x y d z c r p q