＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第４章 特 別 の 場 合

§４ 静的な世界

03.08.30　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

http://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/

§４．静的な世界

Ｍaxwellの方程式から時間微分をすべて無視すると静的な世界が広がる。つまり、電場も磁場も時間に依存しない世界となる。Ｍaxwellの方程式はしたがって

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{e_0}r(x) \tag{4.45}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x)=0\left[=-\frac{\partial B(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right] \tag{4.46}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x)=m_0\boldsymbol{J}(x)\left[=m_0\left\{\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)+e_0\frac{\partial\boldsymbol{E}_T(x,t)}{\partial t}\right\}\right] \tag{4.47}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0 \tag{4.48}$$

となる（赤字の部分がない）。電流は（4．47）より、必ず横型となり、$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x)=0$ を満たすものとなる。

＜電場を計算する＞

第２章§６（P38）より $\boldsymbol{E}(x)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x)-\nabla A_0$ となるが、今の場合、時間変動の部分を除くとスカラーポテンシャル A_0 を使って $\boldsymbol{E}(x)=-\nabla A_0$ と書かれる。（４．４５）をスカラーポテンシャルを使って書きかえると

$$\nabla^2A_0(x)=DA_0(x)=-\frac{1}{e_0}r(x) \qquad ①$$

となる。そこで①を解くことになるが、そのためにＧreen関数を使うと便利である。

$$DG(x)=-d^3(x) \qquad ②$$

という方程式を考える。この方程式は、右辺を $-\frac{1}{e_0}e_0 d^3(x)$ として ① と比較すると、点電荷 $e_0 d^3(x)$ が原点にあるとき、その電荷の作る静電ポテンシャル $G(x)$ を求めるということを意味している。もし、この $G(x)$ が求められると、スカラーポテンシャル $A_0(x)$ は、

$$A_0(x)=\frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'G(x-x')r(x') \qquad ③$$

と書かれることになる。というのは、③に両辺に D をかけ、②を使うと

$$DA_0=\frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'DG(x-x')r(x')=-\frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3x'd^3(x)r(x')=-\frac{1}{e_0}r(x) \qquad ④$$

となり、確かに①を満たすから、③は方程式①の特解となっているから。

さて、これから②を解いていくわけだが、$G(x)$ を $Fourie$ 積分で書いておくのが常套手段となっている。

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k G(\boldsymbol{k}) exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑤$$

δ関数の *Fourie* 積分は

$$d(x) = \frac{1}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\, exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑥$$

⑤、⑥を②に代入し、係数を比較すると

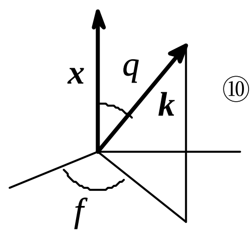
$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\left[-\boldsymbol{k}^2G(\boldsymbol{k})\right]exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k\, exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑦$$

$$-\boldsymbol{k}^2G(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{(2p)^3} \qquad ⑧$$

⑧を⑤に代入して

$$G(x) = \frac{1}{(2p)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad ⑨$$

が得られる。⑨の積分を実行するにあたって、極座標を取る。この辺も常套手段。
$x = |\boldsymbol{x}|$ として



$$G(x) = \frac{1}{(2p)^3}\int_0^{+\infty} dk k^2 \int_0^{p} dq\, sinq \frac{1}{k^2} exp(ikxcosq) \int_0^{2p} df \qquad ⑩$$

ここで、$cosq = t$，$-sinq\, dq = dt$ と変数置換すると

$$G(x) = \frac{2p}{(2p)^3}\int_0^{+\infty} dk \int_{-1}^{1} dt\, exp(ikxt) = \frac{1}{(2p)^2}\int_0^{+\infty} dk \frac{2isinkx}{ikx}$$

$$= \frac{2}{(2p)^2}\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} dy \frac{siny}{y} = \frac{1}{4p}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \qquad ⑪$$

が得られる。ここで $y = kx$ と積分の公式 $\int_0^{\infty} dx \frac{sinx}{x} = \frac{p}{2}$ を使った。この結果を③に代入して

$$A_0(x) = \frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} r(x') \qquad ⑫$$

が得られる。求める電場は

$$\boldsymbol{E}(x) = -\nabla A_0(x) = -\frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} r(x') \qquad (4.\ 49)$$

＜磁場を計算する＞

(4. 46) を積分形に直す。このため両辺に「$\nabla\times$」を作用させ、公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B}$ より

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(x) = -m_0\nabla\times\boldsymbol{J}(x) \qquad ⑬$$

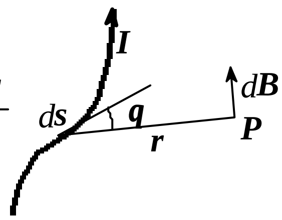
あとは電場の計算で行なったやり方とまったく同様に計算を進めると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{m_0}{4p}\int_V d^3x'\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{4. 50}$$

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$$

が得られる。これは何度もでてきたBiot-Savartの式で、磁場は電流の要素からの距離の２乗に逆比例して弱くなることを示している。くどいようだが、(4. 50) の形から、**縦型の電流は磁場を生まない** ことがハッキリわかる。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{J}}{4p}\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^3} = \frac{\boldsymbol{J}}{4p}\frac{ds\,\sin q}{r^2}$$



＜静的な世界での電磁場のエネルギーを計算する＞

電場のエネルギーを X^{elec} とすると、テキストに載っている公式を使って

$$\begin{aligned}
X^{\mathrm{elec}} &= \frac{1}{2}e_0\boldsymbol{E}^2(x) = \frac{1}{2}e_0\left(-\frac{1}{4pe_0}\right)^2\int_V d^3x'\int_V d^3x''\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}r(x')r(x'') \\
&= -\frac{1}{2}e_0\left(-\frac{1}{4pe_0}\right)^2\int_V d^3x'\int_V d^3x''\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}r(x')r(x'') \\
&= \frac{1}{2}e_0\left(-\frac{1}{4pe_0}\right)^2 4p\int_v d^3x\int_V dx''\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}r(x)r(x'') \\
&= \frac{1}{8pe_0}\int_V d^3x\int_v d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}r(x)r(x')
\end{aligned} \tag{4. 51}$$

次ぎに磁場のエネルギーを H^{mag} とすると

$$H^{mag} = \frac{1}{2}\frac{1}{m_0}\boldsymbol{B}^2(x) = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{m_0}{4p}\right)^2\int_V d^3x'd^3x''\left\{\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\right\}\left\{\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'')\right\} \tag{⑭}$$

ベクトル解析の公式より

$$\begin{aligned}
\left\{\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\right\}\left\{\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'')\right\} &= \left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}\right)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'') \\
&\quad -\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'')\right)\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}'')\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}\right)
\end{aligned} \tag{⑮}$$

⑮を⑭に代入し、積分を計算すると 途中の計算は省略)、結局⑮の右辺の第１項だけが残ることになる。すると H^{mag} の⑭式は電場の計算と同じ計算が実行できて

$$H^{mag} = \frac{m_0}{8p}\int_V d^3x\int_v d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{⑯}$$

結局、電磁場のエネルギーは全体で

$$
\begin{aligned}
E_{static} = & \frac{1}{8pe_0}\int_V d^3x \int_v d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} r(x) r(x') \\
& + \frac{m_0}{8p}\int_V d^3x \int_v d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')
\end{aligned}
\qquad (4.\ 53)
$$

となる。

○エピローグ

第４章§４を終わる。式の変形を追うばかりでなく、物理的内容を少しづつでも吟味しながら楽しく進めていかないと息切れしてくる。とはいってもこのテキストだけで物理的内容の十分な吟味は難しいだろう。兎に角、このテキストを終了して、別のテキストで武者修業するなり、いろいろ知識を広げてから再びこのテキストに戻って再吟味をしていけばいいだろう、、、

------------------------------------ おつかれさま～ CoffeeBreak ♪ ∂∇ *f x y d z c r p q t w D X*