

=====

第4章 特別の場合  
 § 1 - 2 はじめに  
 03.07.21by KENZOU

=====

<http://hb3.seikyuu.ne.jp/home/E-Yama/>

§ 1 はじめに  
 (略)

§ 2 磁場のない世界  
 Maxwellの方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{r}(x) \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) = 0 \tag{4.2}$$

$$0 = \mathbf{J}(x) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial t} \tag{4.3}$$

となって、電場は縦型だけとなる。(4.1)と(4.3)から電荷と電流の間の連続の方程式を要求するだけとなる。(4.3)は縦型の電場の時間変化で、これは(1.28)でみたように電流の縦成分と消し合う。

(4.1)を積分形になおすと

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla f(x) \tag{4.4a}$$

ただし

$$f(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) \tag{4.4b}$$

(4.4)を(4.3)に代入すると

$$\mathbf{J}(x) \equiv \mathbf{J}_T(x) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{x}', t) \tag{4.4c}$$

が得られるが、これは縦型電流の形である。

(例1)原点における点電荷の場合

$$\mathbf{r}(x) = Q\mathbf{d}(x) \tag{4.5}$$

(4.4a)から

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \mathbf{d}(x') \nabla \frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \quad \left( \text{ここで公式} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(x) \mathbf{F}(x) dx = \mathbf{F}(0) \text{ を使った。} \right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

これはCoulomb場ですね。

(例2)半径 a の球内で一様な密度を持った電荷による場

半径  $a$  の球に含まれる電荷を  $Q$  とすると球の体積が  $\frac{4}{3}\pi a^3$  であるから電荷密度は

$$\rho(x) = \frac{3Q}{4\pi a^3} q(a-r) \quad (4.7)$$

となる。ここで  $q(x)$  は Heaviside の階段関数

$$\begin{aligned} q(x) &= 0 \quad (x < 0) \\ &= 1 \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (4.7a)$$

である。電荷分布は球対称であるから電場は動径方向の成分しかなく、原点からの距離のみの関数となる。  
(4.1) に Gauss の発散定理を使って

$$\int_{\partial V} dS \cdot \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(r) = \frac{3Q}{4\pi a^3 \epsilon_0} \int_V d^3x q(a-r) \quad (4.8)$$

まず、 $a$  より小さい半径の球を考えると、含まれる電荷は  $r \times \frac{4}{3}\pi r^3$  であるから

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{3Q}{4\pi a^3 \epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{a^3 \epsilon_0} r^3 \quad (r < a) \quad (4.9)$$

$$\therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3} \quad (4.10)$$

次に  $a$  より大きい半径の球を考えると、

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (r > a) \quad (4.11a)$$

$$\therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (4.11b)$$

(4.10) と (4.11) をいっしょに、方向まで考慮すると

$$\mathbf{E}(x) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{r} \left\{ \frac{r}{a^3} q(a-r) + \frac{1}{r^2} q(r-a) \right\} \quad (4.12)$$

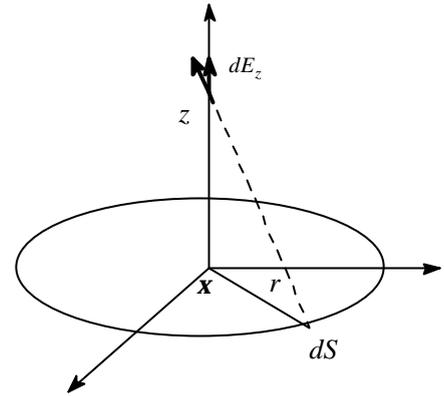
球対称電荷分布のつくる電場は観測点より内側にある全電荷が中心に集中したときにつくるクーロン電場と同じである。

< 別解 > 付録 (A.8.9) を使う

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(r) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(r') \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left\{ 4\pi \left[ \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty dr' r' \rho(r') \end{aligned}$$

ここまで。これ以上の計算はまた別の機会にやることにする (^); ;

(例3)  $x$ - $y$ 平面状に電荷が一様分布した場  
 面密度を  $S$  とし、平面上に  $x$  $y$  軸、それに垂直に  $z$  軸をとる。  
 平面状の位置を平面極座標  $r, \theta$  で表わすと面要素  $r dr d\theta$   
 に含まれる電荷は  $S r dr d\theta$  であるが、 $\mathbf{x}$  での電荷と  $\mathbf{x} + \mathbf{p}$   
 での電荷の作る電場の平面に平行な成分は大きさが同じで向  
 きが逆になり互いに打ち消し合うから、 $dE_z$  のみを積分すれ  
 ばよい。



$$E_z(\mathbf{x}) = \frac{S}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\theta \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{S}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \tag{4.15}$$

$S$  が正ならば、 $z > 0$  では正の方向、 $z < 0$  では負の方向を向いている。  
 もし  $z < 0$  が金属で埋められていて電場が入れないようになっていると

$$E_z(\mathbf{x}) = \frac{S}{\epsilon_0} \mathbf{q}(z) \tag{4.16}$$

となる。

(例4) 原点辺りに局在した電荷  $\rho(\mathbf{x})$  から遠いところにある電場  
 電荷分布が原点のまわりに球対称になっている場合は例2で見た。電荷分布が球対称でない場合は、一般に  
 (4.4b)の積分を解析的にやるのは困難である。このような場合には、近似的方法を用いて、球対称でない電  
 荷分布による静電場を物理的に見通しのよいかたちに表現すること  
 にする。つまり、電荷分布の形が球対称でなくとも、十分遠方ではそ  
 れは球対称電荷分布をしている場合と同じ結果(点電荷が原点のある  
 場合と同じ結果)を与えるはずであり、原点に近づくにつれて電荷  
 分布の球対称性からのずれが明確になってくる。こういう近似を多  
 重極近似と呼んでいる。多重極近似では、静電場は点電荷、双極子、  
 四重極子等による電場の重ね合わせとして表現されることになる。

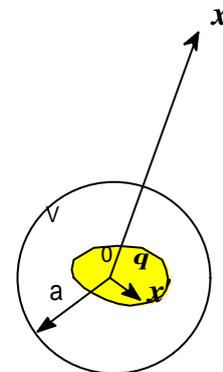


図1. 多重極展開

$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$  を  $(r'/r)$  のべき級数に展開すると

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\mathbf{q}) \tag{4.17a}$$

と書かれる。ただし、 $|\mathbf{x}| \equiv r > |\mathbf{x}'| \equiv r'$ 。展開係数  $P_l(\cos\mathbf{q})$  を Legendre の多項式という  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$   
 の間の角で、 $\cos\mathbf{q} = x$  書くと

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \tag{4.17b}$$

となる。(4.17a)は

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') + \frac{1}{2r^4} (3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2) + \dots \right\} \quad (4.17c)$$

電位ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{r}(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ \int_V d^3x' \mathbf{r}(\mathbf{x}') + \frac{1}{r^2} \left( \mathbf{x} \cdot \int_V d^3x' \mathbf{x}' \mathbf{r}(\mathbf{x}') \right) + A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ただし、

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{3}{2r^4} \int_V d^3x' \left\{ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2 \right\} \mathbf{r}(\mathbf{x}') \quad (4.19a)$$

である。

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 = \left( \sum_i x_i x'_i \right)^2 = \sum_{i,j} x_i x_j x'_i x'_j, \quad \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2 = \sum_i x_i^2 x'^2 = \mathbf{d}_{ij} x_i x_j \mathbf{x}'^2$$

と書けるから (4.19a) は

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{3}{2r^4} x_i x_j \int_V d^3x' \left( x'_i x'_j - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{x}'^2 \right) \mathbf{r}(\mathbf{x}') \quad (4.19b)$$

となる。全電荷  $Q$  を

$$Q \equiv \int_V d^3x \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (4.20)$$

電気双極子能率を

$$P_i \equiv \int_V d^3x x_i \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.20a)$$

電気四極子能率を

$$Q_{ij} \equiv \int_V d^3x \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{x}^2 \right) \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.20b)$$

で定義すると (4.18) は

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ Q + \frac{1}{r} n_i P_i + \frac{3}{2r^2} n_i n_j Q_{ij} + \dots \right\} \quad (4.21)$$

となる。ここで  $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$  で

$$n_i \equiv \frac{x_i}{r} \quad (i=1,2,3) \quad (4.22)$$

は、 $x$  方向の単位ベクトル成分である。

(4.21)式の右辺第1項は(4.17a)の  $l = 0$ の項で、きわめて遠方では全電荷が原点に集中したように見えることを物語っている。次ぎに  $l = 1$  の項は電気双極子モーメントである。 $l = 2$  の項は電気四重極子モーメントである。ここで注意しなければならないのは(4.21)の右辺が大きいものの順に並んでいるのではないということ。例えば

$$\mathbf{r}(x) = e\mathbf{d}(x - 1/2a) - e\mathbf{d}(x + 1/2a) \quad (4.23)$$

のように、正と負の電荷がずれて存在すると、デルタ関数の定義  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\mathbf{d}(x-a) = f(a)$  を使って

$$Q = \int_V d^3x \mathbf{r}(x) = e \int_V d^3x \{ \mathbf{d}(x - 1/2a) - \mathbf{d}(x + 1/2a) \} = 0 \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x x \mathbf{r}(x) = e \int_V d^3x x \{ \mathbf{d}(x - 1/2a) - \mathbf{d}(x + 1/2a) \} = e\mathbf{a} \quad (4.24b)$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int_V d^3x \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} x^2 \right) \mathbf{r}(x) \\ &= e \int_V d^3x \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} x^2 \right) (\mathbf{d}(x - 1/2a) - \mathbf{d}(x + 1/2a)) = 0 \end{aligned} \quad (4.24c)$$

となり、電気双極子能率しか残らないことになる。このほか、第3項の電気四重極子モーメントしか残らないような電荷分布もある。高次の項に進に従って、細かい電荷の分布の構造が効いてくることになる。

ところで、(4.20b)で定義される電気双極子能率や電気四重極子能率は、座標原点の選び方に依らない本当の意味でのベクトル、テンソル量ではないことに注意しよう。

図1の原点0の位置を位置ベクトル  $\mathbf{a}$  だけ移動したとすると、位置ベクトル  $\mathbf{x}'$  は新しい原点から見たときの位置ベクトル  $\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \mathbf{a}$  となる。

< 電気双極子能率 >

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_V d^3x' \mathbf{x}' \mathbf{r}(x') = \int_V d^3y' \mathbf{y}' \mathbf{r}(y' + \mathbf{a}) + \mathbf{a} \int_V d^3y' \mathbf{r}(y' + \mathbf{a}) \\ &= \int_V d^3y' \mathbf{y}' \bar{\mathbf{r}}(y') + \mathbf{a} \int_V d^3y' \bar{\mathbf{r}}(y') \\ &= \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{a}Q \end{aligned}$$

ここで  $\bar{\mathbf{r}}(y') = \mathbf{r}(y' + \mathbf{a})$  とおいた。

の結果より、電気双極子能率は原点の選び方によって異なる値を持つことになり、ベクトル量としての意味を

持たないことになる。但し、もし全電荷  $Q$  がゼロならば電気双極子能率は原点の取り方に依らない。

より電気双極子能率の時間微分は、全電荷  $Q$  の時間微分は0であるから、原点座標の選び方に依らずベクトル量としての意味を持つ。

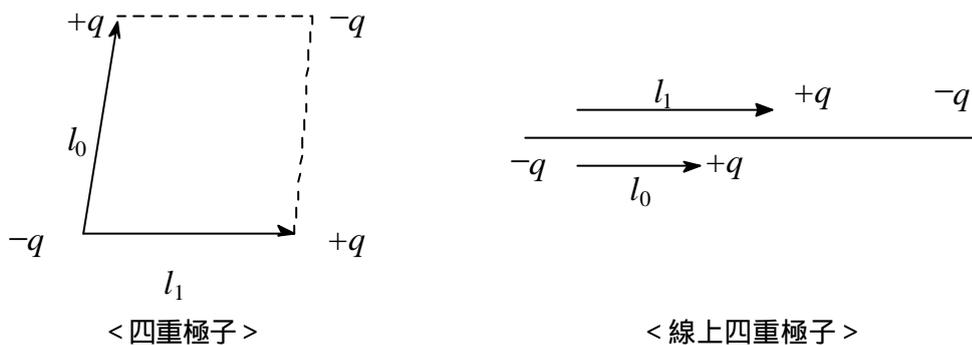
$$\dot{P} = \overline{\dot{P}}$$

### 【Coffeeブレイク】

原点のまわりに球対称でない電荷分布がある場合、原点からはるかに遠いところの電場は、それらの電荷が原点に局在した点電荷と考えて計算できますが、だんだんと原点に近づくにつれて球対称からのズレが次第に顔をだしてくるのですね。まず顔をだすのが電気双極子で、こいつは  $1/r$  で効いてくる。さらに近づくとき電気四重極子が顔をだす。  $1/r^2$  で効いてくる。さらに近づくとき電気八重極子が、、、遠くで見えていたら可愛い顔をしていたが、近づけば近づくほどその顔のゆがみがはっきりと、、、誰しも経験のあることだろう。ああ！物理はなんとうまいことでできていか、という取りとめのない感想を抱いた。最も、相手の顔に特長があれば、電気双極子がでてこなかったりするが、、、

このように、電荷分布から離れた点での静電場は多重極子 ( $Q^l$  重極子) による電界に重ね合わせの形に表すことができる。これを、多重極展開の定理という名前で呼んでいる。

ところで、ここででてきた電気四重極子とは、電荷がどんな配置をしているのかというと



となっているんですね。八重極子は丁度立体のコーナにプラスマイナスの電荷が配置されていることになります (ご想像あれ)。ところで、上に書いた絵は+と-がペア-になっている。多重極展開で多極子が顔をだすと言っても、もともとの電荷は同一チャージの電荷でなかったか。この点臍に落ちないと思う向きもあると思います。小生もそう思いましたが、電荷の分布が非対称で、偏りがあるために、その偏りの効果が多極子として顔をだすのだとうと考えています。まあ、このあたりはじっくり勉強したいところであるが、とにかく先を急ぐことにする。

### エピソード

第3章を終わり第4章着手まで大分時間の隙間ができた。やっとこのところやる気が起こったので、第4章の §2まで進むことができた。これからなかなか骨の折れるような内容が続きそう。。。

----- おつかれさま ~ Coffee Break  $\nabla f x y d z c r p q t w$