＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

第４章 特 別 の 場 合

§５　電荷と電流の分布と場

03.09.07　by KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

http://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/

§５．電荷と電流の分布と場

時間に依存する電荷や電流から場を決める問題は結局のところ次ぎの３通りとなる。

⑴ 電磁場に対する方程式

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{e_0}\tilde{N}\, r\ (x) + m_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(x) \qquad (2.\ 21)$$

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{B}(x) = -\ m_0\, \tilde{N} \times \boldsymbol{J}(x) \qquad (2.\ 22)$$

⑵ 強制された調和振動子の式

$$\ddot{q}_k(t) + c^2\boldsymbol{k}^2 q_k(t) = Q(\boldsymbol{k}) \qquad (3.\ 26)$$

⑶ ベクトルとスカラーポテンシャルから場を求める

以下、３番目のやり方をやってみる。

Lorentz ゲージを採用するとベクトルポテンシャルは

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x) = -\frac{1}{e_0}\, r\,(x) \qquad (2.\ 37a)$$

$$\left[\tilde{N}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) = -m_0\, \boldsymbol{J}(x) \qquad (2.\ 37b)$$

$$c = \tilde{N}\bullet \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0 = 0 \qquad (2.\ 38)$$

で決まる。場は

$$\boldsymbol{B}(x) \equiv \nabla\times\boldsymbol{A}(x) \qquad (2.\ 28)$$

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) \qquad (2.\ 30)$$

で与えられる。
さて、(2.37) を積分する。こいつは波動方程式のグリーン関数でおなじみのヤツである。

【寄り道】

《3次元非同次波動方程式を解く》

$$\left[\tilde{N}^{2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x) = -\frac{1}{e_0}r(x) \qquad ①$$

①の主要解を $G_0(\mathbf{x}, t)$ とすると主要解は次ぎの方程式

$$\left[\tilde{N}^{2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -d(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d(t-t') \qquad ②$$

の解で、遅延条件

$$G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0 \qquad (t < t') \qquad ③$$

および無限遠における条件

$$\lim_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\to\infty} G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 0 \qquad ④$$

を満たす関数であると定義される。尚、*Green* 関数 $G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は時空点 $\mathbf{x}', t'$ における作用が伝播し時空 $\mathbf{x}, t$ における場の量に影響を与える、ということです。この関数は遅延伝播関数とも呼ばれます。因果律により時刻 t におけるある現象を生み出す原因はつねに t より前の時刻における現象であると考えるのですね（←当たり前か）。

方程式①の解は主要解を用いて

$$A_0(x) = A_0^0(x) + \frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x}'dt G_0(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')r(x') \qquad ⑤$$

と得られる。

寄り道を参考にして *Green* 関数

$$D_{(adv)}^{(ret)}(x-x') = \frac{1}{4p}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right) \qquad (4.\ 60)$$

を利用すると（遅延Green関数／遅延伝播関数を使う）

$$A_0(x) = A_0^0(x) + \frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' D^{(ret)}(x-x')r(x') \quad \{(x') \equiv (\mathbf{x}', t)\text{に留意}\} \qquad (4.\ 61a)$$

時間積分を先にやると

$$A_0(x) = A_0^0(x) + \frac{1}{e_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' \left\{\frac{1}{4p}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)\right\}r(x')$$

$$= A_0^0(x) + \frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{r\left(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \qquad (4.\ 61b)$$

ここで δ関数の $\int_V d^3y d(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$ なる性質を使った。

同様にベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(x) = A^{(0)}(x) + m_0\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x' D^{(ret)}(x-x')\boldsymbol{J}(x') \qquad (4.\ 62a)$$

$$= A^{(0)}(x) + \frac{m_0}{4p}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{\boldsymbol{J}\left(\mathbf{x}',\ t-\frac{1}{c}\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \qquad (4.\ 62b)$$

となる。

今求めたベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ は遅延ポテンシャルと呼ばれている。その意味は、例えば空間点 $\mathbf{x}$ ’を時刻 t' に発した電磁的な信号は光速度で伝播し、観測点 $\mathbf{x}$ において時刻 t で信号を受け取るということを表わしている。

$$t = t' + \frac{1}{c}\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$$

つまり、受信時刻 t は発射時刻 t' より遅れるということ。この点が遅延ポテンシャルの名前の由来となっている。

(4. 61) (4. 62) の右辺第 1項は

$$\Box A_0^{(0)}(x) \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0^{(0)}(x) = 0 \qquad (4.\ 63)$$

$$\Box \boldsymbol{A}^{(0)}(x) \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}^{(0)}(x) = 0 \qquad (4.\ 64)$$

を満たす任意の解で、初期条件から決める。ただし、今は *Lorentz* ゲージを使っているから

$$\tilde{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{A}^{(0)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A^{(0)} = 0 \qquad (4.\ 65)$$

という条件を付け加えておかねばならない。

上で求めたスカラーとベクトルポテンシャル（電磁遅延ポテンシャルとも総称される）が *Lorentz* 条件を満たすことを確かめておく。これには次ぎの微分公式を使うと便利である。

$$y = \frac{1}{4p}\int dV' \frac{[f]}{R}, \quad \text{ただし}\ [f] \equiv f\left(\mathbf{x}',\ t-\frac{R}{c}\right)$$ とすると（これをLorentzの記法という）

●微分演算公式： $\tilde{\mathbf{N}}'[y] = [\tilde{\mathbf{N}}'y] - \frac{1}{c}\tilde{\mathbf{N}}'R\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]$

簡単のために各ポテンシャルの第１項を省略すると

$$A_0 = \frac{1}{4pe_0}\int d^3x' \frac{r\left(\mathbf{x}',\ t-\frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{4pe_0}\int d^3x' \frac{[r]}{R}, \quad \text{ただし}[r] \equiv r\left(\mathbf{x}',\ t-\frac{R}{c}\right)$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{\boldsymbol{J}\left(\mathbf{x}',\ t-\frac{1}{c}\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{1}{4pe_0}\int d^3x'\frac{[\boldsymbol{J}]}{R}$$

微分公式を使って

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\cdot[\boldsymbol{J}]-\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\right)$$

$$=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\left(-\nabla'\cdot\frac{[\boldsymbol{J}]}{R}+\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\right]\right)$$

右辺第１は表面積分に直して落とせるから

$$\tilde{\mathbf{N}}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R}\left[\frac{\partial r}{\partial t}+\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\right]=0$$

となって、*Lorentz* ゲージを満たしていることが確かめられた。

さて、テキストでは (4. 61)、(4. 62) から電場と磁場を求めているが、ここでは直接 (2. 21) (2. 22) を積分して求めることにする。**（⇒　次ぎの§６でテキスト通りの計算を行なってみることにする）**

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}=\frac{1}{e_0}\tilde{\mathbf{N}}\,r+m_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}\qquad(2.\ 21)$$

$$\left[\tilde{\mathbf{N}}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{B}=-m_0\,\tilde{\mathbf{N}}\times\boldsymbol{J}\qquad(2.\ 22)$$

(2. 21) を遅延伝播関数を使うと、その解は先に述べた *Lorentz* の記法を使って

電場は

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4pe_0}\int d^3x'\frac{1}{R}[\nabla' r]-\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\qquad⑥$$

磁場は

$$\boldsymbol{B}=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R}[\nabla'\times\boldsymbol{J}]\qquad⑦$$

となる。微分公式 $\nabla'[r]=[\nabla' r]-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]$ を使うと⑥式の第１項の積分は

$$\int d^3x'\frac{1}{R}\nabla'[r]-\int d^3x'\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2}$$

$$=\int d^3x'\nabla'\frac{[r]}{R}-\int d^3x'[r]\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\int d^3x'\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\frac{\boldsymbol{R}}{cR^2} \qquad ⑧$$

⑧式で右辺第1項は表面積分に直して落とせる。第３項の被積分関数は連続の方程式と微分公式を使って

$$\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}=[\nabla'\cdot\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}=\nabla'\cdot[\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}+\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \qquad ⑨$$

ここで次ぎの演算をやってみる

$$\nabla'\cdot\left([\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right)=\nabla'\cdot[\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}+[\boldsymbol{J}]\frac{2\boldsymbol{RR}-\boldsymbol{RR}}{R^4}=\nabla'\cdot[\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}+2[\boldsymbol{J}]\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{R^4}-\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^2} \qquad ⑩$$

⑩を⑨に入れて整理すると

$$\left[\frac{\partial r}{\partial t}\right]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}=\nabla'\cdot\left([\boldsymbol{J}]\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right)-2[\boldsymbol{J}]\cdot\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{R^4}+\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^2}+\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{cR^3} \qquad ⑪$$

⑪の右辺第１項は表面積分にして落とせるから、結局電場は

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4pe_0}\int d^3x'[r]\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{4pe_0c}\int d^3x'\left(\frac{2[\boldsymbol{J}]\cdot\boldsymbol{RR}}{R^4}-\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4pe_0c}\int d^3x'\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\cdot\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}-\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4pe_0}\int d^3x'[r]\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{1}{4pe_0c}\int d^3x'\left(\frac{2[\boldsymbol{J}]\cdot\boldsymbol{RR}}{R^4}-\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^2}\right)$$

$$+\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R^3}\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\times\boldsymbol{R}\right)\times\boldsymbol{R} \qquad ⑫$$

で与えられる ⑫への展開でベクトル解析の公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を使った)。

全く同様に磁場を計算すると

$$\boldsymbol{B}=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R}[\nabla'\times\boldsymbol{J}]=\frac{m_0}{4p}\int d^3x'\frac{1}{R}\nabla'\times[\boldsymbol{J}]+\frac{m_0}{4p\,c}\int d^3x'\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} \qquad ⑬$$

ここで $\nabla'\times\frac{[\boldsymbol{J}]}{R}=\frac{\nabla'\times[\boldsymbol{J}]}{R^2}R-\frac{[\boldsymbol{J}]\times\boldsymbol{1}}{R^2}=\frac{1}{R}\nabla'\times[\boldsymbol{J}]-\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^3}\times\boldsymbol{R}$ を使うと⑬の右辺第１項の積分は

$$\int d^3x'\frac{1}{R}\nabla'\times[\boldsymbol{J}]=\int d^3x'\nabla'\times\frac{[\boldsymbol{J}]}{R}+\int d^3x'\frac{[\boldsymbol{J}]}{R^3}\times\boldsymbol{R} \qquad ⑭$$

ここで右辺第１項は表面積分となって落とせるから、結局磁場は

$$\boldsymbol{B} = \frac{m_0}{4p}\int d^3x'[\boldsymbol{J}]\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{m_0}{4p\,c}\int d^3x'\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} \qquad ⑮$$

で与えられることになる。

○エピローグ

第４章§５を終わる。まぁ、すざまじい計算量であった。本当に疲れた（ワ～！！）。しかし、この計算は怪しいところがあるやも知れね。鵜呑みにするのは危険。機会があれば見なおしたいが、今はその気はない。早く5章に辿りつきたい。まだまだ第４章の峻険な山々が待ち構えている、、、

\- -　おつかれさま～　*CoffeeBreak* ♪ ∂∇ *f x y d z c r p q t w D X K*