ダイアド

$\mathscr{KENZOU}$

2010 年 2 月 24 日

ダイアドについての Short Note です。

1　内積と外積

任意のベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ からつくられる積としては内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）がある。ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

とする。尚，$\boldsymbol{A}^t$ は転置行列。

●内積（スカラー積）

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B_i = (A_1,\ A_2,\ A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{B} \tag{1.2}$$

ただし，$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$　($\longleftarrow$ 2 度現れる添字については和をとる：Einstein の規約)

＜微分演算子＞

$$\nabla = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3 \tag{1.4}$$

●外積（ベクトル積）

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = A_i \boldsymbol{e}_i \times B_j \boldsymbol{e}_j = A_i B_j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.6}$$

`Levi-Civita` の記号　$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{i, j, kが 1, 2, 3 の偶置換であるとき} \\ -1 & \text{i, j, kが 1, 2, 3 の奇置換であるとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
1	3	2	−1
2	1	3	−1
2	3	1	1
3	1	2	1
3	2	1	−1
それ以外			0

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3)\times(B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= A_1B_1\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1 + A_2B_1\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1 + A_3B_1\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1\\ &+ A_1B_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1 + A_2B_2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2 + A_3B_2\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2\\ &+ A_1B_3\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3 + A_2B_3\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 + A_3B_3\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3 \qquad (1.7)\end{aligned}$$

＜微分演算子＞

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times(A_j\boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j \tag{1.8}$$

$$or$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_1\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_3} \tag{1.9}$$

2　テンソル

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のテンソル積を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = [A_iB_j] &= \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3\\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3\\ A_3B_1 & A_3B_1 & A_3B_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3\end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^t\end{aligned} \tag{2.1}$$

これを 2 階テンソルという。2 階テンソルの対角成分の和（トレース）はスカラー。

$$tr(\boldsymbol{T}) = \mathtt{T}_{ii} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{2.2}$$

任意の 2 階テンソルは対称テンソル ($\mathtt{T}_{ij} = \mathtt{T}_{ji}$) と反対称テンソル ($\mathtt{T}_{ij} = -\mathtt{T}_{ji}$) の和で表わせる。この表し方は一意的。

$$\mathtt{T}_{ij} = \mathtt{S}_{ij} + \mathtt{A}_{ij}\quad\begin{cases}\text{対称テンソル} & \mathtt{S}_{ij} = \dfrac{1}{2}(\mathtt{T}_{ij} + \mathtt{T}_{ji})\\[2ex] \text{反対称テンソル} & \mathtt{A}_{ij} = \dfrac{1}{2}(\mathtt{T}_{ij} - \mathtt{T}_{ji})\end{cases} \tag{2.3}$$

$$(\mathtt{S})_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & \frac{1}{2}(T_{12}+T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13}+T_{31})\\ \frac{1}{2}(T_{21}+T_{12}) & T_{22} & \frac{1}{2}(T_{23}+T_{32})\\ \frac{1}{2}(T_{31}+T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32}+T_{23}) & T_{33}\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$(\mathtt{A})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{12}-T_{21}) & -\frac{1}{2}(T_{31}-T_{13})\\ -\frac{1}{2}(T_{21}-T_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{23}-T_{32})\\ \frac{1}{2}(T_{31}-T_{13}) & -\frac{1}{2}(T_{23}-T_{32}) & 0\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

反対称テンソルの独立な成分は

$$\frac{1}{2}(T_{12}-T_{21}),\quad \frac{1}{2}(T_{23}-T_{32}),\quad \frac{1}{2}(T_{31}-T_{13}) \tag{2.6}$$

の 3 個。

3　ダイアド

内積でも外積でもないベクトルの積 $\boldsymbol{AB}$ を考え，$\boldsymbol{AB}$ は次式で表されるものとする。

$$\mathsf{D} = \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_1 & A_3B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

これをダイアド (dyad)[1]という。ダイアドは 2 階のテンソル。ダイアドの成分表記を

$$\mathsf{D}_{ij} = (\boldsymbol{AB})_{ij} = A_iB_j \tag{3.2}$$

とする。ダイアドのトレースは

$$tr(\mathsf{D}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \tag{3.3}$$

でスカラー積。ダイアドの反対称テンソルは (2.5) より

$$\begin{aligned} (\mathtt{A})_{ij} = \frac{1}{2}(\mathsf{D}_{ij} - \mathsf{D}_{ji}) &= \begin{pmatrix} 0 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ A_2B_1 - A_1B_2 & 0 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 & A_3B_2 - A_2B_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし，

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2, \quad C_2 = A_3B_1 - A_1B_3, \quad C_3 = A_1B_2 - A_2B_1 \tag{3.5}$$

ベクトル $\boldsymbol{C}$ の成分を C_1, C_2, C_3 とすれば

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{3.6}$$

あるいは

$$A_iB_j - A_jB_i = \varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_k \tag{3.7}$$

以上のことから，ダイアドの反対称成分はベクトル積の成分であることが分かる。

3.1　ドット積

ダイアド D とベクトル $\boldsymbol{C}$ とのドット積[2]を次式で定義する。ドット積は非可換。

$$\begin{cases} \mathsf{D} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \\ \boldsymbol{C} \cdot \mathsf{D} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{AB} \equiv (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \end{cases} \longrightarrow \mathsf{D} \cdot \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{C} \cdot \mathsf{D} \tag{3.8}$$

ダイアドとベクトルのドット積は，新たなベクトルをつくる。
(3.8) を確認する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{C} &= \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1C_1 + A_1B_2C_2 + A_1B_3C_3 \\ A_2B_1C_1 + A_2B_2C_2 + A_3B_3C_3 \\ A_3B_1C_1 + A_3B_2C_2 + A_3B_3C_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \\ A_2\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \\ A_3\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \quad \longleftarrow \text{これはベクトル} \end{aligned}$$

[1] Josiah Willard Gibbs（1839—1903）により考案された。
[2] 内積をドット積，外積をクロス積という名称を使うことにする。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1B_1C_1+A_2B_1C_2+A_3B_1C_3 & A_1B_2C_1+A_2B_2C_2+A_2B_2C_3 & A_1B_3C_1+A_2B_3C_2+A_3B_3C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}B_1 & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}B_2 & \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}B_3 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \quad \longleftarrow \text{これはベクトル}
\end{aligned}
$$

- $Ex-1$：次の恒等式を証明せよ。$\boldsymbol{AB}$ はダイアド。

$$
\nabla(\boldsymbol{AB}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{3.9}
$$

[**解**]

$$
\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{AB}) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \\
&= \Bigg(\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_1), \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_2), \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_3) \Bigg)
\end{aligned}
$$

第 1 成分は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_1) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_1) \\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_1}B_1 + A_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}B_1 + A_2\frac{\partial B_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}B_1 + A_3\frac{\partial B_1}{\partial x_3} \\
&= (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_1 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_1
\end{aligned}
$$

同様に，第 2，第 3 成分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_2) &= (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_2 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_2 \\
\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1B_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(A_2B_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(A_3B_3) &= (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_3 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_3
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{AB}) &= \begin{pmatrix} (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_1 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_1, & (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_2 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_2, & (\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_3 + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_3 \end{pmatrix} \\
&= (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

- $Ex-2$ ：次の恒等式を証明せよ。$\boldsymbol{AA}$ はダイアド。

$$
(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + (\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} = \nabla(\boldsymbol{AA}) - \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A}^2 \tag{3.10}
$$

[**解**]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A}^2 = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} \\
&\nabla(\boldsymbol{AA}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \\
\therefore\ &\nabla(\boldsymbol{AA}) - \frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A}^2 = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + (\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

3.2　基底ベクトルのダイアド

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基底ベクトルとする。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

基底ベクトルのダイアドは (3.1) と (3.11) より

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

基底ベクトルのダイアドを使えばダイアド $\boldsymbol{AB}$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= A_1B_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_1B_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + A_1B_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + A_2B_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_2B_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + A_2B_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + A_3B_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_3B_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_3B_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{3.15}$$

ダイアドの線形結合をダイアディック (dyadic) という。

3.2.1　単位ダイアディック

単位ダイアティック（恒等ダイアディック）$\mathsf{1}$ は

$$\mathsf{1} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

で定義される。単位（恒等）という名称はその行列が単位行列となることからきている。

3.3　クロス積

ダイアド $\mathsf{D} = \boldsymbol{AB}$ とベクトル $\boldsymbol{C}$ とのクロス積を

$$\mathsf{D} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{C} \times \mathsf{D} = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{AB} \equiv (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \tag{3.18}$$

で定義する。ダイアドとベクトルのクロス積は別のダイアドをつくる。

クロス積の定義 (3.17) を使えば $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)$ となるので，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = &(A_1B_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_1B_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + A_1B_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\
&+A_2B_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_2B_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + A_2B_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\
&+A_2B_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_3B_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_3B_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3) \times (C_1\boldsymbol{e}_1 + C_2\boldsymbol{e}_2 + C_3\boldsymbol{e}_3) \\
= &(A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3) \\
&\times \{B_1C_1\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + B_2C_1\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + B_3C_1\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 \\
&\ +C_1C_2\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + B_2C_2\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + B_3C_2\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 \\
&\ +B_1C_1\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 + B_2C_3\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 + B_3C_3\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3\} \\
= &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

尚，基底ベクトル間の外積の関係式

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0, & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{3.20}$$

とベクトルの外積

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} &= (B_2C_3 - B_3C_2)\boldsymbol{e}_1 + (B_3C_1 - B_1C_3)\boldsymbol{e}_2 + (B_1C_2 - B_2C_1)\boldsymbol{e}_3 \\
&= K_1\boldsymbol{e}_1 + K_2\boldsymbol{e}_2 + K_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

を使って (3.19) を展開整理すると，基底ベクトルのダイアドの線形結合の形に書ける。

$$\begin{aligned}
\mathsf{M} = &\boldsymbol{A}\boldsymbol{K} \\
= &A_1K_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_1K_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + A_1K_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\
&+A_2K_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_2K_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + A_2K_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\
&+A_3K_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_3K_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_3K_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned} \tag{3.21}$$

つまり，ダイアドとベクトルのクロス積 $\mathsf{D} \times \boldsymbol{C}$ は新たなダイアド M をつくる。
新しいダイアド M をテンソル表記すると

$$\begin{aligned}
\mathsf{M} &= \begin{pmatrix} A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 & A_1B_3C_1 - A_1B_1C_3 & A_1B_1C_2 - A_1B_2C_1 \\ A_2B_2C_3 - A_2B_3C_2 & A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 & A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 \\ A_3B_2C_3 - A_3B_3C_2 & A_3B_3C_1 - A_3B_1C_3 & A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_{12}C_3 - D_{13}C_2 & D_{13}C_1 - D_{11}C_3 & D_{11}C_2 - D_{12}C_1 \\ D_{22}C_3 - D_{23}C_2 & D_{23}C_1 - D_{21}C_3 & D_{21}C_2 - D_{22}C_1 \\ D_{32}C_3 - D_{33}C_2 & D_{33}C_1 - D_{31}C_3 & D_{31}C_2 - D_{32}C_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ただし，D_{ij} は (3.1) を参照。

（以上）

参考文献

[1] 太田浩一 「電磁気学 I」（丸善，2002）

[2] 安達忠次 「ベクトル解析」（培風館，昭和 51 年）

GOOD LUCK !

SEE YOU AGAIN !

by *KENZOU*