電磁気学再入門を読む（１）

KENZOU

2010 年 1 月 24 日

♣いよいよ本格的な冬将軍が到来しようとしている１月のある日，コニーら一行と新顔サムが加わった一団が，吐く息も白く，Ｋ氏を訪ねてきた。

- コニー：コンニチワ〜Ｋさん，いよいよ本格的に寒くなりそうねェ〜。
- Ｋ氏：Ｏｈ！コニー久しぶりだなぁ。みんなもよく来てくれたね。オッ，サムも加わったのかい。
- サム：ハイ，なにやら電磁気学再入門のお話を再開されるということをコニーから聞いたので，是非お伺いしたいと思い，みんなに連れられてきました。
- Ｋ氏：大歓迎するよ。以前，高橋康著「電磁気学再入門」をやったのだけど途中で Stop してしまっていてね。いつか続きをやろうと思っていたんだが，年も変わったことだしそろそろ再開しようかなという気になったという次第なんだよ。
- アリス：楽しみだわ。“ QED への準備 ”という副題がついているので，電磁気学の話題は結構絞られているのね。
- Ｋ氏：そうだね。まっ，ともかくテキストに沿ってお話を進めていければと思っているのだが，どこまで進められるかは未知だな。。。
- ユナ：今から気の弱いことをおっしゃらずに頑張って欲しいわ。
- キャサリン：そうね，よろしくお願いしま〜す。
- エミリー：長丁場になりそうだけど，ゆっくりとペースを守って進めていけばいいと思うわ。
- Ｋ氏：ワカリマシタ。まっ，そういうことで，それではそろそろ第１話からはじめようか。

目 次

1 Maxwellの方程式

1.1 はじめに

- K氏：Maxwellの方程式を知っていると思うけど，これは次のようなものだったね[1]。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ は電場，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ は磁場，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$ は電流密度で $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は電荷密度で，ε_0，μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率として

$$
\begin{cases}
\text{電場の発散は電荷によって決まる：} & \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) \\
\text{電場の回転は磁場の時間変化で決まる：} & \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\
\text{磁場の空間分布：} & \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\} \\
\qquad\quad〃\qquad\quad\text{：} & \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

ここで ∇ はナブラ演算子とよばれる微分演算子で

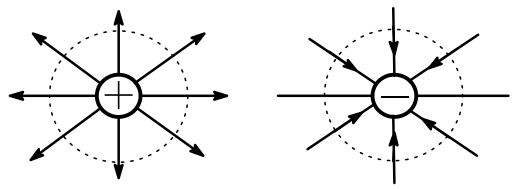
$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ベクトルと考えるわけだ。また $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\mathtt{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

と表される。Maxwellの方程式の意味だけど，第1式の $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ は電場（電気力線）の湧き出しの量（発散）を意味しているね。この湧きだし量は電荷の量に比例するということだ。



$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(1/\varepsilon_0)\rho$

電荷 ρ から電気力線が四方八方に出ており
電荷の回りの閉曲面を貫く電気力線の数が
多いほど電場は強い

次に第2式の $\nabla\times\boldsymbol{E}$ だが，これは電場の回転を意味する。円を回る電流の大きさは閉じた円を貫く磁束の変化に等しいという **Farady の法則**だ。第3式の $\nabla\times\boldsymbol{B}$ は，電流が流れているとその回りに磁場ができるという **Ampare の法則**，そして最後の第4式は**磁気単極子（モノポール）は存在しない**ので磁場の発散は常にゼロということを意味している，というものだね。このあたりの話はまた追々フォローしていくので，ざっと把握しておけばいいと思う。ところで (1.1) の式は合計何個の方程式で出来上がっていると思う。

- コニー：パッと見たら4個？と思うけど，ベクトルで書かれていることに注意すると，第1式は内積のスカラーなので1個，第2式はベクトル積だから成分として3個，第3式も同じく3個ね。第4式はスカラーなので1個の合計8個になるのかしら。

[1] Maxwellのもともとの理論では方程式が12個あり大変複雑なものだったらしい。現在われわれがお目にかかる4個の方程式にまで整理したのはHeavisideとHertzの功績である。

- K氏：そうだね，Maxwell の方程式は「電場」と「磁場」という **2 つの場**を規定するために合計 8 個の方程式で出来上がっている。それではなぜ 8 個も必要かというだけど，電場や磁場は**ベクトル場**だよね。ベクトル場の空間分布を決めるのには，発散 (1 成分) と回転 (3 成分) の合計 4 個の量を知る必要がある。**「任意のベクトル場はスカラー場とベクトル場の和として表わせる」**という **Helmholtz の定理**があるだろう，アレだね。今，電場と磁場と 2 つの場があるので $4 \times 2 = 8$ で合計 8 個の方程式が必要になるということだ。

- アリス：ちょっと待って，ベクトル場というのは成分が 3 個だから，1 つの場は 3 つの方程式で記述される。電場と磁場の 2 つの場はだから 6 つの方程式で記述されるべきではないかしら？

- K氏：う〜ん，いいところに気がついたね。実はそうなんだ。2 つの場を規定するのに 8 個の方程式が必要と言ったけど，実は束縛条件によって**独立な方程式は 6 個**となるんだ。このあたりの具体的なことはあと見ていくけど，一般論の詳しい議論はテキストの付録 6 を参照してください。ところで，Maxwell の方程式は時間や空間の推進に対して不変で，また，座標の回転[2]に対しても決まった変換を受けるので互いに回転で結ばれるような座標系ならどんな座標系で書いても同じ形をしている[3]という特長を持つ。物理で“ 不変 ”となるとそこから不変量というか保存則がでてくるね。**時間推進不変**は電磁場のエネルギー (と荷電粒子のエンルギーの和) の保存を意味するし，**空間推進不変**は電磁場の運動量 (と荷電粒子の質量の流れの和) が保存される。**座標回転不変**からは電磁場の角運動量が保存される，ということだね。

1.2 Maxwell の方程式

- K氏：これから Maxwell の方程式を扱っていくわけだけど，ベクトルの勾配，発散，回転に関する公式が必要になるのでそれらをまとめておく。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \nabla(\nabla \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) - \nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot (\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{1.4}$$

$$\nabla \times (\nabla\phi(\boldsymbol{x})) = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})(\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) \\ &\quad + (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \times (\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \times (\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})) \\ &\quad + (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{1.7}$$

Maxwell の方程式を再び書くと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{1.9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \right\} \tag{1.10}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{1.11}$$

[2] 4 次元空間における回転に対して不変。興味のある方はココも参照してください。

[3] 物理法則を示すある方程式が特定の座標変換でその形を変えないとき，その法則は共変的 (covariant) と言います。

先ほど 8 個の Maxwell の方程式のうち独立なものは 6 個といったね。具体的にそのあたりのことをチェックしていこう。まず (1.9) の左から $\nabla\cdot$ を作用させると公式 (1.3) より左辺は恒等的にゼロで，右辺は (1.11) よりゼロとなる。つまり，(1.9) の 3 個の式は (1.11) の束縛条件 1 個が課せられるので独立な方程式は 2 個ということになる。ということで電場 $\boldsymbol{E}$ を規定する独立な方程式は 3 個ということになるね。次に磁場だが，(1.10) の左から $\nabla\cdot$ を作用させると左辺はゼロで右辺は

$$0=\mu_0\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}=\mu_0\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}$$

$$\therefore\quad 0=\mu_0\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}\tag{1.12}$$

でなければならない。(1.12) は**電流密度と電荷密度の連続の方程式**だが，この条件により磁場を規定する独立な方程式の数は全部で 3 個。結局 Maxwell の方程式のうちで独立なものは合計 6 個ということになる。ちなみに，連続の方程式は、電荷の総量は保存されるという**電荷保存則**としておなじみだね。

- エミリー：独立な方程式は 6 個というのは，電場や磁場を規定する方程式に束縛条件が加わるから独立な方程式は 6 個になるということね。

- K 氏：そうなんだ。ところで Maxwell の方程式を睨んでいると電場と磁場の方程式は似ているようで違うことがわかるだろう。対照してみると

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) & \Longleftrightarrow\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & \Longleftrightarrow\quad \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}\end{cases}$$

  つまり，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ に対して磁荷密度，また電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$ に対して磁流密度が加われば電場と磁場は対称になる。対称になれば Dirac の好む *ugly* でない“ 美しい理論 ”となるわけだが，残念ながら現時点では磁荷密度や磁流というものは実験的に見いだされていないので，現時点では電場と磁場の非対称性については容認するという立場をとっているわけだね。

- サム：Dirac のモノポールの理論ですね。筑摩書房の「ディラック現代物理学講義」という文庫本の中にモノポールの話がでています。

- K 氏：そうだね，Dirac はその中で 1 個のモノポールは完全に安定で，逆符合のモノポールとの相互作用ではじめて崩壊させることが可能と言っている。モノポールの静止エネルギーは余りにも大きい（約 30GeV 以上）ので現存する高エネルギー加速器では作ることができないだけかもしれないと書いているね。いずれにしてもモノポールが見つかれば物理学の革命が起きるだろうね！
  ところで，テキストの【蛇足】で，(1.10)，(1.11) はそのままにしておいて (1.9) の右辺の符合を正（$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$）にしたらどうなるか？と課題が投げかけられているね。これは次回のお話で明らかになるけど，そうすると電磁場のエネルギーが正にならないんだ。そのお話は次回のお楽しみとしておこう。

- ユナ：わかったわ，その時までのお楽しみとしてお話を先に進めていただける。

1.2.1 電磁場と古典的荷電粒子の相互作用

- K氏：了解！ さてと，Maxwell の方程式を満たす電場や磁場が電荷や電流にどのような力を及ぼすかという力学との関連についてはまだなにも触れていないね。そのような力に関するものとして **Lorentz 力**が登場するわけだ。Einstein の特殊相対性理論の下敷きとなった Lorentz 変換を最初に導いたことで有名な Lorentz だね。**Lorentz 力密度**を $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ とすると
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.13}$$
と表される。電荷 e を持つ点粒子が位置ベクトル $\boldsymbol{\xi}(t)$ にあり，速度 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ で運動しているとすると，電荷密度と電流密度はそれぞれ
$$\rho(\boldsymbol{x},t)=e\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{1.14}$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{1.15}$$
と書けるだろ[4]。$\delta(\boldsymbol{x})$ は Dirac のデルタ関数で，よく知っていると思うけど $\boldsymbol{x}=0$ のとき $\delta(\boldsymbol{x})=1$，$\boldsymbol{x}\neq 0$ のとき$\delta(\boldsymbol{x})=0$ だね。さて，質量 m，電荷 e の点電荷に働く力は (1.13) を全空間にわたって積分すればよい。この際，δ 関数の積分公式 $\int dx\delta(x-a)f(x)=f(a)$ を使う。そうすると Newton の運動方程式として
$$\begin{aligned}m\frac{d^2\boldsymbol{\xi}(t)}{dt^2}&=\int_{-\infty}^{\infty}d^3x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)e\int_{-\infty}^{\infty}d^3\boldsymbol{x}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+e\int_{-\infty}^{\infty}d^3\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\\&=e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi},t)+\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\}\end{aligned} \tag{1.16}$$
が得られる。(1.16) の右辺にでてきた $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ は粒子の位置における電場や磁場だけど，これらには粒子以外からきた電磁場に加えて粒子自身によって作られた電磁場（自己場：self-filed）も含まれる。それはともかく，(1.16) は荷電粒子の“ 運動量の時間変化 ”は荷電粒子の点における Lorentz 力に等しいということを表していると考えられるが，実は電磁場がある場合には荷電粒子の運動量は質量の流れとは別物になるんだ。この点の詳しいことは後でお話するので，いまは素直に受け取っておいてください。したがって，正確には**「荷電粒子の質量の流れの時間的変化は，荷電粒子の点における Lorentz 力にひとしい」**ということになる。

- ユナ：荷電粒子の質量の流れとは $m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ のことね。この項を「質量の流れ」と呼ぶ理由をもう少し説明していただけるかしら。

- K氏：そうだね。いま，ある点粒子の時刻 t での位置ベクトルを $\boldsymbol{\xi}(t)$，その質量を m とすると質量の空間分布は
$$\rho(\boldsymbol{x},t)\equiv m\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{1.17}$$
と書けて，これは $\boldsymbol{\xi}(t)$ のところに集中した質量を表わすだろう。粒子が動くに従って，質量の分布も動いていくというわけだ。つまり質量の流れというわけだね。(1.17) を全空間にわたって積分すれば時間によらず常に m になる。

- ユナ：なるほど，よく分かったわ。ところで，$m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)$ は通常運動量いうけど，電磁場との相互作用系では運動量にはならないということね。そういえば解析力学の正準形式の理論のところで電磁場と荷電粒子の相互作用系の Hamiltonian は $\boldsymbol{A}$ をベクトルポテンシャルとすると
$$H=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}\right)^2+eA_0$$

[4] $\boldsymbol{\xi}(t)$ は荷電粒子の位置を表す力学的自由度で，$\boldsymbol{x}$ は場の量を測る位置を表すラベルを意味する。

というものだったわね。自由粒子の運動量を $\boldsymbol{p}(=m\dot{\boldsymbol{x}})$ とすると $H=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2$ で，電磁場と相互作用している系では運動量 $\boldsymbol{p}\longrightarrow\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$ という置き換えをすればよかった。つまり，相互作用系では運動量は質量の流れ $m\dot{\boldsymbol{x}}$ と異なるというわけね。

- K氏：ピンポ〜ン。なお，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は次回の話で登場する予定だ。

1.3 縦成分と横成分への分解

- K氏：これから Maxwell の方程式の物理的意味を見ていくわけだが，これは何度も言っているようにベクトル場の方程式だね。そこでベクトル場について少し一般論をやっておこう。空間の点 $\boldsymbol{x}$ に依存したベクトル場を $\Sigma(\boldsymbol{x})$ とし，この場は十分遠方でゼロになると仮定する。例えは電場や磁場は十分遠方ではゼロになるよね。ベクトル場を縦成分と横成分に分けてやると

$$\Sigma(\boldsymbol{x})=\Sigma_L(\boldsymbol{x})+\Sigma_T(\boldsymbol{x}) \tag{1.18}$$

とかける。サフィックスの L は Longitude の L で縦成分，T は Traverse の T で横成分を意味している。尚，縦・横成分は次式を満たす。

$$\begin{cases}\nabla\cdot\Sigma_T(\boldsymbol{x})\equiv 0\\ \nabla\times\Sigma_L(\boldsymbol{x})\equiv 0\end{cases} \tag{1.19}$$

(1.19) はベクトル解析の公式 (1.3)，(1.5) より $\Sigma_T(\boldsymbol{x})$ は $\nabla\times\boldsymbol{A}$，$\Sigma_L(\boldsymbol{x})$ は $\nabla\phi(\boldsymbol{x})$ に相当することが分かるよね。つまり回転と発散で，横成分は場が最も激しく変化する方向と直交した方向の成分，縦成分は場が最も激しく変化する方向と平行な成分ということだ。

- キャサリン：なるほど，ベクトル場の空間分布は発散と回転の量で決まると最初言われたことを式で表したということね。

- K氏：そうなんだ。要約すると発散が縦成分を決め，回転が横成分を決めるということだね。前置きはこれ位にしてと。。。

1.3.1 電流の縦成分と横成分

- K氏：エ〜っと，電流から考えるとして，連続の方程式を見てみよう。連続の方程式は

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1.20}$$

だった。そこで，与えられた電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ からどれだけ電流が決まるかという問題を考察しよう。電流を縦成分 $\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)$ と横成分 $\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)$ に分けると

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.21}$$

と書ける。ただし，$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)$ は次の条件が課せられる。

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)\equiv 0\longrightarrow\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)=\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)\equiv 0\end{cases}$$

ここで等号ではなく $\equiv$ としたのは恒等的に成り立つという意味だね。そうすると (1.20) は

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t))=\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)=0$$

また，$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)$ は常にある関数 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ の grad で表すことができるので，上式は結局 Poisson の方程式と呼ばれるものになる。

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

この方程式の解はよく知られていて

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{1}{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\mid}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t} \tag{1.22}$$

全空間にわたる積分はいちいち積分の上限，下限を書かないことにするよ。これから電流の縦成分は

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t) = \nabla\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\nabla\frac{1}{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\mid}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t} \tag{1.23}$$

- コニー：(1.23) で ∇ が $\int$ の内側に入ってしまっているけど，それは (1.22) の積分は x' に関するもので，一方 ∇ は $\boldsymbol{x}$ に作用するものだから $\int$ の中に入れても問題ないわけね。

- K氏：そうなんだ。(1.22) の被積分関数は $\boldsymbol{x}'$ の関数だから，その積分を先に実行した後で ∇ を作用させても，先に ∇ を作用させ，その後 $\boldsymbol{x}'$ で積分しても同じ結果が得られるということだね。ということで電流 $\boldsymbol{J}$ は

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\nabla\frac{1}{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\mid}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t} \tag{1.24}$$

と求めることができた。電流の横成分 $\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)$ は，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)=0$ を満たすものならば何をとってきても勝手で，**電荷分布の時間的変化とは無関係に与えられる**ということだ。電流には電荷密度の時間的変化とまったく無関係な部分があるので，<u>電流をいつでも電荷の動きと理解するのは無理がある</u>ということだね。例えば中性子はその名の通り電荷を持たないだろう。だから電流は流れていないと思うが，実際は磁気能率による電流が流れている。これはいま言ったことのよい例だね。

　グフォ〜ン。。。喉になにか詰まったみたい。え〜っと，また，縦型の電流 $\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)$ は Maxwell 方程式の中ではいつでも縦型の電場 $\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)$ の時間変化と消しあって**磁場を発生しない**んだ。詳しいことは次のセクションでやることにしよう。

1.3.2 電場の縦成分と横成分

■電場の縦成分

- K氏：電場を縦成分 $\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)$ と横成分 $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ に分けて書くと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.25}$$

$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ は例によって次の条件が課せられる。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) \equiv 0 \tag{1.26}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) \equiv 0 \tag{1.27}$$

上の条件を考慮しながら Maxwell の方程式を縦と横の成分で書き直すと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) \tag{1.28}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1.29}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \right\} \tag{1.30}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{1.31}$$

となる。

- ユナ：少し待って，(1.30) の右辺は電流と電場の横成分だけだけど，それは左辺の $\nabla \times \boldsymbol{B}$ が磁場の横成分だからということなの？ 何かスッキリとこない感じだけど。

- K氏：うっう〜ん，そうだね。ちょっと省略したかな。これは (1.10) の左から ∇ を作用させ，電流，電場の横・縦の制約条件を考慮すると結局横成分だけが残ることになるんだ。確認しておいてくれる。さて，上の 4 つの方程式を見ると電場の縦成分が入っている式は (1.28) だけだね。他の式とのしがらみはないので素直に積分が実行できる。サム ちょっとやってみるかい。

- サム：はい，まず $\nabla \times \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) \equiv 0$ なので $\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)$ はある関数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ の grad で与えられ，$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) = \nabla\varphi(\boldsymbol{x},t)$。これを (1.30) に入れると

  $$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t)$$

  となって Poisson の方程式が得られます。この解は先ほどKさんが示されたように

  $$\varphi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\rho(\boldsymbol{x}',t)$$

  で，求める**電場の縦成分**は

  $$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \nabla \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\rho(\boldsymbol{x}',t) \tag{1.32}$$

  となります。

- K氏：そうだね。これが (1.27) を恒等的に満たすことはベクトル解析の公式 (1.5) より明らかだね。

- エミリー：つまり公式 $\nabla \times (\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)) \equiv 0$ で $\phi(\boldsymbol{x},t) = \int d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}',t)$ というわけね。

- K氏：ピンポ〜ン。ところで (1.32) は何を表していると思う。実は Coulomb の法則を表しているだ。それを見るのに公式 $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を使う。そうすると

  $$\nabla \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|} = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|^3} = -\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|^2} \tag{1.33}$$

  と展開できる。いま，電荷 Q が原点に静止しているとすると

  $$\rho(\boldsymbol{x},t) = Q\delta(\boldsymbol{x})$$

なので，電荷 Q が生み出す電場は

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{Q}{\mid \boldsymbol{x} \mid} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{\mid \boldsymbol{x} \mid}\frac{1}{\mid \boldsymbol{x} \mid^2} \tag{1.34}$$

となる。これはよく知られた Coulomb 場だ。磁場のない場合の Lorentz 力は (1.13) より $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x})$ となるので，点 $\boldsymbol{x}$ にある電荷 Q' に働く力の大きさは

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{\mid \boldsymbol{x} \mid^2} \tag{1.35}$$

となり，これは距離の 2 乗に反比例する Coulomb 力だね。

- ユナ：静止した電荷が原点にあるということは $\boldsymbol{x}' = 0$ で電荷が原点に Localize している。だから (1.32) の右辺を積分した結果が (1.34) になるのね。

- K氏：そうだね。ところで前のセクションの終わりで少し話題にした縦型の電流 $\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x}, t)$ と縦型の電場 $\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t)$ の関係だけど，アリス ちょっとやってみるかい。

- アリス：はい，電場の縦成分は (1.32) より

$$\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\nabla\frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \mid}\rho(\boldsymbol{x}', t) \tag{1.36}$$

これを t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\nabla\frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \mid}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}', t)}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_o}\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned} \tag{1.37}$$

が得られるわ。先ほど ユナ が気にしていた (1.30) の左辺が横型ばかりになっているのはこの式が成立するからなのね。

- K氏：ご明解。先ほど (1.30) を導いたとき，磁場は横成分しかないということから右辺の縦成分はゼロとしただろう。つまり

$$\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = 0$$

ということだが，この条件は，いま アリス が導いた関係式から確かに成り立つことが分かる。つまり，**横型電流と横型電場の時間変化だけが磁場を発生させる**ということになるんだね。あと，電場の縦成分の式 (1.32) をよく眺めると，右辺と左辺は同一時刻の t が入っているだろう。それがどうしたの？と質問を受けそうだけど，Coulomb 場というのは近接作用の場だね。つまり電荷が周りの空間に電気的なひずみを発生させ，そのひずみが次々と伝わっていくわけで，時刻 t で点 $\boldsymbol{x}'$ にある電荷分布が，まったく同時刻の別の点 $\boldsymbol{x}$ における電場を決めるということは近接作用の考え方と矛盾するという問題意識だ。点 $\boldsymbol{x}'$ から点 $\boldsymbol{x}$ まで作用が伝わるには光速を c として少なくとも $\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \mid /c$ だけの時間がかかるはずで，その遅延効果はどうなったのか？ということだね。この議論はまた別の機会にやるとして，ではその注意だけにとどめておくよ。

■**電場の横成分**

- K氏：さて，次に**電場の横成分**を求めていこう。結論から先に言うと，横成分は磁場の横成分と共に電磁波の波動方程式を満たす解になるんだ。さて，電場の横成分 $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ は (1.29)，(1.30) から分かるように磁場と絡まりあっているね。このままでは手がつけられないから，電場の横成分を分離することを考える。まず，(1.22) の左から $\nabla\times$ を作用させ，ベクトル解析の公式 (1.2) を使うと

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)) - \nabla^2\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -\nabla^2\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) + \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}$$

なので，整理すると

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.38}$$

が得られる。一方，(1.30) の左から $\nabla\times$ を作用させ，上と同様の計算により

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = -\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.39}$$

が得られ，横電場と磁場の方程式が分離できた。上の 2 式は横電場と磁場が満たす**波動方程式**だね。右辺を“ **源泉** ”とか“ **源** ”というけど，(1.38) と (1.39) は電流そのものではなく**電流の変化が源**になっていることを示しているね。いずれにしても，電場と磁場の振る舞いは電流の変化が源になっているので，それぞれ完全に独立しているわけではないということになる。いま，仮に (1.38) と (1.39) の右辺がゼロならば

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = 0 \\ \left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} \end{cases} \tag{1.40}$$

で，真空中を c の速さで伝播する**電磁波の波動方程式**となる。

- アリス：電場の横成分は波動方程式を満たすけど，電場の縦成分 $\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)$ はどうなるかしら？

- K氏：それは次回のお話のお楽しみ。。。待つまでもなく，ご自分で Try してみるのもいいね。それはそうと，先ほど横電場と磁場はそれぞれバラバラに振舞わないといったけど，それは下に示す (1.29) の関係式からも伺える。

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1.41}$$

さて，波動方程式 (1.38)，(1.39) は波以外の解も含んでいる。それを見るのに時間微分をゼロとおいてやると

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},0) = 0 \tag{1.42}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},0) = -\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},0) \tag{1.43}$$

(1.42) は $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},0) = 0$ という解を持つね。(1.43) はどんな解をもつか，ユナ やってみるかい。

- ユナ：そうね，この方程式は先ほどでてきた Poisson 型だわね。その解は

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) = -\dot{\rho}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\dot{\rho}(\boldsymbol{x}')$$

なので，形式的な置き換えをやると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\nabla\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\times \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}',0) \tag{1.44}$$

となるかしら。

- K氏：なかなか剛腕だね（笑い）。え〜っと，(1.45) は定常電流により作られる磁場を表す式で有名な **Biot-Savart の式**だ。定常電流の作る磁場は Coulomb 力と同じ様に，電流の各要素からの距離の 2 乗に反比例しているので，遠方ではゼロになってしまう。つまり遠方では波の解のほうが圧倒的ということになるわけだね。

■電磁波の方程式

- K氏：次に，電磁波の電場と磁場の関係について見ていこう。波動方程式 (1.40) の解（平面波）をそれぞれ

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \tag{1.46}$$

とおく。ここで $\boldsymbol{k}$ は**波数ベクトル**で波の進む方向を示し，その大きさは平面波の波長を λ とすると $k = 2\pi/\lambda$ とで与えられる。また，ω は角振動数だね。上の式を (1.40) に代入すると

$$\left(-\boldsymbol{k}^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{1.47}$$

$$\left(-\boldsymbol{k}^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{1.48}$$

が得られる。$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})$ や $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ がゼロでないとき，その係数はゼロでなければならないから

$$c^2\boldsymbol{k}^2 = \omega^2 \tag{1.49}$$

いま，

$$\omega_k = c\,|\,\boldsymbol{k}\,|\begin{cases}\text{波の進行方向（}\boldsymbol{k}>0\text{)} & \cdots \quad \omega_k = ck \\ \text{逆方向（}\boldsymbol{k}<0\text{）} & \cdots \quad \omega_k = -ck\end{cases} \tag{1.50}$$

とおくと，$\boldsymbol{k}$ の向きにより

$$\omega = \pm\omega_k \tag{1.51}$$

つまり

$$\begin{cases}\omega = \omega_k(\boldsymbol{k}\text{の方向へ進む波})\text{：} & \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t} \\ \omega = -\omega_k(-\boldsymbol{k}\text{の方向へ〃})\text{：} & \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega_k t}\end{cases}$$

となる。いま，$\omega = \omega_k$ の正号のほうをとって (1.41) に入れると電場と磁場の相対方向がでてくるけど，サム やってみるかい。

- サム：はい，やってみます。(1.41) は

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

でした。右辺は $-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = i\omega_k \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}$，左辺の $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = \left(\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}, \boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}, \boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}\right)$$

但し，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k^{(1)}x_1 + k^{(2)}x_2 + k^{(3)}x_3$ とします。公式

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

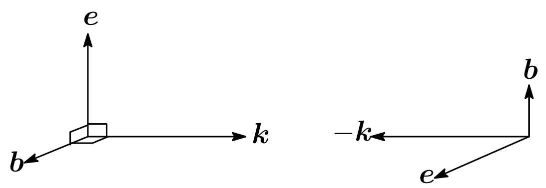
に入れて整理すると

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) &= i\Big(k^{(2)}\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) - k^{(3)}\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}), k^{(3)}\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) - k^{(1)}\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}),\\ &\qquad k^{(1)}\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}) - k^{(2)}\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})\Big) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}\\ &= i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega_k t}\end{aligned}$$

となる[5]ので，(1.41) から

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) = \omega_k \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \tag{1.52}$$

が得られ，これはベクトル $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ はそれぞれ直交し，右手系を作っていることになります。つまり電場と磁場の振幅は波の進行方向と直交しているということで，電磁波は横波ということなります。



- K氏：そうだね。次に電場の振幅 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})$ と磁場の振幅 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k})$ の関係は (1.50) と (1.52) より

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) = c \mid \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}), \quad \frac{\boldsymbol{k}}{\mid \boldsymbol{k} \mid}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) = c\boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}), \quad \therefore \mid \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \mid = c \mid \boldsymbol{b}(\boldsymbol{k}) \mid \tag{1.53}$$

となり，電場の振幅は磁場の振幅より c 倍大きい。また，(1.53) の関係から，電場と磁場はいつでも共存しているということが分かるね。$\omega = -\omega_k$ の場合も同様に議論できて，$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ が右手系を作ることがわかる。これは各自確認しておいてください。尚，光は電磁波で，われわれの目に感じられる光の成分は電場の方で，電場の作る振動面を特に**偏光面**といっているよ。

■再び電場の横成分について

＜ Faraday の電磁誘導の法則＞

- K氏：Stokes の定理というのを知っていると思うけど，次のようなものだったね。

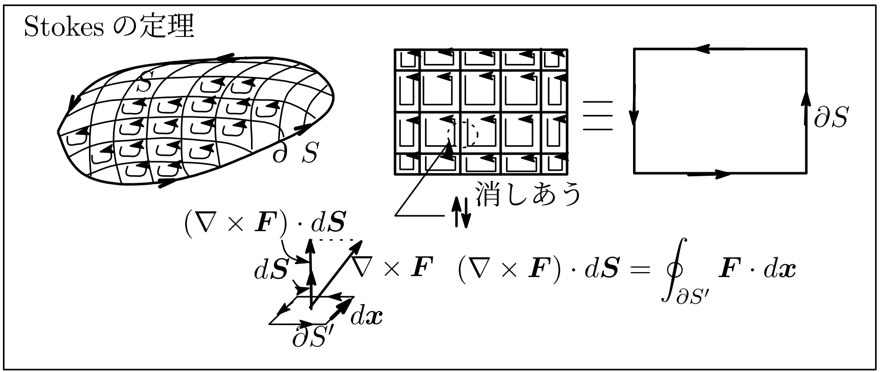
$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \oint_{\partial S}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} \tag{1.54}$$

[5] 公式：$\nabla e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = i\boldsymbol{k}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \nabla\times e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = i\boldsymbol{k}\times e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$

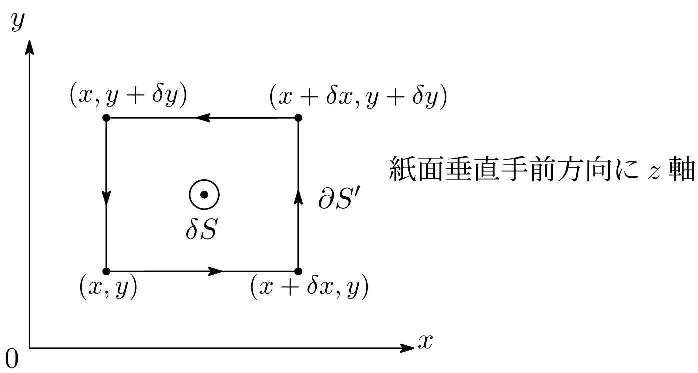
左辺は曲面 S 上の各点で定義される局所的な回転 $\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ の法線面積分で，$d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ は曲面を細かく分割した各点での面積素片ベクトル[6]だ。これが曲面 S の周辺 ∂S に沿って線積分に等しいというのが **Stokes の定理**だね。(1.54) は本質的には 1 変数の積分公式

$$\int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.55}$$

を拡張したものだと思えばよい。ここでは Stokes の定理の簡単な証明をやって先を急ぐことにしよう。下の図も参照してね。



微小閉曲線 $\partial S'$ とそれによって囲まれる微小領域 δS 上で，



曲線 $\partial S'$ に沿っての線積分は，Taylor 展開を使って整理すると

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S'} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{x} &= F_x(x,y)\delta x + F_y(x+\delta x, y)\delta y - F_x(x+\delta x, y+\delta y)\delta x - F_y(x, y+\delta y)\delta y \\
&= F_x\delta x + \left\{F_y + \delta x\frac{\partial F_y}{\partial x}\right\}\delta y \\
&\quad - \left\{F_x + \delta x\frac{\partial F_x}{\partial x} + \delta y\frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}\delta x - \left\{F_y + \delta y\frac{\partial F_y}{\partial y}\right\}\delta y + \cdots \\
&= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\delta x\delta y + O(\delta x^2) + O(\delta y^2) \\
&\fallingdotseq \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\delta x\delta y \\
&= (\nabla \times \boldsymbol{F}(x,y))_z\delta x\delta y \\
&= (\nabla \times \boldsymbol{F}(x,y))\cdot d\boldsymbol{S}(x,y) \quad (d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\delta x\delta y)
\end{aligned}$$

となり，Stokes の定理が成立することが分かる。

[6] 曲面 S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$

- ユナ：「流体力学講話・つまみ食い」の**渦度と循環**のお話の中で，“ 閉曲線に沿っての線積分を循環といい，閉曲線内に渦があれば，流速を $\boldsymbol{v}$ として，**循環は閉曲線の内部を通過する渦度（$\nabla \times \boldsymbol{v}$）の大きさの総和である** ”というのがあったけど，Stokes の定理の物理的な意味はそういうことなのね。そして，**循環は渦を取り巻く閉曲線の大きさによって変わらず，渦固有の不変量という特長を持つ**ということだったと記憶するけど。。。

- K氏：そうなんだ，よく覚えているね。いま，ある皿のような有限の曲面 S を考え，それを貫く磁場の時間的変化を計算してみよう。(1.41) に Stokes の定理を適用すると

$$\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)) = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) = -\frac{d}{dt}\int_s d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.56}$$

が得られる[7]。曲面 S を貫く磁束を

$$\Phi_B(t) = \int_s d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.57}$$

とおくと，右辺はその時間的変化に負号を付けたものになっている。尚，磁束の時間的変化は曲面 S の形によらないということに注意しておこう。というのは，面積積分と体積積分の関係を与える Gauss の定理を適用すれば

$$\int_s d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \int_V d^3\boldsymbol{x} \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad (\because \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0) \tag{1.58}$$

となり，これは任意の閉曲線に対して成り立つから。つまり，ある任意の閉じた曲面を考えたとき，その中に出入りする磁束はゼロということだね。(1.56) の真ん中の線積分は，磁束 (1.57) の時間的変化によって生じた横電場を面 S の縁 ∂S にわたって横電場を足し合わせたものとなっている。e.m.f（electromotive force），日本語では**起電力**（電流を生じさせる電位の差）を

$$\mathscr{E}_{\partial S}(t) \equiv \oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.59}$$

で定義しよう。∂S の上に電荷 e を置くと，その電荷には Lorentz 力が働き，電場は ∂S を一周する間に

$$e\mathscr{E}_{\partial S}(t) = e\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t) \tag{1.60}$$

だけの仕事をするだろう。整理すると，

$$\mathscr{E}_{\partial S}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_B(t) \tag{1.61}$$

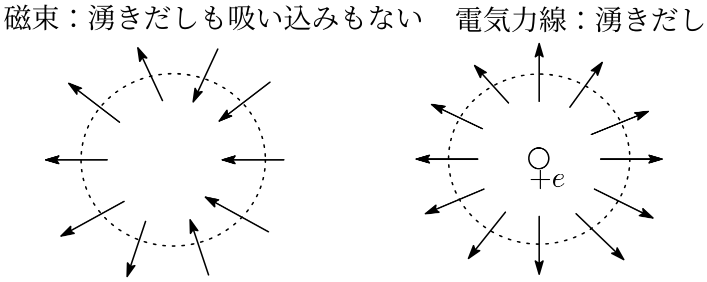
となって，これは磁束の時間的な変化が e.m.f を生じるという **Faraday の電磁誘導の法則**だね。

- キャサリン：Faraday の電磁誘導の法則というのは，1 巻きのコイルを貫く磁束に時間的な変化があったとき，コイルに誘導起電力 V が生じて，磁束の向きを右ねじの進む方向としたときのねじの回転方向を起電力の正の向きと約束して $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ というものだったわね。右辺のマイナスは，だから磁束の変化を打ち消す方向に誘導起電力が発生するということを意味しており，それを Lentz の法則と言ったわ。

- K氏：ピンポ〜ン。そうなんだ。コイルに限らず任意の閉曲線について，いま キャサリンが言ったことが成立するというのがここのお話なんだ。

[7] 右辺は変数 t だけの関数になるので t についての常微分となっている。

- コニー：ところで，先ほど任意の曲面から出入りする磁束はゼロといわれたけど，電荷であれば正負単独の電荷が存在して，正電荷は電気力線を湧きだし，負電荷は吸い込みとなりけど，任意の曲面から出入りする磁束がゼロということは単独の N とか S の磁荷が存在しない，先ほど サム が言っていたモノポールは存在しないというお話になるのね。



- K氏：そうだね。Maxwell の方程式の (1.31) の $\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ はそういう意味だね。

＜ Maxwell の変位電流＞

- K氏：さて，話を進めて (1.30) の意味を調べてみよう。これは次の式だったね。

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \right\} \tag{1.62}$$

これに Stokes の定理を適用すると左辺は

$$\int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)) = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$$

で，磁場をある閉曲線 ∂S に沿って足し合わせたもので，循環だね。一方，右辺は

$$\mu_0 \left\{ \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}_T(\boldsymbol{x}, t) \right\}$$

$$= \mu_0 \left\{ \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) \right\}$$

したがって，

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \left\{ \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) \right\} \tag{1.63}$$

右辺第 1 項は面 S を貫く電流の横成分の和（全電流）で，これは $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t) = 0$ から曲面 S の形によらない。第 2 項は，横電場の電束を

$$\Phi_E(t) \equiv \varepsilon_0 \int_S d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.64}$$

で定義すると，曲面 S を貫く横電場の電束の時間的変化で，これはあたかも電流のような働きをしており，これを **Maxwell の変位電流**（displacement current）といっている。「閉じた経路にそって磁場の大きさを足し合わせたものは閉じた経路を貫く電流の和に比例する」という **Ampare の法則**を変位電流まで拡張したものが (1.63) というわけだね。

- アリス：素直に電流と呼ばずに**変位電流**と呼んでいるのは，(1.24) でいわれた電荷の移動に伴って発生するものではなく，横電場の**電束の時間的変位**で発生する電流ということから変位電流というのね。

- K氏：そういうことだね。エ〜っと，これで一応「電磁気学再入門」の第１章を終えたいと思うんだ。テキストに載っている「単位の問題」は省略したけど，これは各自でフォローしておいてください。それでは今日はこれでおしまい，長時間お疲れ様でした。
- 全員：ありがとうございました，次回を楽しみにしてま〜す。お疲れ様でした〜。

GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！

by KENZOU

（2010.01.24 了）