

=====

第4章 特別の場合
 § 6 原点の辺りに局在する電流の作る場
 03.10.5 by KENZOU
 =====

<http://hb3.seikyoku.ne.jp/home/E-Yama/>

§ 6に入る前に § 5の電磁場の計算をテキストに従ってやってみる。

電場の計算

$\nabla f = \nabla^* f + (\nabla t) \frac{\partial f}{\partial t}$ のように考える

f^* は t を一定にした時の空間座標の微分をあらわす。

$$E = -\nabla A_0 - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad t = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

$$A_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{r(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{r(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

$$\nabla' \frac{r(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} r(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' r(\mathbf{x}', t)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' r(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' t \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\partial r}{\partial t}$$

連続の方程式より $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + (\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t=const} = 0$

この辺りの計算は大変気を使う (^_^);;

一方、 $\nabla' \cdot \mathbf{J} = (\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t=const} + (\nabla' t) \cdot \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = (\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t=const} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\nabla' \cdot \mathbf{J} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' r(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \left\{ -\nabla' \cdot \mathbf{J} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right\}$$

$$\nabla A_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left\{ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} r(\mathbf{x}', t) - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \left(\nabla' \cdot \mathbf{J} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} r(\mathbf{x}', t) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int d^3x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \boldsymbol{\mathcal{J}} \right\}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{m_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\partial}{\partial t} \frac{J(x', t)}{|x - x'|}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{J(x', t)}{|x - x'|} = \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{J(x', t)}{|x - x'|} = \frac{1}{|x - x'|} \frac{\partial}{\partial t} J$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{4\pi e_0 c^2} \int d^3x' \frac{1}{|x - x'|} \frac{\partial}{\partial t} J(x', t)$$

以上の計算より

$$\begin{aligned} E = E^0 + \frac{1}{4\pi e_0} \int d^3x' \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} r(x', t) + \frac{1}{4\pi e_0 c} \int d^3x' \frac{(x - x')}{|x - x'|^2} (\nabla' \cdot J(x', t)) \\ - \frac{1}{4\pi e_0 c^2} \int d^3x' \frac{1}{|x - x'|} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ J(x', t) - \frac{(x - x')}{|x - x'|} \left(\frac{(x - x')}{|x - x'|} J(x', t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

磁場の計算

$$B = \nabla \times A \quad \nabla \times V = \nabla^* \times V + (\nabla t) \times \frac{\partial V}{\partial t} \text{ と考える。}$$

V^* は t を一定にした時の空間座標の微分をあらわす。

$$\nabla \times \frac{J(x', t)}{|x - x'|} = -\frac{(x - x')}{c|x - x'|^2} \times \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \times J(x', t)$$

$$B = B^0 - \frac{m_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{(x - x')}{|x - x'|^2} \times \left\{ \frac{1}{|x - x'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} J(x', t) \quad (4.68)$$

§ 6 . 原点の辺りに局在する電流の作る場

ややこしい計算ばかり続いたが、要するに時間に依存する電荷や電流が作る電場、磁場を求めたということだ。さて、無限に広がった空間の中の狭い領域に、電荷分布と電流分布が与えられており、それらの時間的変動が激しいときには、それに伴って周囲の空間に電磁波が放射される。今、電荷と電流が原点 0 のまわりの半径 a の領域内に限られており、原点からずっと離れた点 x での電磁場を求めてみる。

$$n' \equiv \frac{x - x'}{|x - x'|} \quad (4.74a)$$

$$t \equiv t - \frac{1}{c} |x - x'| \quad (4.74b)$$

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad (4.74c)$$

$$r \equiv |\mathbf{x}| \quad (4.74d)$$

とおき、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^l = (1/r) [1 + (1/r^2)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') + \dots] = \sum_{l=0} (r'/r)^l P_l(\cos \mathbf{q}) (1/r) \sum_{l=0} (r'/r)^l P_l(\cos \mathbf{q})$ の展開公式を使って (4.67) を展開すると (途中まで計算したが根が尽きたので結果をテキストから拝借する。次の機会に挑戦しよう 笑い)

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}, t) - E^0(\mathbf{x}, t) = & -\frac{m_0}{4\mathbf{p}} \frac{1}{r} \int_{<a} d^3x' \{ \mathbf{J} - \mathbf{n}'(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}) \} + \frac{m_0}{4\mathbf{p}} \frac{c}{r^2} \int_{<a} d^3x' \{ \mathbf{J} - 2\mathbf{n}'(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}) \} \\ & - \frac{m_0}{4\mathbf{p}} \frac{1}{r^2} \int_{<a} d^3x' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}') \{ \mathbf{J} - \mathbf{n}'(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}) \} + \frac{1}{4\mathbf{p}e_0} \frac{1}{r^2} \int_{<a} d^3x' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

が得られる。ここで \mathbf{x} は $|\mathbf{x}| \gg a > |\mathbf{x}'|$ と原点から遠く離れている点である。(4.73)の右辺第2項が第1項に比べて小さいくなる条件は

$$\frac{1}{r} |\mathbf{J}| \gg \frac{c}{r^2} |\mathbf{J}| \rightarrow r \gg \frac{c|\mathbf{J}|}{|\mathbf{J}|} \quad (4.75)$$

の場合となる。つまり、電流の時間的変化が激しいほど、また遠くいくほど第2項以下の寄与は小さくなる。電流 \mathbf{J} が一定の各振動数 $\mathbf{w} = ck$ で振動している場合には、波長を l とするとき (4.75) は

$$r \gg \frac{c}{\mathbf{w}} = \frac{l}{2\mathbf{p}} \quad (4.75')$$

となる。つまり、電流の振動する (発振する電磁波の) 波長 l に比べてずっと遠方では (4.73) の第1項が圧倒的に大きく、それ以外の項を無視してもよいということになる。

$$\begin{aligned} r & \gg \frac{c|\mathbf{J}|}{|\mathbf{J}|} \\ r & \gg a \end{aligned} \quad (4.76)$$

を満足し、第1項だけが重要な領域を「波動帯 (wave zone)」と呼ぶ。波動帯においては \mathbf{n} と \mathbf{n}' の差は無視できるから (4.73) で \mathbf{n}' を \mathbf{n} で置き換えて

$$E(\mathbf{x}, t) - E^0(\mathbf{x}, t) = -\frac{m_0}{4\mathbf{p}} \frac{1}{r} \int_{<a} d^3x' \{ \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)) \} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.77)$$

を得る。ここで

$$\mathbf{t} \equiv t - \frac{r}{c} \quad (4.78)$$

で近似する。これは電気双極子近似 () と言われている。

()テキスト第4章 §2 「磁場のない世界」の例4で原点の周りに局在した電荷 r から遠いところでの静電場を求めた。原点に局在する電荷の分布によってポテンシャルが電気双極子能率や電気4極子能率等、多重極子による電場の重ね合わせの形に表すことができた。もし電荷分布が完全に球対称であれば球外での点では全電荷が球の中心に集まったときの点電荷による場合と同じ電場が生じるが、電荷分布が球対称でなくても十分遠方では点電荷の場合とほぼ同じ結果になるが、**近づくにつれて球対称からのズレが次第に明瞭に現れてくることになる**。具体的には、かなり近づくともまず**点電荷と双極子とから生じる電場**のようになり、さらに近づくとも**点電荷と双極子と4重極子とから生じる電場**のようになってくる。またさらに近づくとも・・・これを多重極展開の定理と呼んでいる。一方、§6では原点付近に局在する電荷と電流が**じっとしておらず時間的に変動している場合の遠方における電場や磁場の振る舞い**を調べている。**ところで**何で(4.78)で「電気双極子近似」という名前がでてきたのか、電気双極子の片鱗も見えないのに・・・という疑問が起こった。そこで少し調べた結果を以下に書いておく

《補足 :なんで電気双極子近似と呼ばれるのか、、、、? ? ? 》 - - - - -

$r=|\mathbf{x}|$ が電流や電荷から十分離れた場所では \mathbf{x}' に関して

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots$$

$$f\left(x', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = f\left(x', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \dot{f}\left(x', t - \frac{r}{c}\right) + \dots$$

のように展開することができる。これはテキストの付録11に載っている。ここで、§5 「電荷と電流の分布と場」で求めたベクトルポテンシャルをひっぱりだすと(初項は省略した)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{\mathbf{J}\left(x', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \mathbf{J}\left(x', t - \frac{r}{c}\right)$$

定常電流の場合には電流密度 \mathbf{J} の全空間にわたる積分は0であったが、非定常の場合は有限となる。ここで次の公式(注)を使う

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

公式 と連続の方程式より

$$\int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) = - \int d^3x' \mathbf{x}' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)$$

$$= - \int d^3x' \mathbf{x}' \dot{\rho}(\mathbf{x}', t) = \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}', t)$$

となる。ここで \mathbf{p} は電荷分布の双極子能率で $\mathbf{p} = \int d^3x \mathbf{x} \rho$ で定義される。したがって、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}', t)}{r}$$

となる。一方、スカラーポテンシャルは

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \frac{\mathbf{r}(x', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

公式 (1) を使って

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}(x', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \right) \left\{ \mathbf{r}(x', t) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \dot{\mathbf{r}}(x', t) + \dots \right\} \\ &= \frac{\mathbf{r}(x', t)}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \mathbf{r}(x', t)}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \dot{\mathbf{r}}(x', t)}{cr^2} + \dots \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x' \left\{ \frac{\mathbf{r}(x', t)}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \mathbf{r}(x', t)}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' \dot{\mathbf{r}}(x', t)}{cr^2} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}(x', t)}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{p}}(x', t)}{cr^2} \right) \end{aligned}$$

となる。以上、ベクトルポテンシャルやスカラーポテンシャルは電気双極子能率の記述で近似できるので、電気双極子近似と呼ばれている。

(注) 公式の証明

ベクトル解析の公式 $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ において $\mathbf{B} = \mathbf{x}$ とすると $\nabla \cdot \mathbf{x} = 1$ であるから

$$\mathbf{A} = -\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{x}$$

両辺を積分すると $\int d^3x \mathbf{A} = -\int d^3x \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{A} + \oint dS \mathbf{x} n \cdot \mathbf{A}$ となる。

今、 \mathbf{A} に電流密度 \mathbf{J} をとると $\int d^3x \mathbf{J} = -\int d^3x \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J} + \oint dS \mathbf{x} n \cdot \mathbf{J}$ となり、積分範囲を電流に広がりより十分大きな範囲にとると表面では電流密度は0であるから表面積分は0となる。その結果

$$\int d^3x \mathbf{J} = -\int d^3x \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

が得られることになる。

----- (補足終わり)

随分寄り道してしまったのたので先を急ぐことにする。波動帯域での磁場を求めてみると

$$\begin{aligned} &\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \mathbf{J}(x', t) \\ &= \mathbf{n} \frac{1}{r} \times \left\{ \frac{1}{r} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \right\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{J}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}^0(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \int_{r < a} d^3x' \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

となる (テキストと符号が異なるが??)。電流 \mathbf{J} の \mathbf{n} に平行な成分は $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})$ とかけるので、垂直な成分は電流 \mathbf{J} から平行成分を差し引けばよいので $\mathbf{J} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})$ となる。したがって、 \mathbf{n} に垂直な成分の和は

$$\mathbf{J}_\perp(t) = \int_{r < a} d^3x' \{ \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t)) \} \quad (4.80)$$

となる。こいつの時間微分を取ってやると、まさに波動帯における電場 (4.77) の被積分関数部と同じになるのではないか。また、明らかに

$$\mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp(t) = \mathbf{n} \times \int_{r < a} d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \quad (4.81)$$

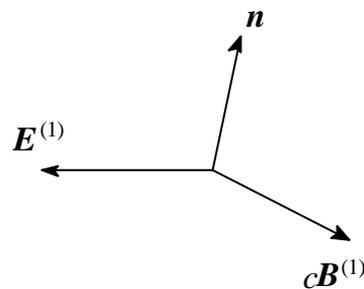
かつベクトル解析の公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ より

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp(t)) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp(t)) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{J}_\perp(t) \cdot \mathbf{J}_\perp(t)) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_\perp(t))(\mathbf{J}_\perp(t) \cdot \mathbf{n})$$

から $|\mathbf{J}_\perp(t)| = |\mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp(t)| \quad (4.82)$

以上のことから、波動帯における電場と磁場は

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{J}}_\perp(t) \quad (4.83)$$



$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{J}}_\perp(t) \quad (4.84)$$

となる。 \mathbf{n} と $\mathbf{E}^{(1)}$ と $\mathbf{B}^{(1)}$ は互いに直行しており、右手系を作っている。 \mathbf{E} と \mathbf{B} の右肩につけた 1 という数は、電流からの距離の逆べき ($1/r$) を意味する。

波動帯でどれだけエネルギーが流れているかを計算する。電磁場のエネルギー密度 (ポインティングベクトル) は (2.11b) より

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{1}{c} \frac{1}{r^2} \dot{\mathbf{J}}_\perp \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{J}}_\perp) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{1}{c} \frac{1}{r^2} \mathbf{n} \dot{J}_\perp^2(t) \quad (4.85)$$

となる。**波の伝播方向に垂直な電流の成分だけが関与**していることに注意。これを半径 r の球にわたって表面積分すると波動帯における全エネルギーの流れが求まる。

いま、

$$\mathbf{J}(t) \equiv \int_{r < a} d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \quad (4.86)$$

と \mathbf{n} のなす角を q とすると (4.81) より

$$|\mathbf{n} \times \mathbf{J}(t)| = |\mathbf{n} \times \mathbf{J}_\perp(t)| = J(t) \sin q \quad (4.87)$$

だから、(4.85) より全エネルギーの流れは

$$\begin{aligned} R(t) &\equiv \oint dS \frac{m_0}{(4p)^2} \frac{1}{c} \frac{1}{r^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_\perp^2(t) = \int \frac{m_0}{(4p)^2} \frac{1}{c} J_\perp^2(t) dW \\ &= \frac{m_0}{(4p)^2} \frac{1}{c} \int J^2(t) \sin^2 q dW = \frac{m_0}{(4p)^2} \frac{1}{c} \int J^2(t) \sin^3 q dq df \\ &= \frac{m_0}{(4p)^2} \frac{1}{c} \int d^3x' J^2(t) 2p \frac{4}{3} = \frac{m_0}{6pc} \int d^3x' J^2(t) \\ &= \frac{m_0}{6pc} \ddot{\mathbf{p}}(t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

である。 p は電荷分布の双極子能率で (4.85) で定義した。 dW は dS が原点に対して張る立体角である。
(4.85) ~ (4.88) には遅延時間が入っていることに注意。

【演習問題】 z 軸上のアンテナ

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) &= \frac{p}{a} \frac{I}{\omega_a} \cos\left(\frac{p}{a} z\right) \sin(\omega_a t) \mathbf{d}(x) \mathbf{d}(y), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, I) \sin\left(\frac{p}{a} z\right) \cos(\omega_a t) \mathbf{d}(x) \mathbf{d}(y) \\ a \geq z \geq 0, \quad I &= \frac{2p}{\omega_a} c \gg a \end{aligned}$$

アンテナの電気層双極子能率は

$$p(t) = \int_{-a/2}^{a/2} dz z \mathbf{r}(z, t) = \frac{p}{a} \frac{I}{\omega_a} \int_{-a/2}^{a/2} dz z \cos\left(\frac{p}{a} z\right) \sin(\omega_a t) \mathbf{d}(x) \mathbf{d}(y)$$

これを (4.88) に入れて輻射エネルギーが求まる。具体的計算は疲れたからやめ (笑)。

エピローグ

第4章 § 6 を終わる。ひや~ 疲れました。§ 5 も凄かったが § 6 も。第4章はまだ五合目くらいだろうか。きつい山場の道ばかり、、、しばらくこんな感想ばかり続きそう。§ 6 は思いを決して今日の朝から取っ組み合いをし、3時半頃にどうにか終了した。

----- おつかれさま~ Coffæ Break $\nabla f x y d z c r p q t w D X K W$