# 電磁気学再入門を読む（2）

$\mathscr{KENZOU}$

2010 年 3 月 1 日

♣ 早春のある早朝，コニーら一団が楽しそうに語らいながらK氏を訪ねてきた。

- コニー：コンニチワ〜Kさん，厳しかった冬ももう終わりという感じね，梅の花も咲き始めたわ。
- K氏：や〜こんにちわ〜。みんなも元気そうだね。前回の第 1 章 Maxwell の方程式はどうだった。電場の縦成分，横成分や電流の縦成分，横成分というのには少し戸惑ったんじゃないかと思うのだけど。。。
- ユナ：そうねぇ，電場も磁場も電流もベクトルとして捉えるからそれほどでもなかったわ。電磁波の進行方向 $\boldsymbol{k}$ の方向に向いたのを縦成分とするとそれに垂直なのが横成分になるわけでしょう。
- アリス：縦成分の電場は Coulomb 場を表すというのは面白かったわ。
- キャサリン：横電場の電束の時間的変化があたかも電流のような働きをしているというのにはビックリしたわ。Maxewll の変位電流の実体はそれなのね。
- コニー：Maxwell の方程式 $\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\left\{\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right\}$ で横型電場の時間的変化の項 $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ が Maxwell の変位電流を生んでいるというくだりね。ところで，縦型電場の時間的変化は $\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)$ となって電流の縦成分で与えられけど，この式は $\varepsilon_0\nabla\dot{\boldsymbol{E}}_L(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t)=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)\rightarrow\dfrac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x},t)=0$ で電荷・電流の保存則に含まれているということね。
- エミリー：いままで電流は電荷密度の時間的変化で生じると思っていたけど，実はそうではなくて，電流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$ は，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)+\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int d^3x'\nabla\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t)}{\partial t}$ と表せる，つまり，電流には電荷密度の時間的変化と全く無関係な部分 $\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t)$ があり，電流をいつでも電荷の動きとして理解するのは無理があるということの指摘は意外だったわ。
- サム：電磁波の波動方程式から分かることは，電磁波の源は，電流そのものではなく，電流の時間的，空間的変化がその源になっているということですね。ところで，波動方程式の解は波以外の解も含んでおり，例えば電流の時間的変化がゼロ，つまり定常電流の場合を考えると Bio-Savart の式がでてくる。この偏微分方程式はいろいろな内容を凝縮 (?) して持っているという感じですね。ところで電磁場中に電荷 $e$，速度 $\boldsymbol{v}$ で等速度運動する荷電粒子を持ち込んだら，粒子には電場から $\boldsymbol{F}_e=e\boldsymbol{E}$ の力は働き，また磁場からは $\boldsymbol{F}_m=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の力が，結局粒子に働く力はそれらの合力 $\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ の Lorentz 力働く，ただしこの $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ には荷電粒子自身が作る自己場も含まれていますが，この Lorenz 力により電磁場と古典的荷電粒子との相互作用の記述が可能になるということだったと思います。この具体的なお話は第 2 章ということになるのでしょうか。
- K氏：そうだね，第 2 章では電磁場のエネルギーの定義からエネルギーの流れの密度を表す Poynting ベクトル，電磁場の慣性の流れ，電磁場と荷電粒子の系のエネルギー保存則や運動量保存則，そしてゲージ変換の話から最後に最後に粒子と電磁場の相互作用の話という盛りだくさんな内容となる。それではそろそろ始めようか。

# 目 次

# 2　物理量の定義と基礎方程式からの近似なしの結論

## 2.1　はじめに

- K氏：テキストの「§1. はじめに」には電磁場の系と力学の系の相互作用を取り扱う際に，

  **(1)** 電磁場と力学系との間にエネルギーや運動量など，その他の物理量の交換がありうるだろうか？

  **(2)** 全体の系でエネルギー保存則が成立するとして，電磁場系のエネルギーをうまく定義でるだろうか？

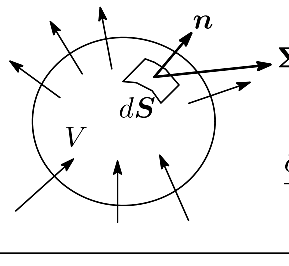
  **(3)** 全体の系での運動量やその他の物理量をどのように定義することができるだろうか？

  **(4)** 電磁波の散乱，発射や吸収の計算は何を計算すればよいのか？

  という問題が起こる。Maxwell の理論は Einstein の相対論を満たすが，Galilei 変換に対しては不変になっていない[1]ため，Newton の運動方程式と Maxwell の方程式を同時に使うことには無理がある。しかし，**座標系を限り，その座標系で粒子の速度が光のそれに比べてはるかに小さいときだけは同時に使うことはできる。**ここでは，相対論的電磁気学は特に触れないので，機会があれば各自勉強してください。
  さて，本論に進む前に**バランス方程式**というのを少し勉強してから本論に入るとしよう。

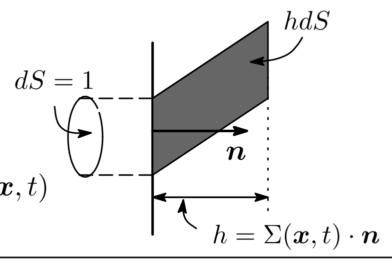
### 2.1.1　バランス方程式

- K氏：ある時間 $t$ に，空間の位置 $\boldsymbol{x}$ に**ある物理量**$\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$ が分布しているとしよう。物理量としては物質の密度や質量などの**スカラー量**でもいいし，流体の速度場のように方向をもつ**ベクトル量**でもよい。空間に固定されたある領域の体積を $V$ を考え，その**時間的変化**を問題にしてみよう。$\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$ の時間変化は，単位時間に $V$ の外から全表面から流入（流出）する量と，$V$ 内で湧き出す $\Gamma(x)$ の量との和となる。表面を通しての出入りを考えるときは，どちら向きに面を通過したかを明確にする必要があるので，面法線の方向 $\boldsymbol{n}$ を正の方向とする。単位時間に表面単位面積を通して流出する量を $\Sigma(\boldsymbol{x}, t)$ としよう。その方向は必ずしも面法線 $\boldsymbol{n}$ の方向と一致しないが，流出量は $\Sigma(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}$ で与えられる。尚，表面から流出する場合は前に負号を付ければよい。




**バランス方程式**

$$\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Sigma(\boldsymbol{x}, t) = q(\boldsymbol{x}, t)$$




$V$ 内の $\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$ の時間的変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \Gamma(\boldsymbol{x}, t) = \int_V d^3x \frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \tag{2.1}$$

で与えられる。右辺の偏微分は点 $\boldsymbol{x}$ での物理量の時間的変化を表している。体積 $V$ の中の点 $\boldsymbol{x}$ から単位時間に湧きでる量を $q(\boldsymbol{x}, t)$ とすると，$V$ 内で湧き出す量と外側へ出ていく量の差

[1] 波動方程式とガリレイ変換を参照。整合性を持たせるためには Newton の運動方程式の方をいわゆる**相対論的力学**というものに変更しなければならない。

が $V$ 内の量となるので，単位時間当たり

$$\int_V d^3x \frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \Sigma(\boldsymbol{x},t) + \int_V d^3x q(\boldsymbol{x},t) \tag{2.2}$$

が成立する。尚，$d\boldsymbol{S}$ は面積ベクトルで $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$。右辺第 1 項の面積積分は Gauss の定理[2]より体積積分に置き換えることができる。

$$\int_S dS\Sigma(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{n} = \int_V d\boldsymbol{x} \nabla \cdot \Sigma(\boldsymbol{x},t) \tag{2.3}$$

したがって，(2.2) は

$$\int_V d\boldsymbol{x} \left( \frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Sigma(\boldsymbol{x},t) - q(\boldsymbol{x},t) \right) = 0 \tag{2.4}$$

となり，体積 $V$ は任意であることから，上の被積分関数は常に 0 でなければならない。

$$\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Sigma(\boldsymbol{x},t) = q(\boldsymbol{x},t) \tag{2.5}$$

これを**バランス方程式**と呼んでいる。

- アリス：湧き出しがない場合は $q(\boldsymbol{x},t) = 0$ だから

$$\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \Sigma(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.6}$$

で，$V$ 内の物理量の単位時間の変化は流出量に等しいということね。例えば歯磨き粉のチューブから歯磨きがでてくるような感じ。

- K氏：そうだね。練り歯磨き粉の量そのものは増えもしなければ減りもしない。(2.6) を**連続の方程式**と呼び，**保存則**と密接に関係している。

### 質量保存則とバランス方程式

- $\Gamma(\boldsymbol{x},t)$ を質量としよう。質量密度を $\rho(\boldsymbol{x},t)$ とすると，$\Sigma(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ だから，(2.6) は

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\} = 0 \tag{2.7}$$

と書ける。これは質量の連続方程式で**質量保存の法則**を表す。さて，この式は

$$\frac{d\rho(\boldsymbol{x},t)}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.8}$$

とも書くことができる。このことを少しフォローしておこう[3]。点 $P(x,y,z)$ において，粒子のもつある物理量 $\varphi(x,y,z,t)$ が時間とともにどのように変わるかと考えるときには，その時間に対する変化率は偏微分 $\partial\varphi/\partial t$ で表される。これは点 $P$ における $\varphi$ の局部的変化の時間に対する割合だ。しかし，粒子は次第に位置を変えていくので，点 $P(x,y,z)$ にあった粒子は $dt$ 時間後には点 $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ に移り，$\varphi(x,y,z,t)$ は $dt$ 時間後には $\varphi(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ になる。その差を $d\varphi$ とすると，Taylor 展開により

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \varphi(x,y,z) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + (\text{高次の微小項}) \\ &= d\boldsymbol{x} \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt \quad (d\boldsymbol{x} \equiv (dx, dy, dz)) \end{aligned}$$

---

[2] $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$

[3] 流体力学での Euler の立場を思い出してください。「流体力学講話・つまみ食い (その 2)」も参照されたし。

したがって，粒子と共に変化する $\varphi$ の時間に対する変化率は

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi$$

これから微分演算子を抜き取ると

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{2.9}$$

この関係式はまた後で使う。質量の連続方程式の右辺第 2 項は，したがって

$$\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{d\rho}{dt} - \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v}$$

となる[4]ので，連続の方程式は最終的に

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2.10}$$

となる。これは (2.8) だね。

### 運動量保存則とバランス方程式

- 次に,「加えた力は単位時間の運動量の増加として保存される」という**運動量保存の法則**を見てみよう。例によって空間内に固定された領域 $V$ をとる。この中の流体の単位時間当たりの運動量の変化は

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\boldsymbol{v}dV \tag{2.11}$$

  となる。これは，表面を通って流入する運動量と，表面にかかる圧力によるもの，体積 $V$ に比例して働く体積力によるものの合計となる。体積力は圧力のように表面に働く力ではなく，体積要素に働く力で，例えば重力や浮力のようなものだ[5]。単位質量当たりに働く力を $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, t)$, 流体の密度を $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ とすると，点 $\boldsymbol{x}$ における体積要素 $\delta V$ に働く力は $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}, t)\rho\delta V$ となる。

- エミリー：ちょっと待って，表面を通って流入する運動量は分かるけど，圧力とか体積力がなぜ関係してくるのかしら。

- K氏：そうだね，運動量の時間変化は力と等しいだろう。つまり，$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ で，力が働けば（空間に固定した領域内での）運動量は変化する。だから流れがなくても，力が働けば運動量の出入りが起こるというわけだ。

- エミリー：なるほど，そういうことね。

- K氏：そこでまず，表面 $S$ を通して流入してくる運動量を考えよう。これは単位体積あたりの運動量 $\rho\boldsymbol{v}$ に面に垂直な流速成分 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_n$ をかけたものだから

$$\text{流れによる運動量の変化：}\quad -\int_S \rho\boldsymbol{v}v_n dS \tag{2.12}$$

  次に，$V$ に作用する圧力は

$$\text{圧力による運動量の変化：}\quad -\int_S p\boldsymbol{n}dS \tag{2.13}$$

---

[4] 公式 $\nabla \cdot (\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla \cdot \boldsymbol{A} + (\nabla\Phi) \cdot \boldsymbol{A}$, $\Phi$：スカラー

[5] 重力や浮力は流体要素の質量に比例し，質量は体積に比例する。Coulomb 力や Lorenz 力等の電磁力も同様に体積に比例する。

体積力は，

$$\text{体積力による運動量の変化：} \quad \int_V \rho \boldsymbol{K} dV \tag{2.14}$$

で，$V$ 内の流体の運動量の時間変化は，流れによる増加分と圧力による変化，体積力による変化の合計と等しいことから次式で表せる。

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV = \int_V \rho \boldsymbol{K} dV - \int_S (p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{v} v_n) dS \tag{2.15}$$

(2.15) を成分表記すると，$i = 1, 2, 3$ として

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v_i dV = \int_V \rho K_i dV - \int_S (pn_i + \rho v_i v_n) dS \tag{2.16}$$

となる。ここで，面積積分を体積積分に変える Gauss の定理

$$\int_S Q n_i dS = \int_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} dV \tag{2.17}$$

を使うと，(2.16)）の右辺の面積積分は

$$\int_S p n_i dS = \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV$$

$$\int_S \rho v_i v_n d\boldsymbol{S} = \int_S \rho v_i v_k n_k dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) dV$$

となる。第 2 式は，$v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \sum_{k=1}^{3} v_k n_k \equiv v_k n_k$ と書く Einstein の規約[6]を使った。以上のことを整理すると (2.16) は

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - \rho K_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) \right) dV = 0 \tag{2.18}$$

となり，体積 $V$ は任意なので，上の式が成り立つためには被積分関数は 0 でなければならない。整理すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2.19}$$

これは**運動量保存則**と呼ばれる。

## 2.2 荷電粒子の物理量

- さて，本論に入っていこう。電荷 $e$，質量 $m$ をもった 1 個の荷電粒子と電磁場からなる系を考える。粒子には Lorentz 力[7]のみ働いているとし，位置座標を $\boldsymbol{\xi}(t)$ とすると Newton の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) = e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t), t)\} \tag{2.20}$$

$\delta$ 関数を使って書けば

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) &= e\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t), t)\}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \\ &= \rho(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned} \tag{2.21}$$

[6] 1 つの項に同じ添字が 2 度現れた場合は，その添字について総和をとる。
[7] Lorenz 力にでてくる電場や磁場は，外から荷電粒子にかかる電磁場と荷電粒子自身が作る自己場も含まれる。

となる。ただし，

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv e\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) \equiv e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.23}$$

は，それぞれ荷電粒子の電荷密度と電流密度。荷電粒子の**質量密度**を $\rho^{(\mathsf{p})}$，**質量密度の流れ**（荷電粒子の運動量）を $\boldsymbol{J}^{(\mathsf{p})}$ をそれぞれ

$$\rho^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) \equiv m\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.24}$$

$$\boldsymbol{J}^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) \equiv \rho^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.25}$$

で定義する。$\rho^{(\mathsf{p})}$，$\boldsymbol{J}^{(\mathsf{p})}$ は次のようにして**電流の保存則**を満たすことが分かる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) = -\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t)\\
\therefore\quad &\frac{\partial \rho^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

ただし，$\nabla$ は $\boldsymbol{\xi}$ に作用する微分演算子であることに注意。$\nabla_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}, \frac{\partial}{\partial\xi_2}, \frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)$

### 2.2.1 質量の流れのバランス方程式

- 質量の流れ (2.25) に対して，**質量の流れの流れ**を

$$t_{ij}^{(\mathsf{p})} \equiv m\dot{\xi}_i(t)\dot{\xi}_j(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.27}$$

で定義する。そうすると，荷電粒子の**質量の流れバランス方程式**

$$\dot{J}_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) + \sum_{J=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}^{(\mathsf{p})} = f_i(\boldsymbol{x},t) \longrightarrow \dot{J}_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}^{(\mathsf{p})} = f_i(\boldsymbol{x},t) \tag{2.28}$$

が成立する（矢印の右側は，1 つの項に同じ添字が 2 度現れた場合はその添字について総和をとるという Einstein の規約を使った）。右辺は Lorenz 力。厳密な表現はともかくとして，(2.28) の左辺第 2 項 $\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}^{(\mathsf{p})}$ は，(2.15) の式からも予想されるように，表面を通して $V$ の外へ流出する運動量，右辺の Lorenz 力 $f_i(\boldsymbol{x},t)$ は，$V$ 内の荷電粒子の運動量時間変化を表している。さて，アリス 上の式を確認してくれる。

- アリス：はい，まず $\dot{J}_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t)$ を展開すると

$$\begin{aligned}
\dot{J}_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) &= m\partial_t\{\dot{\xi}_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\}\\
&= m\ddot{\xi}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) - m\dot{\xi}(t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\nabla_\xi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))
\end{aligned} \tag{2.29}$$

一方，$\partial t_{ij}^{(\mathsf{p})}/\partial\xi_j$ の方は

$$\begin{aligned}
\partial_j t_{ij}^{(\mathsf{p})} &\equiv \sum_{j=1}^{3}\partial_j t_{ij}^{(\mathsf{p})} = \partial_1 t_{i1}^{(\mathsf{p})} + \partial_2 t_{i2}^{(\mathsf{p})} + \partial_3 t_{i3}^{(\mathsf{p})}\\
&= m\dot{\xi}_i(t)\left\{\dot{\xi}_1(t)\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \dot{\xi}_2(t)\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \dot{\xi}_3(t)\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))\\
&= m\dot{\xi}_i(t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\nabla_\xi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.29) と (2.30) を足し合わせると

$$\begin{aligned} \dot{J}_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x},t) + \partial_j t_{ij}^{(\mathsf{p})} &= m\ddot{\xi}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \\ &= f_i(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{2.31}$$

となって確認完了！

- K氏：そうだね。ところで質量の流れ（荷電粒子の運動量）は粒子系だけでは保存されない。というのは力学的力ではなく電磁力 $f_i(\boldsymbol{x},t)$ が顔をだしているからね。荷電粒子の質量の流れが保存されないということは，その一部が電磁場にもっていかれたということになる。

### 2.2.2 エネルギーのバランス方程式

- 荷電粒子の**エネルギー密度**と**エネルギー密度の流れ**を次式で定義する。

$$\mathscr{E}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.32}$$

$$J_i^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) \equiv \mathscr{E}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t)\dot{\xi}_i(t) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\dot{\xi}_i(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \tag{2.33}$$

そうすると**エネルギーに対するバランス方程式**として

$$\dot{\mathscr{E}}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.34}$$

が得られる。右辺は電磁的なエネルギー[8]だ。サム，(2.34) を確認してみるかい。

- サム：はい，(2.34) の左辺は

$$\begin{aligned} &\dot{\mathscr{E}}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) = m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) - \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\nabla\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \\ \therefore\quad &\dot{\mathscr{E}}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x},t) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})} = m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \end{aligned}$$

また，(2.20) とベクトル解析の公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0$ より

$$\begin{aligned} m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) &= e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t),t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \\ &= e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}(t),t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t)) \\ &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \end{aligned}$$

となって確認できました。

- K氏：OK!　荷電粒子のエネルギーも先ほどの質量の流れと同様に，粒子系だけではエネルギーが保存されない，粒子系のエネルギーの一部は電磁場にもっていかれたと考えられる。バランス方程式の意味から考えると，(2.34) の右辺は電磁的なエネルギーが力学的なエネルギーに変化する割合を示しているといえる。
以上，荷電粒子の質量の流れやエネルギーは粒子系だけでは保存されないことが分かった。そこで，全体系のエネルギーを保存させることができるように電磁場のほうのエネルギーをうまく定義できるか，これを次に調べていこう。

---

[8] $\int d^3x\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x)$ は単位時間あたりに電場が電荷に対してする仕事（仕事率）で Joule の法則という。

### 2.3 電磁場のエネルギー

#### 2.3.1 エネルギー保存則

- K氏:いままで空間と時間はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $t$ で表していたが，これからは空間と時間をひとつの文字 $x$ で表すことにする。$\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)$ の発散を計算すると，ベクトル解析の公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$ を使えば

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) &= \boldsymbol{B}(x)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}(x)) - \boldsymbol{E}(x)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}(x)) \\ &= -\boldsymbol{B}(x)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}(x)}{\partial t} - \mu_0\boldsymbol{E}(x)\left\{\boldsymbol{J}(x) + \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(x)}{\partial t}\right\}\end{aligned}$$

となる。これを整理して

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\frac{\partial\boldsymbol{E}(x)}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(x)\frac{\partial\boldsymbol{B}(x)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) - \boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) - \boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x) \tag{2.35}$$

(2.35) をある静止した体積にわたって積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_V d^3x\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right\} \\ &= -\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) - \int_V d^3x\boldsymbol{J}(x)\cdot\boldsymbol{E}(x)\end{aligned} \tag{2.36}$$

ここで左辺の {} 内の次元（MKSA 有理単位）を調べてみると

$$\begin{cases}[\varepsilon_0] = [L^{-3}M^{-1}T^4I^2] \\ [\mu_0] = [LMT^{-2}I^{-2}] \\ [E] = [LMT^{-3}I^{-1}] \\ [B] = [MT^{-2}I^{-1}]\end{cases} \longrightarrow\ [\varepsilon_0E^2],\ [\mu_0^{-1}B^2] = [ML^2T^{-2}][L^{-3}]$$

となるので，$(1/2)\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + (1/\mu_0)\boldsymbol{B}^2(x)\}$ は，**電磁場のエネルギー密度**を表すことがわかる。そこで電磁場のエネルギー密度を $\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x)$ とすれば

$$\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \tag{2.37}$$

と書ける。次に右辺の第 1 項の意味を調べるために，電流 $\boldsymbol{J}(x)$ の存在しない（荷電粒子が存在しない）場合を考えると，(2.36) は

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) = -\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) \tag{2.38}$$

となり，**電磁場のエネルギー保存則**を示す。

$$\frac{\partial\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) = 0 \tag{2.39}$$

また，(2.38) の右辺は

$$-\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) = -\frac{1}{\mu_0}\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)) \tag{2.40}$$

と表面積分に直すことができ，これは領域 $V$ から全表面 $S$ を通して単位時間に流出していくエネルギーを表す。ということで，**電磁場のエネルギー密度の流れ**は

$$\boldsymbol{J}^{(\mathsf{ele})}(x) = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{B}(x)) \tag{2.41}$$

で定義できる。これを Poynting ベクトル[9]と呼んでいる。

- ユナ：議論を整理すると，荷電粒子が存在しない電磁場（真空中の電磁場）では，電磁エネルギー保存則が成り立ち，電磁エネルギー密度とその流れである Poynting ベクトルを定義できる，ということね。

$$\begin{cases} \text{電磁エネルギー密度} \quad \mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x) \\ \texttt{Poynting}\,\text{ベクトル} \quad \boldsymbol{J}^{(\mathsf{ele})}(x) = \dfrac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{B}(x)) \end{cases} \tag{2.42}$$

- K氏：そうだね，電磁場自体で閉じた系となっているから電磁エネルギーは保存されるわけだね。ところで，電磁場中に置かれた荷電粒子は，粒子系だけで見た場合，エネルギー保存則は成立しなかった。つまり，エネルギーの一部は電磁場にもっていかれたのだろうという話をした。

- コニー：それは，電磁場中の荷電粒子のエネルギーバランスの式 (2.34) の右辺の項 $\boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x)$ があるからだったわね。

$$\dot{\mathscr{E}}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$$

- K氏：うん。さて，(2.36) に戻って，荷電粒子を含む電磁場のエネルギーバランスの式

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x \mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) + \int_V d^3x \nabla \cdot \boldsymbol{J}^{(\mathsf{ele})} = -\int_V d^3x \boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x)$$

と荷電粒子のエネルギーバランスの式 (2.34) の積分形

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x \mathscr{E}^{(\mathsf{pe})}(x) + \int_V d^3x \nabla \cdot \boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})}(x) = \int_V d^3x \boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x)$$

を足しあわすと，上手い具合に $\boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x)$ の項が消え

$$\int_V d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) + \mathscr{E}^{(\mathsf{pe})}(x)\right\} + \nabla \cdot \left\{\boldsymbol{J}^{(\mathsf{ele})}(x) + \boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})}(x)\right\}\right] = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathscr{E}^{(\mathsf{ele})}(x) + \mathscr{E}^{(\mathsf{pe})}(x)\right\} + \nabla \cdot \left\{\boldsymbol{J}^{(\mathsf{ele})}(x) + \boldsymbol{J}^{(\mathsf{pe})}(x)\right\} = 0 \tag{2.43}$$

という連続の方程式が得られる。これは**荷電粒子を含む電磁場全体系のエネルギー保存則**を表す。

- アリス：つまり，荷電粒子の力学的エネルギーの一部は電磁エネルギー $\boldsymbol{J}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x)$ に変わってそのエネルギーは電磁場に吸い上げられ，系全体（荷電粒子と電磁場全体で閉じた系となっている）として帳尻が合うというイメージね。

[9] John Henry Poynting (1852 年 9 月 9 日-1914 年 3 月 30 日)：イギリスの物理学者。1884 年電磁場の持つエネルギーの流れの密度を表す電場と磁場のベクトル積であるポインティング・ベクトルを定式化。Oliver Heaviside(1850.5.18-1925.2.3) 英国の電気技師，物理学者，数学者もこれと独立して同時期に定式化した。

- キャサリン：前回の Maxwell の方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \rightarrow \ \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \ ??$$

で，右辺の符合を正にするとエネルギーが負となってしまうので都合がわるいというお話しがあったけど，仮に符合を正にすると電磁場のエネルギー密度は

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2(x) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)$$

となり，エネルギーはいつでも正ということと矛盾する... ナルホド納得したわ。

- ユナ：$\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{B}(x)$ という量の次元は $[MLT^{-1}][L^{-3}]$ で，これは運動量密度に当たるわね。角運動量は $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ で定義される量だから，電磁場の角運動量を $\boldsymbol{L}$ とすると

$$\boldsymbol{L} = \varepsilon_0 \int_V dV \boldsymbol{x} \times \{\boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{B}(x)\} \tag{2.44}$$

で定義できる。

## 2.4 電磁場の慣性の流れ

- 次に荷電粒子を含む電磁場の慣性の流れについて見ていこう。エネルギー密度の流れ（運動量）の時間微分をとると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{B}(x)\} &= \varepsilon_0\{\dot{\boldsymbol{E}}(x) \times \boldsymbol{B}(x) + \boldsymbol{E}(x) \times \dot{\boldsymbol{B}}(x)\} \\ &= \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}(x)) \times \boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{J}(x) \times \boldsymbol{B}(x) - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(x) \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(x))\end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。具体的に計算を進めていこう。まず，電場の方から。

$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}$ と書けるので，ベクトル解析の公式 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を使うと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x) \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(x)) &= \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\ &\qquad - \left\{(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{i})\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j})\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} + (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k})\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}\right\} \\ &= \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

ここで $x$ 成分を計算すると

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{E}(x) \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(x))\}_x &= E_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y\frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z\frac{\partial E_z}{\partial x} - \left(E_x\frac{\partial x}{\partial x} + E_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + E_z\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_x^2}{\partial x} - \left(E_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{2.46}$$

また，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(E_x E_y) = E_y\dfrac{\partial E_x}{\partial y} + E_x\dfrac{\partial E_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(E_x E_z) = E_z\dfrac{\partial E_x}{\partial z} + E_x\dfrac{\partial E_z}{\partial z} \end{cases}$$

となることを使うと，(2.46) は

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{E}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(x))\}_x &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{E}^2 + E_x\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y) - \frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{E}^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}E_x\end{aligned}$$

これを $i$ 成分表示すれば，Einstein の規約を使って

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{E}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(x))\}_i &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{E}^2 - \frac{\partial}{\partial x_j}E_iE_j + \frac{\rho}{\varepsilon_0}E_i\\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ij}\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 - E_iE_j\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}E_i \end{aligned} \tag{2.47}$$

となる。磁場の方も $(\nabla\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x) = -\boldsymbol{B}(x)\times(\nabla\times\boldsymbol{B}(x))$ だから，上の計算と全く同様にして ($\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x)=0$ を使う)

$$\{(\nabla\times\boldsymbol{B}(x))\times\boldsymbol{B}(x\}_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ij}\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 - B_iB_j\right) \tag{2.48}$$

を得る。以上のことから

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right) - \varepsilon_0E_i(x)E_j(x) - \frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x)\right\}\\ &= -\rho(x)E_i(x) + (\boldsymbol{J}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i = -f_i(x)\end{aligned} \tag{2.49}$$

が得られる。

### 2.4.1 慣性の流れの保存則

- さて，(2.49) 見通しよくするために次の量を次式で定義しよう。

$$J_i^{(\mathsf{elm})} \equiv \{\varepsilon_0\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x)\}_i \tag{2.50}$$

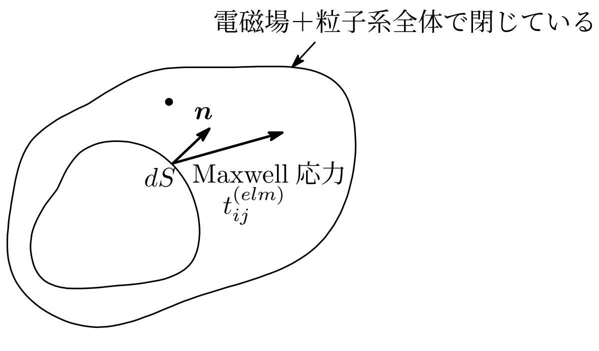
$$t_{ij}^{(\mathsf{elm})} \equiv \left\{\delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) - \varepsilon_0E_iE_j - \frac{1}{\mu_0}B_iB_j\right\} \tag{2.51}$$

$t_{ij}^{(\mathsf{elm})}$ は **Maxwell の応力テンソル**と呼ばれる。そうすると (2.49) は

$$\frac{\partial}{\partial t}J_i^{(\mathsf{elm})} + f_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}^{(\mathsf{elm})} = -\nabla_j t_{ij}^{(\mathsf{elm})} \tag{2.52}$$

と表せ，空間積分すると，Gauss の定理を使って体積積分は表面積分に直せるので，$\boldsymbol{n}$ を領域 $V$ から外向きにとった $S$ の単位法線ベクトルとして

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x J_i^{(\mathsf{elm})} + \int_V d^3x f_i(x) = -\int_V d^3x\nabla_j t_{ij}^{(\mathsf{elm})} = -\int_{\partial V} dS\, t_{ij}^{(\mathsf{elm})}(x)n_j \tag{2.53}$$



厳密な言い回しはともかくとして，左辺第 1 項は電磁場の運動量の時間変化，第 2 項は Lorenz 力による荷電粒子の運動量時間変化[10]を表し，右辺は，$V$ に外部からかかる電磁的な応力ということになる。電磁的な応力が 0，言い換えれば全体系が閉じているときには (2.53) の右辺の積分は 0 であって，全体系の慣性の流れ（運動量) は保存される。

- エミリー：サフィックスが沢山付いているので一見ややこしそうだけどこういうことね。Gauss の定理は

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \int_V d^3x \left( \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3 \right) = \int_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

なので，

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \nabla_j t_{ij}^{(\mathsf{elm})} &= \int_V d^3x \left( \frac{\partial}{\partial x_1} t_{i1}^{(\mathsf{elm})} + \frac{\partial}{\partial x_2} t_{i2}^{(\mathsf{elm})} + \frac{\partial}{\partial x_3} t_{i3}^{(\mathsf{elm})} \right) \\ &= \int_{\partial V} dS\, t_{ij}^{(\mathsf{elm})}(x) n_j \end{aligned}$$

- K 氏：うん。ということで，点粒子の質量の流れの密度に対するバランス方程式 (2.28)

$$\frac{\partial}{\partial t} J_i^{(\mathsf{p})}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_j t_{ij}^{(\mathsf{p})} = f_i(\boldsymbol{x}, t)$$

と (2.52) のバランス方程式を足しあわすと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ J_i^{(\mathsf{p})}(x) + J_i^{(\mathsf{elm})} \right\} + \nabla_j \left\{ t_{ij}^{(\mathsf{p})} + t_{ij}^{(\mathsf{elm})} \right\} = 0 \tag{2.54}$$

という連続方程式（保存則）が得られる。これは**荷電粒子と電磁場の双方の運動量を加えた系全体の運動量保存則**[11]だ。

さて，このセクションの最後に Maxwell の応力テンソルについて少し触れておく。

$$t_{ij}^{(\mathsf{elm})} = \left\{ \delta_{ij} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 \right) - \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j \right\} \tag{2.55}$$

これは 2 階のテンソル。

マトリクスで書けば

$$[t_{ij}^{(\mathsf{elm})}] = \begin{pmatrix} t_{11}^{(\mathsf{elm})} & t_{12}^{(\mathsf{elm})} & t_{13}^{(\mathsf{elm})} \\ t_{21}^{(\mathsf{elm})} & t_{22}^{(\mathsf{elm})} & t_{23}^{(\mathsf{elm})} \\ t_{31}^{(\mathsf{elm})} & t_{32}^{(\mathsf{elm})} & t_{33}^{(\mathsf{elm})} \end{pmatrix}$$

各要素は次のようなものになる。

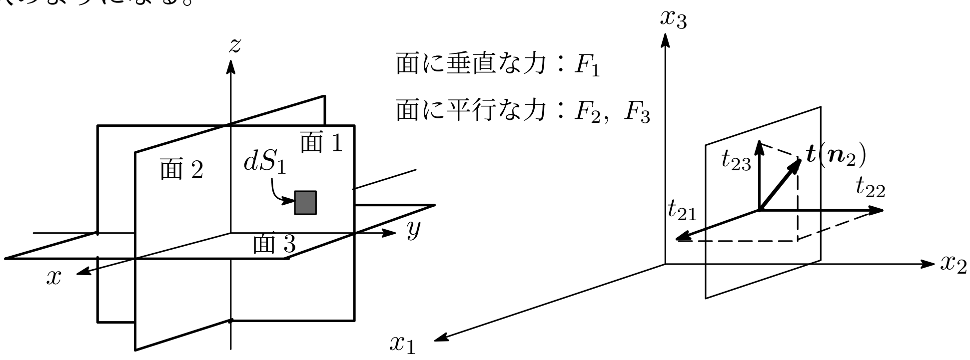
$$\begin{aligned} t_{11}^{(\mathsf{elm})} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 - \varepsilon_0 E_1 E_1 - \frac{1}{\mu_0} B_1 B_1 \\ t_{21}^{(\mathsf{elm})} &= -\varepsilon_0 E_2 E_1 - \frac{1}{\mu_0} B_2 B_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Maxwell の応力テンソルの物理的な意味は，先ほど エミリー がやった

$$\int_V d^3x \nabla_j t_{ij}^{(\mathsf{elm})} = \int_{\partial V} dS\, t_{ij}^{(\mathsf{elm})}(x) n_j$$

[10] $\boldsymbol{F} = (d\boldsymbol{p}/dt)$ を思いだそう。
[11] $J_i$ は運動量密度の次元を持つ。

で，右辺は電磁場中の領域 $V$ の表面 $d\boldsymbol{S}(=\boldsymbol{n}dS)$ に働く単位面積あたりの力（正確には $\boldsymbol{n}$ と反対側の領域に働いている力）の総和ということになる。つまり，弾性体の内部に 1 つの断面を考え，それぞれの面に働く力を考えると，面に垂直な力と面に平行な力が働き，図で書くと次のようになる。




すべての面に働く力 $F_1, F_2, F_3$ はそれぞれの面に働く力の合力だから

$$\begin{cases} F_1 = t_{11}dS_1 + t_{12}dS_2 + t_{13}dS_3 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} t_{1j}dS_j \\ F_2 = t_{21}dS_1 + t_{22}dS_2 + t_{23}dS_3 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} t_{2j}dS_j \\ F_3 = t_{31}dS_1 + t_{32}dS_2 + t_{33}dS_3 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} t_{3j}dS_j \end{cases} \longrightarrow F_{ij} = \sum_{j=1}^{3} t_{ij}dS_j$$

この $t_{ij}$ を応力テンソルといった。Maxwell の応力テンソルもこのイメージで捉えると分かりやすいと思う。

**(余録)** ――――――

電場と磁場の Maxwell の応力テンソルに分け，それぞれを $t_{ij}^{(\mathrm{el})}$, $t_{ij}^{(\mathrm{m})}$ とすると

$$t_{ij}^{(\mathrm{el})} = -\varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{E}^2\right) \tag{2.56}$$

$$t_{ij}^{(\mathrm{m})} = -\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{B}^2\right) \tag{2.57}$$

ダイアディック $\mathbf{T}^{(\mathrm{el})}$, $\mathbf{T}^{(\mathrm{m})}$ を

$$\mathbf{T}^{(\mathrm{el})} = -\varepsilon_0\left(\boldsymbol{EE} - \frac{1}{2}E^2\right) \tag{2.58}$$

$$\mathbf{T}^{(\mathrm{m})} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\boldsymbol{BB} - \frac{1}{2}B^2\right) \tag{2.59}$$

で定義すると電場，磁場の応力はそれぞれ

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{el})} = \nabla\cdot\mathbf{T}^{(\mathrm{el})} \tag{2.60}$$

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{m})} = \nabla\cdot\mathbf{T}^{(\mathrm{m})} \tag{2.61}$$

と書くことができる。尚，上の $\boldsymbol{EE}$, $\boldsymbol{BB}$ はベクトルの内積ではなくダイアド[12]である。

（余録終わり）

[12] ダイアド の Shote Note 参照。

## 2.5 電磁場の波動方程式

- 前回の§１．３．２「電場の縦成分と横成分」のところで Maxwell の方程式から電磁波の波動方程式を導いたけど，それは横成分を分離してそれが波動方程式を満たすというものだった。さて，電場の縦成分（磁場は横成分のみ）はどうなる？という疑問が湧く。ここでは正味の Maxwell 方程式から波動方程式を導出してみよう。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.62}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(x)}{\partial t} \tag{2.63}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(x) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(x) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} \right\} \tag{2.64}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(x) = 0 \tag{2.65}$$

(2.63) は磁場が時間変化するときは電場の横成分を生じる ($\because \nabla \times \boldsymbol{E}_L = 0$) ことに注目しておこう。さて，(2.63) に左から $\nabla\times$ を作用させると

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(x) &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x)) - \nabla^2 \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(x) - \nabla^2 \boldsymbol{E}(x) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{B}(x) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(x) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(x) \\
\therefore\ \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}(x) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(x) \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

次に磁場 $\boldsymbol{B}(x)$ が満たす波動方程式だが，(2.64) に左から $\nabla\times$ を作用させ，整理すると

$$\nabla^2 \boldsymbol{B}(x) = -\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{J}(x) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B}(x)$$

これから磁場の満たす波動方程式

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{B}(x) = -\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{J}(x) \tag{2.67}$$

を得る。さて，電場の横成分の波動方程式は

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x}, t)$$

なので，(2.66) からこれを差し引くと，縦電場が満たす波動方程式がでる ($\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_L(x) + \boldsymbol{E}_T(x)$)。

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho(x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.68}$$

ところで，前回，電場の縦成分の時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_L(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}_L(x)$$

となることを確認したね。この関係式を (2.68) に入れて整理すると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_L(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$$

となって，これは Coulomb の法則だ。つまり，電場の縦成分が波動方程式を満たすのは“ 見せかけ ”ということになる。

## 2.6 ベクトルとスカラーポテンシャル

- 何度もでてきたが Maxwell の方程式を書くと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.69}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(x) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(x)}{\partial t} = 0 \tag{2.70}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(x) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(x) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} \right\} \tag{2.71}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(x) = 0 \tag{2.72}$$

これは 6 個の未知数に対して 8 個の方程式があり，独立でない式も含まれるのでこのままでは扱いにくい。未知数の数と方程式の数を一致させたい。上の式を眺めると (2.70) と (2.72) は電荷と電流の分布には無関係であることが分かる。とくに (2.72) はあるベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ を使って $\boldsymbol{B}(x) \equiv \nabla \times \boldsymbol{A}(x)$ と書けることを示している。

### 2.6.1 電磁ポテンシャル

- $\boldsymbol{B}(x)$ はあるベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ を使って

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla \times \boldsymbol{A}(x) \tag{2.73}$$

と表すことができる。ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ をベクトルポテンシャルという。これを (2.70) に入れると

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}(x) + \dot{\boldsymbol{A}}(x) = 0 \tag{2.74}$$

ベクトル場の回転が 0 であれば，あるスカラーポテンシャル $A_0(x)$ を使って

$$\boldsymbol{E}(x) = -\dot{\boldsymbol{A}}(x) - \nabla A_0(x) \tag{2.75}$$

とおける。$A_0(x)$ の前の負号は便宜上のもの。そうすると，Maxwell の方程式は次のように書ける。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.76}$$

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}(x)}{\partial t} - \nabla A_0 \tag{2.77}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(x) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(x) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(x)}{\partial t} \right\} \tag{2.78}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla \times \boldsymbol{A}(x) \tag{2.79}$$

方程式の数は $1 + 3 \times 3 = 10$ 個，未知量の数は電場，磁場，ベクトル場とスカラーポテンシャルで合計 $3 \times 3 + 1 = 10$ 個となり，方程式の数と未知量の数が一致する。上の方程式がこれから取り扱う Maxwell の方程式となる。(2.77)，(2.78) と (2.79) をベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を使って整理すると

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x)) - \nabla^2 \boldsymbol{A}(x) = \mu_0 \left\{ \boldsymbol{J}(x) - \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(x) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0 \right\}$$

$$\therefore \qquad \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)\right) = \mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.80}$$

(2.76) と (2.77) より

$$\nabla^2 A_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$$

ここで次のような細工をやり

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] A_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)\right] = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.81}$$

$\chi(x)$ を

$$\chi(x) \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) \tag{2.82}$$

で定義すると，(2.81) と (2.80) は

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] A_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\chi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.83}$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \boldsymbol{A}(x) - \nabla\chi(x) = -\mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.84}$$

となる。方程式の数は 4 個，未知数はベクトル $\boldsymbol{A}(x)$ の成分 3 個とスカラーポテンシャル $A_0$ の 1 個で合計 4 個となる。ここで登場したベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ やスカラーポテンシャル $A_0(x)$ をまとめて**電磁ポテンシャル**と呼んでいる。

- ユナ：方程式の数と未知数の数が一致しなかった Maxwell 方程式が詰まるところスッキリと (2.83) と (2.84) に集約されたということね。

- K氏：そうなんだ。電流と電荷が与えられれば，電磁ポテンシャルを求めることで電場や磁場が求められるということだ。この方程式から $\chi(x)$ の項を取り去ることができれば，よく知られた Helmholtz 型の方程式になり，容易に解が求められる。そこで登場するのが**ゲージ変換**なんだね。この変換で，電場や磁場にまったく影響を与えずに $\chi(x)$ の項を方程式から消してしまおうといわけだ。

## 2.7 ゲージ変換

- え～っと，電磁ポテンシャルを使えば電場と磁場は次式で表すことができた。

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) \tag{2.85}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla \times \boldsymbol{A}(x) \tag{2.86}$$

$\phi$ を任意のスカラー関数とすると $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ というベクトル解析の公式があったね。そこで $\lambda(x)$ を任意のスカラー関数として

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}(x) + \nabla\lambda(x) \\ A_0'(x) = A_0(x) - \dfrac{\partial}{\partial t}\lambda(x) \end{cases} \tag{2.87}$$

と新たな電磁ポテンシャルを定義できる。電磁ポテンシャルを新たな電磁ポテンシャルに変換しても電場や磁場は変換前後でまったく同じ電場と磁場を与える。

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x) - \nabla A_0(x) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}'(x) - \nabla A_0'(x) \tag{2.88}$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla \times \boldsymbol{A}(x) = \nabla \times \boldsymbol{A}'(x) \tag{2.89}$$

このような変換 (2.87) を**ポテンシャルに対するゲージ変換**，任意のスカラー関数 $\lambda(x)$ を**ゲージ**と呼ぶ。ゲージ変換は (2.87) からも分かるように，電磁ポテンシャルに任意性[13]があり，このため Maxwell の方程式 (2.83), (2.84) の解は一意に決まらないことになる。そこでゲージの任意性を利用し，特定の条件，つまり**ゲージ条件**をつけて電磁ポテンシャルを選び，これを**ゲージ固定**というが，方程式を解きやすい形にすることができる。以下に，そのようなゲージ条件を見ていく。

### 2.7.1 Lorenz ゲージ

- (2.82) の $\chi(x)$ はゲージ不変ではなく，次のように変換される。

$$
\begin{aligned}
\chi(x) &= \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) \\
&= \nabla\cdot\boldsymbol{A}'(x) - \nabla^2\lambda(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{A_0'(x) + \frac{\partial}{\partial t}\lambda(x)\right\} \\
&= \nabla\cdot\boldsymbol{A}'(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0'(x) - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\lambda(x) \\
&= \chi'(x) - \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda(x) \qquad \left(\text{ただし } \chi'(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}'(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0'(x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \chi'(x) = \chi(x) + \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda(x) \tag{2.90}
$$

この変換性を利用してゲージ $\lambda(x)$ を適当に選び，(2.90) の右辺がゼロになるようにする

$$
\begin{aligned}
\chi'(x) &= \chi(x) + \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda(x) \\
&= \left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)\right) + \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda(x) = 0
\end{aligned} \tag{2.91}
$$

変換されたポテンシャルは (2.83) と (2.84) に対して次式を満足する。

$$
\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.92}
$$

$$
\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{2.93}
$$

ただし，電磁ポテンシャルは

$$
\chi(x) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) = 0 \tag{2.94}
$$

という条件がつく。また，ゲージは

$$
\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda_L(x) = 0 \tag{2.95}
$$

を満たすものであればなんでもよい。つまり，電磁ポテンシャルは一意に決まらず，任意性を残す。(2.94) を満たすようにベクトルポテンシャルの発散を制限することを **Lorenz ゲージ**をとるという。

以上の話を整理すると次のようになる。

[13] この任意性を**ゲージ自由度**という。ゲージ変換に対して理論が不変なことを**ゲージ不変性**といい、電磁場はゲージ不変である。

**(1)** 次の式を満たすようにベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ の発散を制限することを **Lorenz ゲージ**をとる[14]という。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) = 0 \tag{2.96}$$

ただし，ゲージ $\lambda_L(x)$ は

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\lambda_L(x) = 0 \tag{2.97}$$

を満たす範囲のものに限られる。逆に言うと，(2.87) より電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$, $A_0$ は $\lambda_L$ の不定性が残り，<u>unique には決まらない</u>。

**(2)** $\boldsymbol{A}(x)$, $A_0(x)$ の 4 個の成分は (2.96) を満たさなければならないので 3 個だけが独立で，さらに (2.97) を満たすゲージの任意性を利用してもう 1 つ成分を落とすことができる。結局独立な成分は 2 個となる（←横波の自由度 2 に対応）。

**(3)** Lorentz ゲージをとると電磁ポテンシャルは次の方程式を満足する。

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]A_0(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.98}$$

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}(x) \tag{2.99}$$

Lorenz ゲージを採用しても当然電流の連続の式 $\dfrac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) = 0$ は満足する。ユナ，フォローしてみるかい。

- ユナ：はい，見通しよくするために $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ という d'Alembertian 演算子を使うと (2.98) と (2.99) は

$$\begin{cases} \Box A_0(x) = -(1/\varepsilon_0)\rho(x) \\ \Box\boldsymbol{A}(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}(x) \end{cases}$$

第 1 式を時間で偏微分し，第 2 式を左から $\nabla$ を作用させると

$$\begin{cases} \Box\dfrac{\partial}{\partial t}A_0(x) = -(1/\varepsilon_0)\dfrac{\partial}{\partial t}\rho(x) = -\mu_0 c^2\dfrac{\partial}{\partial t}\rho(x) \\ \Box\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) = -\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) \end{cases}$$

この 2 式を足しあわすと

$$\Box\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x)\right) = -\mu_0\left\{\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}(x)\right\}$$

この式の左辺は Lorenz ゲージの条件 (2.96) よりゼロね。だから

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) = 0$$

- K 氏：OK! 次に Lorenz ゲージを使って Coulomb の法則をだして見よう。その下準備として次の方程式（Poisson Eq.）を考える。

$$\nabla^2\phi(x) = -\dot{\rho}(x) \tag{2.100}$$

[14] Lorentz 変換で有名な Lorentz(Henderik,Antoon,Lorentz:1853-1928）と Lorenz ゲージの Lorenz（Ludvig,Valentin,Lorenz：1829-1891）とは別人。正確にはローレンツゲージではなくローレンス・ゲージと呼ぶべきだが，大抵のテキストにはローレンツ・ゲージと書かれている。Lorenz 条件は Lorenz が 1867 年に公表。

この解は

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\dot{\rho}(x')$$

で与えられる。そこでこの解を形式的に

$$\phi(x) = -\nabla^{-2}\dot{\rho}(x)$$

とかいて，$\nabla^{-2}$ を，任意の関数を $f(x)$ とした場合，

$$\nabla^{-2}f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}f(x') \tag{2.101}$$

によって定義される**積分演算子**を導入する。そして，Laplace 演算子の逆演算子 $\nabla^{-2}$ は微分演算子 $\nabla$ と演算の順番を入れ替えてもよいとする。
電場とベクトルポテンシャルを縦・横成分に分けると

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}_T(x) + \boldsymbol{A}_L(x)\\
&\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_T(x) + \boldsymbol{E}_L(x) = -(\dot{\boldsymbol{A}}_T(x) + \dot{\boldsymbol{A}}_L(x)) - \nabla A_0(x)\\
\therefore\ &\boldsymbol{E}_T(x) = -\dot{\boldsymbol{A}}_T(x) \quad \boldsymbol{E}_L(x) = -\dot{\boldsymbol{A}}_L(x) - \nabla A_0
\end{aligned}$$

一方，磁場の方は横成分オンリーだから

$$\boldsymbol{B}(x) = \nabla\boldsymbol{A}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}_T(x)$$

ベクトル解析の公式 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ を使い，$\nabla\times\boldsymbol{A}_L(x) = 0$ を考慮すると，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_T(x) = 0$ なので，$\boldsymbol{A}_L(x)$ は形式的に

$$\boldsymbol{A}_L(x) = \nabla^{-2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x))$$

と書ける。ここで Lorenz 条件を使うと

$$\boldsymbol{A}_L(x) = -\frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\nabla\dot{A}_0(x)$$

したがって電場の縦成分は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_L(x) &= \frac{1}{c^2}\nabla^{-2}\nabla\ddot{A}_0(x) - \nabla A_0(x) = \nabla^{-2}\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)A_0(x)\\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla^{-2}\nabla\rho(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\nabla^{-2}\rho(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int d^3x'\frac{\rho(x')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

となる。これは電荷分布 $\rho(x)$ がつくる Coulomb 電場。
次に，ベクトル解析の公式 $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \nabla^2\boldsymbol{A} + \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ を使えば

$$\begin{aligned}
\nabla\left\{\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\dot{A}_0(x)\right\} &= \nabla^2\boldsymbol{A}(x) + \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}(x)) + \frac{1}{c^2}\nabla\dot{A}_0(x)\\
&= \nabla\times\boldsymbol{B}(x) + \nabla^2\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\nabla\dot{A}_0(x) = 0
\end{aligned}$$

また，

$$\dot{\boldsymbol{E}}(x) = \ddot{\boldsymbol{A}}(x) - \nabla\dot{A}_0(x)$$

なので，これを上に入れて整理し，(2.99) を使うと

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(x) = -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x)$$

$$= \mu_0\left\{\boldsymbol{J}(x) + \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(x)}{\partial t}\right\}$$

となって，Ampare の法則がでてくる。

【$\mathscr{MEMO}$】以下, 「電磁気」by 片山泰男 (Yasuo Katayama) より引用。
この任意のゲージ関数 f による、ポテンシャルの非決定性をゲージ変換 (gauge transform) といい、電磁場 (実在) の背後にあるポテンシャルは、この本質的な不定性をもつために物理的実在とはできない。しかし、電磁場を決めるポテンシャルが重要な存在であることは、明らかである。このポテンシャルの不定性は、古典電磁気の本質的な対称性を表すものとして、ゲージ対称性とよばれた。余分な自由度を削るためにポテンシャルが従う制限を"ゲージ"と呼ぶ。クーロン・ゲージは、A の発散を 0 とする保存式であり (∇・A = 0)、ローレンツ・ゲージは、ポテンシャルの 4 元発散を 0 とする連続の方程式である。(∇・A + d φ/dt= 0)

1960 年頃にアハラナス・ボーム (Aharonov-Bohm) によって、長いソレノイド外部を通過する電子の干渉縞がずれる現象が確認された。これは、磁場を通した鉄のホイスカーを通す電子の回折実験であった。理想的に長いソレノイドの外部には磁場はなく、ベクトルポテンシャルしかない。このようにポテンシャルの実在は、量子の干渉現象によって確認されたが、それは、量子力学がポテンシャル中の波動関数で記述するからであり、古典電磁気にはポテンシャルの影響はない、とは言いきれなかった。

ゲージの制限、例えばローレンツ・ゲージは、数学的な容易さのためにするものではなく、実在するポテンシャルの物理特性であり、保存則、連続の方程式であるという捉え方がある。電磁波の伝搬の方程式もクーロン・ゲージでは正しくでないという。クーロン・ゲージ∇・A= 0 は、ローレンツ・ゲージの光速を∞にする近似であり、ローレンツ変換に対するガリレオ変換に相当し、ゲージ変換は、古典電磁気にある本質的な対称性を表すわけではなく、単なる制限不足の不定性であったという可能性である。この説については、ジェルマン・ルソー (Germain Rousseaux) の "The gauge non-invariance of Classic Electromagnetism" (arXiv physics/0506203 v1 28 Jun 2005) を参照。

### 2.7.2 Coulomb ゲージ

- K：もう 1 つのゲージのとり方に **Coulomb ゲージ**[15]というのがある。これは
$$\chi(x) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) = 0 \tag{2.103}$$
というものだ。Coulomb ゲージの場合
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}_T + \boldsymbol{A}_L) = 0$$
で，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_T \equiv 0$ なので $\nabla\cdot\boldsymbol{A}_L = 0$ でなければならない。また，$\nabla\times\boldsymbol{A}_L \equiv 0$，$\boldsymbol{A}_L$ は発散も回転もないので $\boldsymbol{A}_L = 0$ としてよい。これらのことから，Coulomb ゲージでのベクトルポテンシャルは横成分 $\boldsymbol{A}_T$ しかないことになる。このときゲージ $\lambda_c$ は (2.87) より
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \nabla^2\lambda_c(x) = 0 \longrightarrow \nabla^2\lambda_c = 0 \tag{2.104}$$
の Laplace 方程式を満たすものであればよいが，無限遠方でゼロ[16]という境界条件を課するとその解は $\lambda_c = 0$ しかない。つまり，Coulomb ゲージでは Lorenz ゲージの場合と異なり，ゲージ変換の自由度はなくなる。
電場の縦成分と横成分は
$$\boldsymbol{E}_L(x) = -\nabla A_0, \quad \boldsymbol{E}_T(x) = -\dot{\boldsymbol{A}}_T(x) \tag{2.105}$$
と書ける。Coulomb ゲージでは $\boldsymbol{A}(x)$ は $\boldsymbol{A}_T(x)$ しかないので，以下 $\boldsymbol{A}(x)$ を $\boldsymbol{A}_T(x)$ と書くことにする。$\chi(x) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}A_0(x)$ となるので，(2.83) と (2.84) は
$$\nabla^2 A_0(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.106}$$
$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_T(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0(x) \tag{2.107}$$

[15] 放射ゲージとも呼ばれる。
[16] 無限遠方では場は 0。

(2.106) は Poisson の方程式で，その解は

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\rho(x')|_{t'=t} \tag{2.108}$$

これを (2.107) に入れると

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_T(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}(x) + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int d^3x'\nabla\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\rho(x')|_{t'=t}\right]$$

右辺第 2 項は Coulomb 項[17]で，これが Coulomb ゲージと呼ばれる理由だ。右辺第 1 項に前回の § 1.3.1 の (1.24) 式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{J}_T(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\nabla\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x'},t)}{\partial t}$$

を入れると

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{A}_T(x) = -\mu_0\boldsymbol{J}_T(x) \tag{2.109}$$

また，$\nabla\times\boldsymbol{B}(x) = \mu_0\left\{\boldsymbol{J}_T(x) + \varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_T(x)\right\}$, $\boldsymbol{B}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}_T(x)$ より

$$\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{A}_T(x) &= -\mu_0\left\{\boldsymbol{J}_T(x) + \varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_T(x)\right\}\\
\therefore\qquad \boldsymbol{A}_T(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'^3\frac{\boldsymbol{J}_T(x') + \varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}_T(x')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}|_{t'=t}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

が得られる。この式は，電流と変位電流が瞬間的(!?) にベクトルポテンシャルを作るということを意味するが，詳細についてはここでは立ち入らない（笑い）。

さて，いま定常電流が流れている場合を考える。この場合は $\dot{\boldsymbol{E}}(x) = 0$ なので，ベクトル解析の公式 $\nabla\times(\phi(x)\boldsymbol{F}(x)) = \nabla\phi(x)\times\boldsymbol{F}(x) + \phi(x)(\nabla\times\boldsymbol{F}(x)$ を使えば，(2.110) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_T(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'^3\frac{\boldsymbol{J}_T(x')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\\
\therefore\ \boldsymbol{B}(x) = \nabla\times\boldsymbol{A}_T(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'^3\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}_T(x')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\right)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'^3\left\{\frac{\nabla\times\boldsymbol{J}_T(x')}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|} + \nabla\left(\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|}\right)\times\boldsymbol{J}_T(x')\right\}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

ここで $\nabla$ は $\boldsymbol{x}$ にのみ作用する演算子なので，右辺第 1 項は 0 となり，結局

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\left(-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|^3}\right)\times\boldsymbol{J}_T(x')\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\left(\boldsymbol{J}_T(x')\times\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}\,|^3}\right)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

を得る。これは Bio-Savart の法則である。

以上，Coulom ゲージの話を整理すると

**(1)** Coulomb ゲージはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ の発散を次のように制限する。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) = 0 \tag{2.113}$$

[17] $|_{t'=t}$ は，時刻 $t$ で点 $\boldsymbol{x'}$ にある電荷分布が全く同一時刻の別の点 $\boldsymbol{x}$ における電場を決めていることを意味する。

**(2)** Coulomb ゲージではゲージの不定性がなく，ゲージ変換の自由度はない。

**(3)** Coulom ゲージをとると，$\boldsymbol{A}_T(x)$ の 2 成分だけが独立となる（←これは横波の自由度 2 に対応）。

ということになる。ところで，Coulomb ゲージの場合，電流の連続の式はどうなるか，サムやってみるかい。

- サム：はい。(2.83)，(2.84) より

$$\Box A_0(x) + \frac{\partial}{\partial t}\chi(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.114}$$

$$\Box \boldsymbol{A}(x) - \nabla\chi(x) = -\mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.115}$$

Coulomb ゲージでは $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) = 0$ なので $\chi(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A_0$，これを (2.114)，(2.115) に入れると

$$\nabla^2 A_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x) \tag{2.116}$$

$$\Box \boldsymbol{A}(x) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A_0 = -\mu_0 \boldsymbol{J}(x) \tag{2.117}$$

(2.116) を $t$ で偏微分し，(2.117) の左から $\nabla$ を作用させて両式を足しあわすと

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}A_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) \\ &-\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0 = -\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) \end{aligned}\right. \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}(x) = 0$$

となって，Coulomb ゲージの場合も電流の連続の式は矛盾なく成立します。

- K 氏：そうだね。Lorenz ゲージを採用しようが Coulomb ゲージを採用しようが理論はこれらゲージ変換に対し不変だった。理論に何かしらの不変性があるときそれに対応する保存量が存在した。ゲージ変換不変は電流の保存則につながるというわけだ。

## 2.8 粒子と電磁場の相互作用

- K 氏：第 2 章もいよいよ最後のセクションに入った。ここでの仕事は，いままで得られた定式を粒子の慣性の流れと運動量の関係を示す式で書き直し，粒子と電磁場の相互作用の定式化を明確にしようということだ。荷電粒子と電磁場の相互作用系 (minimal な電磁相互作用）では粒子の慣性の流れと運動量の関係は

$$m\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{p}(t) - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}(t), t)$$

で与えられる。これを使うと (2.37) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}(x) + \nabla\cdot\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)} = 0 \tag{2.118}$$

と表され，全エネルギー密度 $\mathscr{E}(x)$ とその流れ $\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}(x)$ はそれぞれ

$$\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x) + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right) \tag{2.119}$$

$$\boldsymbol{J}^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{2m^2}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{2.120}$$

となる。慣性の流れの保存則 (2.54) は全慣性密度を $J_i(x)$，その流れを $t_{ij}$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial t}J_i(x)+\frac{\partial}{\partial x_j}t_{ij}(x)=0 \tag{2.121}$$

で，$J_i(x)$ と $t_{ij}$ はそれぞれ

$$J_i(x)=(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))+\mathscr{E}_0(\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x))_i \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned} t_{ij}=&\frac{1}{m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_i\,(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})_j\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t))+\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2(x)+\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2(x)\right)\\ &-\varepsilon_0E_i(x)E_j(x)-\frac{1}{\mu_0}B_i(x)B_j(x) \end{aligned} \tag{2.123}$$

となる。そして，これらの式はゲージ変換

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}'(x)=\boldsymbol{A}(x)+\nabla\lambda(x)\\ A_0'(x)=A_0(x)+\dfrac{\partial}{\partial t}\lambda(x)\\ \boldsymbol{p}'(x)=\boldsymbol{p}(x)+e\nabla\lambda(x) \end{cases} \tag{2.124}$$

に対して不変である。
自由粒子のハミルトニアン $\mathscr{H}_0$ は

$$\mathscr{H}_0=\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 \tag{2.125}$$

だが，荷電粒子が電磁相互作用するときのハミルトニアン $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H}_0\longrightarrow\mathscr{H}-eA_0,\quad \boldsymbol{p}\longrightarrow\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A} \tag{2.126}$$

という置き換えをすればよかった。この $e$ のかかっている項が電磁場との相互作用項といわれる。上の式の $e$ のかかる項は粒子と電磁場の相互作用を表す項ということだね。そして慣性の流れ $\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$ がゲージ不変であるためには，ゲージ変換後の運動量を $\boldsymbol{p}'$ とすると

$$\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}'-e(\boldsymbol{A}+\nabla\lambda)=(\boldsymbol{p}'-e\nabla\lambda)-e\boldsymbol{A}$$

が成立しなければならない。つまり

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}+e\nabla\boldsymbol{A} \tag{2.127}$$

となるね。

以上で第 2 章が終了だ。結構ハードな話が続いたのでしんどかったけど，お疲れ様。また次回会う日を楽しみに，それじゃバ〜イ。

**(余録)** ————————

電磁場中に置かれた質量 $m$，電荷 $e$ の荷電粒子の Newton の運動方程式は (2.20) より

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}=e(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B})$$

電場，磁場を電磁ポテンシャルで表すと，(2.9) を使って

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla A_0=-\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+(\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\nabla A_0,\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

したがって，運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{\xi}} &= e\left\{-\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \nabla A_0 + (\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\xi}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\right\} \\
&= e\left\{-\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \nabla A_0 + \nabla(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{A})\right\} \\
\therefore \quad & \frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{\xi}} + e\boldsymbol{A}) = -e\nabla(A_0 - \dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}
\tag{2.128}
$$

となる。系の全運動量を $\boldsymbol{p}$，ポテンシャルエネルギーを $V$ とすると

$$
\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\nabla V \tag{2.129}
$$

と表すことができる。ここで $\boldsymbol{p}$ と $V$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= m\dot{\boldsymbol{\xi}} + e\boldsymbol{A} \\
V &= e\nabla(A_0 - \dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

$V$ のことを Schwartzschild は電気運動ポテンシャルと呼んだ。

---

$\mathscr{GOOD}$ $\mathscr{LUCK}$！
$\mathscr{SEE}$ $\mathscr{YOU}$ $\mathscr{AGAIN}$！

*by* $\mathscr{KENZOU}$