＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第３章　電磁場の力線と調和振動子
§７まとめ
03．06．15 by KENZOU

(03．06．18（3.39b)導出追加）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

§７．まとめ

基本的変数として、横型電場$\boldsymbol{E}_T(x)$とCoubmbゲージ（$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$）のベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}_T(x)$および縦型の電場$\boldsymbol{E}_L(x)$をとる。　横型電場とベクトルポテンシャルとの関係は

$$\dot{\boldsymbol{A}}_T(x)=-\boldsymbol{E}_T(x) \tag{3.32}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_T(x)=-c^2\nabla^2\boldsymbol{A}_T(x)-\frac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{J}_T(x) \tag{3.33}$$

で結ばれており、縦型電場はスカラーポテンシャルA_0によって

$$\boldsymbol{E}_L(x)=-\nabla A_0(x) \tag{3.34a}$$

という形に書かれる。付録（A．６．６b）よりスカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned}A_0(x)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}',t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}',t)+const\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}',t)+const\end{aligned} \tag{3.34b}$$

で与えられる。

【注】記号xと$\boldsymbol{x}$を使い分けているが、$(\boldsymbol{x},t)\to x$と解釈されたい。面倒だからxで位置と時間を表している。

[注釈]

$$\boldsymbol{E}(x)=-\dot{\boldsymbol{A}}(x)-\nabla A_0(x)$$

$$\boldsymbol{E}_T+\boldsymbol{E}_L=-\dot{\boldsymbol{A}}_T-\left(\dot{\boldsymbol{A}}_L+\nabla A_0(x)\right)\to\boldsymbol{E}_T=-\dot{\boldsymbol{A}}_T,\ \boldsymbol{E}_L=-\left(\dot{\boldsymbol{A}}_L+\nabla A_0(x)\right)$$

$$\text{Coulomb ゲージ}\Rightarrow\dot{\boldsymbol{A}}_T=-\boldsymbol{E}_T,\ \boldsymbol{E}_L=-\nabla A_0(x)$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}=c^2\nabla\times\boldsymbol{B}-c^2\mu_0\boldsymbol{J}=c^2\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{A}_T\right)-c^2\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$=c^2\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_T\right)-c^2\nabla^2\boldsymbol{A}_T-c^2\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_T=-c^2\nabla^2\boldsymbol{A}_T-(1/\epsilon_0)\boldsymbol{J}_T$$

（3．32）（3．33）より

$$c^2\nabla^2\boldsymbol{A}_T(x)-\ddot{\boldsymbol{A}}_T(x)=-\frac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{J}_T(x) \qquad ①$$

これを整理して（2．44b）の波動方程式が得られる。

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_T(x)=-\mu_0\boldsymbol{J}_T(x) \qquad ②$$

これらの方程式から、全電場と磁場は、与えられた電荷と電流に対してベクトルポテンシャルと縦型、横型の

電場が決まると次式で与えられることになる。

$$\boldsymbol{B}(x)=\tilde{N}\times A_T(x) \tag{3. 37}$$

$$\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}_T+\boldsymbol{E}_L=\boldsymbol{E}_T-\frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'\tilde{N}\frac{r(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3. 38}$$

縦型電場を別にすると（3. 32）（3. 33）は未知数の数と方程式の数は一致する、すなわち6個の未知数（$\boldsymbol{A}_T$ or $\boldsymbol{E}_T$, $\boldsymbol{J}_T$ 各3個×2）に対する6個の方程式となるから扱いやすくなる。そこでこれらの量で電磁場の全エネルギー（3. 28）を書くと

$$H_{rad}=\frac{1}{2}\int d^3x\left\{e_0\boldsymbol{E}_T^2(x)+\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\left\{e_0\boldsymbol{E}_T^2(x)+\frac{1}{m_0}\left(\tilde{N}\times A_T(x)\right)\cdot\left(\tilde{N}\times A_T(x)\right)\right\} \tag{3. 39a}$$

$$=\frac{1}{2}\int d^3x\left\{e_0\boldsymbol{E}_T^2(x)+\frac{1}{m_0}\partial_i A_{T\,i}(x)\partial_j A_{T\,j}(x)\right\} \tag{3. 39b}$$

$$H_{coul}=\frac{1}{8pe_0}\int d^3x\int d^3x'\frac{r(\boldsymbol{x},t)\ r(\boldsymbol{x}',t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{3. 40}$$

となる。（3. 39a）→（3. 39b）への変形は、部分積分とGaussの定理を使えばでるが、以下にその計算プロセスを詳述します（←結構苦労した）。

《計算》
はじめる前に道具の準備をしておく

●ベクトル解析の公式

$$\tilde{N}\times\tilde{N}\times\boldsymbol{A}=\tilde{N}(\tilde{N}\cdot\boldsymbol{A})-\tilde{N}^2\boldsymbol{A} \tag{1}$$

$$\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}=\tilde{N}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\bullet\tilde{N}\times\boldsymbol{C} \tag{2}$$

(2)の $\boldsymbol{C}$ に $\tilde{N}\times\boldsymbol{A}$ を代入すると

$$\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\bullet\tilde{N}\times\boldsymbol{A}=\tilde{N}(\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\bullet\tilde{N}\times\tilde{N}\times\boldsymbol{A} \tag{3}$$

●Gaussの定理

$$\int_V\tilde{N}\bullet\boldsymbol{F}\,dV=\int_{\partial S}\boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{S} \tag{4}$$

ここで**空洞表面（湧き出し・吸い込みがない）**の積分は周期的境界条件により**0**となることに注意。

●Coulomb Gaugeの条件

$$\tilde{N}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5}$$

以上で計算の道具が揃った。計算を進める。

$$\int_V d^3x\left(\tilde{N}\times A_T(x)\right)\cdot\left(\tilde{N}\times A_T(x)\right)=\int_V d^3x\left(\tilde{N}(\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\bullet\tilde{N}\times\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\right)$$

$$=\int_{\partial S}d\boldsymbol{S}(\tilde{N}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})+\int_V d^3x(\boldsymbol{A}\bullet\tilde{N}\times\tilde{N}\times\boldsymbol{A})=\int_V d^3x\boldsymbol{A}\cdot\left(\tilde{N}(\tilde{N}\cdot\boldsymbol{A})-\tilde{N}^2\boldsymbol{A}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_V d^3x\boldsymbol{A}\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}^{\,2}\boldsymbol{A} = -\,[\boldsymbol{A}\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A}]_{-\infty}^{+\infty} + \int_V d^3x\tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{A} \\
&= \int_V d^3x\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z\right) \\
&= \int_V d^3x\partial_i A_i\partial_j A_j
\end{aligned}
$$

となって、(3. 39b) が得られる。全慣性 (2. 16a) は

$$
\boldsymbol{G}=\int d^3x\,\boldsymbol{J}^{(elm)}(x)=\boldsymbol{e}_0\int d^3x\left\{\boldsymbol{E}_T(x)\times\left(\tilde{\boldsymbol{N}}\times A_T(x)\right)\right\} \tag{3. 41a}
$$

と書くことが出来る。この計算をさらに進めるにあたって次ぎのベクトル解析の公式を使う。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_T\times\left(\tilde{\boldsymbol{N}}\times\boldsymbol{A}_T\right)&=\left(\boldsymbol{E}_T\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}_T}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\boldsymbol{E}_T\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}_T}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\boldsymbol{E}_T\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}_T}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}-\left(\boldsymbol{E}_T\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}\right)\boldsymbol{A}_T \\
&=\left(E_{Tx}\frac{\partial A_{Tx}}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\cdots-\left\{\left(E_{Tx}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{A}_T+\left(E_{Ty}\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{A}_T+\left(E_{Tz}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{A}_T\right\} \\
&=E_{Tj}\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}A_{Tj}-\partial_j\boldsymbol{A}_T\cdot E_{Tj}
\end{aligned}
$$

ここで、2行目から3行目はEinsteinの規約(同じ足は足し算する)を使った。すると(3. 41a)は

$$
\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_0\int d^3x\left(E_{Tj}(x)\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}A_{Tj}(x)-\partial_j\boldsymbol{A}_T(x)\cdot E_{Tj}(x)\right) \tag{①}
$$

となる。次ぎに①の第2項目を計算する。くどいようだが、詳細にやってみよう。

$$
\boldsymbol{e}_0\int d^3x\left(\partial_j\boldsymbol{A}_T(x)\cdot E_{Tj}(x)\right)=\boldsymbol{e}_0\int d^3x\left(\partial_x\boldsymbol{A}_T\cdot E_{Tx}+\partial_y\boldsymbol{A}_T\cdot E_{Ty}+\partial_z\boldsymbol{A}_T\cdot E_{Tz}\right) \tag{②}
$$

まず、x 成分を抜き出して計算する。部分積分を使うと

$$
\boldsymbol{e}_0\iiint dxdydz\,\partial_x\boldsymbol{A}_T\cdot E_{Tx}=\boldsymbol{e}_0\iint dydz\left\{\left[\boldsymbol{A}_T E_{Tx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int dx\boldsymbol{A}_T\frac{\partial}{\partial x}E_{Tx}\right\} \tag{③}
$$

となる。③の第1項はそれぞれ無限遠の彼方で0となるから(本当かな?間違っていたらごめんなさい)残るのは第2項だけとなる。そこで同様にy, z 成分を計算して②式を見ると

$$
\begin{aligned}
②&=-\boldsymbol{e}_0\iiint dxdydz\left[\boldsymbol{A}_T\left(\frac{\partial}{\partial x}E_{Tx}+\frac{\partial}{\partial y}E_{Ty}+\frac{\partial}{\partial z}E_{Tz}+\right)\right] \\
&=-\boldsymbol{e}_0\iiint dxdydz\left[\boldsymbol{A}_T\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_T\right)\right] \\
&=0 \quad (\because \text{横波の条件より} \left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_T\right)=0)
\end{aligned}
$$

となって、結局①式は

$$\boldsymbol{G}=e_0\int d^3x E_{Tj}(x)\cdot\nabla A_{Tj}(x) \qquad (3.41b)$$

となる。ところで$\boldsymbol{G}$ というヤツは **慣性の流れ**」というもので、遡れば荷電粒子の質量密度の流れ

$$\boldsymbol{J}^{(p)}(x,t)=m\dot{\boldsymbol{x}}(t)\delta(x-x(t)) \qquad (2.4b)$$

にいき着きます。これを運動量の流れと言えないことは第２章§４で指摘した通りですが、ここでは余り堅いことを言わずに、（3．41b）を運動量の流れと考えると、テキストの蛇足に書かれているように、量子力学で運動量を $\boldsymbol{p}\rightarrow\frac{\hbar}{i}\nabla$ と書かれるこの ∇ が（3．41b）に現れているではないか、ということで感激するということになります。尤も、小生は遺憾ながら計算ばかりに気を取られっぱなしで、この感激はちっとも味わっていませんが（^^）;;

蛇足】 ・・・（以下の議論は第 2章§７の蛇足の項を再録しました）。

Lorentz Gaugeの場でベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分を縦成分と横成分に分けると

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_T+\boldsymbol{A}_L \qquad (2.52)$$

となる。電場の横成分と縦成分を $\boldsymbol{A}$ と A_0 で表してみるとなにがでてくるか？

電場の横成分と縦成分は

$$\boldsymbol{E}=E_T+E_L=-(\dot{\boldsymbol{A}}_T+\dot{\boldsymbol{A}}_L)-\nabla A_0 \quad \text{より}$$

$$\boldsymbol{E}_T=-\dot{\boldsymbol{A}}_T\ ,\quad \boldsymbol{E}_L=-\dot{\boldsymbol{A}}_L-\nabla A_0 \qquad (2.53)$$

と書ける。一方、磁場の方はいつでも横成分であるから

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}_T \qquad (2.54)$$

ところで

$$\nabla(\nabla\bullet\boldsymbol{A})=(\nabla\bullet\nabla)\boldsymbol{A}-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

であるから、$\boldsymbol{A}$ の縦成分 $(\nabla\times\boldsymbol{A}_L=0)$ は形式的に

$$\boldsymbol{A}_L=\frac{1}{\nabla^2}\nabla(\nabla\bullet\boldsymbol{A}) \qquad (2.55a)$$

と書ける。ここでLorentz条件 $(\nabla\bullet\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\dot{A}_0=0)$ を使うと

$$\boldsymbol{A}_L=-\frac{1}{c^2\nabla^2}\nabla\dot{A}_0 \qquad (2.55b)$$

これを（2．53）に代入すると、**スカラーポテンシャル A_0 の波動方程式（2．37）**を使って

$$\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{c^2\nabla^2}\nabla\ddot{A}_0-\nabla A_0=\frac{1}{\nabla^2}\nabla\left\{\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla^2\right\}A_0=\frac{1}{e_0}\frac{1}{\nabla^2}\nabla\rho \qquad (2.56)$$

これはCoulombの法則（1．24）に他ならない。つまり$\boldsymbol{E}_L$ は電荷によって作られるCoulomb場ということになる。

○エピローグ

以上で第３章の§７をおわります。ただただ式を追っているという感が免れないが、ここは我慢のしどころ、と殊勝な気持ちで取り組んでいる。再度このテキストを読みなおす機会があれば、少なくとも式の計算に煩わされずに物理的意味を吟味しながら読むことができると思う、、、という期待を期待して。

いずれにしてもこれで第３章の全章を終えることができました。次ぎの第４章は大きな山場です、、、ナンか山場ばかりのような気もしますが、、、まぁ、兎も角、前進・後退を繰りかえしながらボツボツいくか。

-- おつかれさま～　Coffee Break ♪ ∂∇f x y d z c r p q t