＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第４章 特 別 の 場 合

§３ 電場のない世界

03. 08. 17　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

http://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/

§３．電場のない世界

Maxwellの方程式

$$\rho(x) = 0 \tag{4. 25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x) = 0 \tag{4. 26}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x) = \mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{4. 27}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x) = 0 \tag{4. 28}$$

（4. 27）より電流はこの場合必ず横型で

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) = 0 \tag{4. 29}$$

を満たすものでなければならない。

＜Biot-Savartの式＞

（4. 27）を積分形に直す。このため両辺に「∇×」を作用させ、公式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$ より

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(x) = -\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}(x) \tag{4. 30a}$$

これはPoissonの方程式で特解は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4. 30b}$$

となる。これはBiot-Savartの式で、磁場は電流の要素からの距離の2乗に逆比例して弱くなることを示している。（4. 30b）の形から、**縦型の電流は磁場を生まない**ことが明らかである。

（4. 28）から、磁場$\boldsymbol{B}(x)$はベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(x)$を用いて $\boldsymbol{B}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}(x)$ と書けることを第2章§6で示した。今の場合ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(x)$は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4. 31}$$

となる。展開式

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{r^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')+\frac{1}{2r^4}\left(3(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2-\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{x}'^2\right)+\cdots\right\} \tag{A11. 3}$$

を使い、ベクトルポテンシャルを電場の場合と同じように

$$\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}_0(x) + \boldsymbol{A}_1(x) + \cdots \tag{4. 32}$$

と展開する。最初の数項を調べてみる。テキストには「細かい計算は省く」と書かれているので、以下に細かい計算のフォローをしておく。

$\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$ とすると

<1> $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x})$ を求める

$$div'\left(x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\right) = [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')]_x + x'\, div'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \qquad ①$$

であり、この両辺を積分すると

$$\int_V d^3x'\, div'[x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')] = \int_V d^3x'\, [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')]_x + \int_V d^3x'[x'\, div'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')] \qquad ②$$

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')$ の分布は空間の有限領域にのみ限られていることから(←無限の遠方では電流の湧き出しがないということか)

$$\int_V d^3x'\, div'[x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')] = \int_{\partial S} dS'\, x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = 0 \qquad ③$$

よって②より

$$\int_V d^3x'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'))_x = -\int_V d^3x'[x'\, div'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')] \qquad ④$$

ところで(4.29)より $div'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = 0$ であるから、④の右辺は消える。従って

$$\int_V d^3x'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'))_x = 0 \qquad ⑤$$

以上の結果から

$$\boldsymbol{A}_0(x) = \frac{m_0}{4p}\frac{1}{r}\int_V d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') = 0 \qquad (4.33a)$$

これは、§2でやった静電場における点電荷に相当するものが0であるということを意味する。(←詰まり、磁荷というものがないよという間接的な主張かな?)

<2> $\boldsymbol{A}_1(x)$ を求める

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{m_0}{4p}\frac{1}{r^3}\int_V d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑥$$

と書ける。ここでベクトル解析の公式 $[\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')]\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x})$ を使うと

$$\int_V d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) - \int_v d^3x'\,\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}) = \int_v d^3x'[\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')]\times\boldsymbol{x} \qquad ⑦$$

一方、

$$div'\langle x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\rangle = x'(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x})div'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'))_x + x'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}) \quad ⑧$$

において、体積積分をとると、⑧の左辺は表面積分に直すことができて消える。右辺は第１項が消えるから

$$\int_v d^3x\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) + \int_V d^3x\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}) = 0 \quad ⑨$$

⑦と⑨より

$$\int_V d^3x\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\int_v d^3x'[\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')]\times\boldsymbol{x} \quad ⑩$$

が得られる。そこで

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\int_v d^3x'[\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')] \quad (4.\ 34)$$

と置くと、

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int_V d^3x'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{x}}{r^3} \quad (4.\ 33b)$$

となる。(4. 34) で定義したベクトル $\boldsymbol{M}$ を磁気双極子能率と呼ぶ。この量$\boldsymbol{M}$ は、座標の原点の取り方によらないベクトル量となる。[以上の計算は砂川重信著 理論電磁気学」紀伊国屋書店 を参照した]

テキストによれば、ここで重要な演習問題をやらねばならないこととなっている。展開式 (4. 21) の右辺

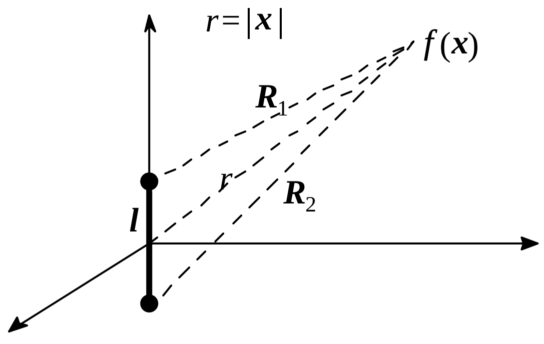
$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{Q + \frac{1}{r}n_iP_i + \frac{3}{2r^2}n_in_jQ_{ij} + \cdots\right\} \quad (4.\ 21)$$

第2項から電場を計算し、また、(4. 33b) から磁場を計算し、両者を比較しろという訳である。これば電気双極子能率による電場と磁気双極子能率による磁場を比較しろということです。今、簡単のためにそれぞれ一つの電気（磁気）双極子モーメントが作る電場、磁場を計算し、それを比較することとする。

＜電気双極子能率による電場の計算＞

(4. 21) の第2項より

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{P}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$



これより電場を計算する。

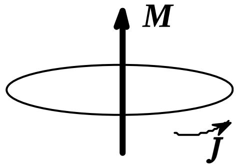
ここで微分公式

$$\partial_i \partial_{\mathrm{j}} \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{d_{ij}}{r^3} - \frac{4}{3} p d_{ij} d(\boldsymbol{x}) \qquad ⑪$$

を使うと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\tilde{\mathbf{N}} f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4pe_0} \boldsymbol{P} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \left\langle \tilde{\mathbf{N}} \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{4pe_0} \left\langle 3 \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{xx}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{P}}{r^3} \right\rangle - \frac{1}{3e_0} \boldsymbol{P} d(\boldsymbol{x}) \qquad ⑫$$

となる。



＜磁気双極子能率による磁場の計算＞

(4．33b) より

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{m_0}{4p} \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{x}}{r^3}$$

これは微分公式 $\frac{\boldsymbol{x}}{r^3} = -\tilde{\mathbf{N}} \frac{1}{r}$ を使って

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{m_0}{4p} \boldsymbol{M} \times \tilde{\mathbf{N}} \frac{1}{r} = \frac{m_0}{4p} \tilde{\mathbf{N}} \times \frac{\boldsymbol{M}}{r}$$

と書くことができる。これから磁場を計算すると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{m_0}{4p} \tilde{\mathbf{N}} \times \left\langle \tilde{\mathbf{N}} \times \frac{\boldsymbol{M}}{r} \right\rangle = \frac{m_0}{4p} \tilde{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \frac{\boldsymbol{M}}{r} - \frac{m_0}{4p} \nabla^2 \frac{\boldsymbol{M}}{r} \qquad ⑬$$

ここで右辺第1項に⑪、第2項にデルタ関数の公式

$$d(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4p} \tilde{\mathbf{N}} \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{r^3} = -\frac{1}{4p} \nabla^2 \frac{1}{r}$$

を使うと

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{m_0}{4p} \left\langle 3 \frac{\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{xx}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{M}}{r^3} \right\rangle + \frac{2m_0}{3} \boldsymbol{M} d(\boldsymbol{x}) \qquad ⑭$$

となる。

さて、デルタ関数の部分を無視すると、磁気双極子モーメントの作る磁場において、

$$m_0 \boldsymbol{M} \text{ ® } \frac{1}{e_0} \boldsymbol{P} \qquad (4．35)$$

という置き換えをすると丁度 $\boldsymbol{E}$ とまったく同じになる。このことは一体何を意味するのか？

＜考察＞

磁場が電場と同様スカラー関数で表わすことができそうだということが考えられる。確かに電流密度のない場所では $\tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{B} = 0$ であるから $\boldsymbol{B}$ はスカラー関数の勾配で書くことができるが、しかしそうすると $\tilde{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が成り立たない。磁気モノポールはディラックが言い出したが、未だに発見されていない。したがって、$\boldsymbol{B}$ はいかなる場合にも $\tilde{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ となる基本的な量でなければならない。となると、一体これはどういうことか？

天下り的だが、任意の定常電流密度は

$$\boldsymbol{J} = \tilde{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{M} \qquad ⑮$$

と書くことができる。ここで補助場 $\boldsymbol{H}$ を

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{m_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \qquad ⑯$$

を定義すると、アンペールの法則 $\tilde{N} \times \boldsymbol{B} - m_0 \boldsymbol{J} = 0$ から

$$\begin{aligned} \tilde{N} \times \boldsymbol{H} &= \frac{1}{m_0}\tilde{N} \times \boldsymbol{B} - \tilde{N} \times \boldsymbol{M} \\ &= \frac{1}{m_0}\tilde{N} \times \left(\boldsymbol{B} - m_0 \boldsymbol{M} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad ⑰$$

となる。これは補助場 $\boldsymbol{H}$ が電流ではなく電荷に対応する磁荷の作る場であることを表わしている！
補助場 $\boldsymbol{H}$ はスカラー関数 f_m を使って

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{m_0}\tilde{N} f_m \qquad ⑱$$

のように書ける。歴史的にはこの f_m をグリーンは磁位 磁気ポテンシャル）と呼んだ。また、W. トムソンは $\boldsymbol{B}$ を 電磁気的に定義した磁気力」、$\boldsymbol{H}$ を 極によって定義した磁気力」と呼んだ。しかし、いずれも歴史的な用語である。$\boldsymbol{B}$ を磁場と呼び、補助的な量 $\boldsymbol{H}$ には名前を付けない方がよい。$\boldsymbol{B}$ を磁束密度、$\boldsymbol{H}$ を磁場の強さと呼ぶのは主客が逆転している 太田浩一著 電磁気学Ｉ」丸善物理学基礎コース）。
こうして、磁気双極子モーメントのつくる磁場は磁位

$$f_m = \frac{m_0}{4p}\frac{\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}}{r^3} \qquad ⑲$$

によって表わされ、$\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4p}\left(3\frac{\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{M}}{r^3} \right) - \frac{1}{3}\boldsymbol{M} d(\boldsymbol{x}) \qquad ⑳$$

になる。

例題１～３は省略し、以上で第４章§３は終わることとする。

○エピローグ
第４章§３を終わる。ここのところ電磁気学再入門に立ち向かう気力が大分衰えてきた。MathNoteで原稿を書くのだが、計算は紙の上でなくて主にMathNote上でやっており、これが結構手間がかかるということもある。例題は、これにこだわるとなかなか先に進みそうにないので飛ばすことにした 笑い）。

補助場Hの導入はこの章の一つの目玉じゃないかなぁと思う。詳しいことを知りたいムキは記載のテキストを参照されたい。

------------------------------------ おつかれさま～ *CoffeeBreak* ♪ ∂∇ f x y d z c r p q t w D