

# 電磁気学再入門を読む ( 3 )

*H E N Z O U*

2010年3月11日

梅の花も満開を迎えようとする3月のある早朝，コニー一行がK氏を訪ねてきた。

- コニー：こんにちわ～Kさん。お邪魔しま～す。
- K氏： やぁ，こんにちは。全員が揃ってきたんだね。大雪が降ったり，急に暖かくなりして，全く天気予報も当てにならないけど，元気そうで何よりだ。ところで，今日は第3章に進むわけだけど，第2章まではどうだった。
- アリス： どうだったといわれても困るけど，なかなか厳しかったわ。まぁ，繰り返し読み返していくつもりだけど。
- K氏： そうだね，繰り返し読むことは大変大事なことだね。わたしなんか，ボロボロになるまで読み返した本があるよ。
- コニー： え～っと，それでは早速第3章をはじめていただけるかしら。
- K氏： えらい気合が入っているねえ。わかりました，それではボチボチはじめようか。

## 目次

<b>3</b>	<b>電磁場の力線と調和振動子</b>	<b>2</b>
3.1	はじめに	2
3.2	力線	2
3.2.1	ベクトル場と力線	2
	＜ベクトル場＞	2
	＜力線＞	2
	＜電気力線の満たす方程式＞	4
3.2.2	電束密度と磁束密度	5
3.3	電磁場のエネルギーと応力テンソル	5
3.3.1	電気力線のエネルギー	5
3.3.2	磁力線のエネルギー	5
3.3.3	電磁場のエネルギーの流れ	6
3.3.4	応力テンソル	6
3.4	Fourier 変換	9
3.5	Fourier 係数と Maxwell の方程式	11
3.6	調和振動子による電磁場のエネルギーと慣性	14
3.6.1	電磁場のエネルギー	14
3.6.2	慣性の流れ	15
3.7	まとめ	15
3.7.1	横型電場とベクトルポテンシャル	15
3.7.2	縦型電場とスカラーポテンシャル	16

### 3 電磁場の力線と調和振動子

#### 3.1 はじめに

- K氏：電気力線とか磁力線というのは習ったことがあるだろう。磁石の上に紙を置いて砂鉄をばら撒くと、砂鉄はある曲線に沿って綺麗に並ぶね。この曲線を磁力線といった。この章では、はじめに力線を導入し、電磁場を直感的に理解していくことを紹介する。次に、話は数学的になるけど、電場、磁場を Fourier 変換し、その係数を一般化座標として用いると、電磁場というのは調和振動子の集まりと同等になる、ということを紹介する。この一般化座標を用いる方法により量子論への移行がスムーズにいくことになるんだ。このあたりの話は第5章輻射場のところで詳細に論じられている。ということで早速本論に入っていこう。

#### 3.2 力線

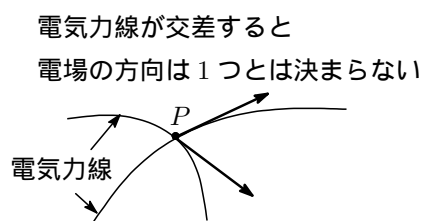
##### 3.2.1 ベクトル場と力線

<ベクトル場>

- K氏：高橋康(著)「古典場から量子場への道」<sup>1</sup>の中に、氏が約30年前にはじめて“場”というものを習ったときの印象深いお話が載っているのです、それをここで紹介しておこう。「場とは次のようなものである。まず座標系を設定する。例えば3次元の直交直線座標を考えよう。その空間の各点に、1個ずつ勝手な数字を書き込む。それらの数字全体の分布を考えたとき、それが scalar 場である。また、空間の各点に、1個ずつ矢を書き込む。これたの矢の分布を考えたとき、それが vector 場である。矢の長さが、その点における場の大きさであり、矢の方向が、その点における場の方向である。これらの矢が、あっちでもこっちでも、よきによき長くなったり、方向を変えたりしていれば、それが時間に依存する vector 場である。そのよきによきの仕方を決めるのが、場の運動方程式である」隣り合った矢の、長さや方向の関係を与えるのが空間微分で、近接作用論ではある一点の矢はすぐ隣にある矢だけから影響を受け、それが次々と伝播していく。Maxwell の方程式が空間微分に関して1階微分しか含んでいないのはこの事情によるわけで、時間に関しても直前と直後の矢との関係だけが重要で、ずっと以前や以後の矢は直接関係しないということだね。

<力線>

- ある時刻にベクトル場のある空間の中に線を書く。そしてその線上の任意の点における接線がその場所でのベクトル場の方向と一致するとき、その線をベクトル場の力線といい、電場の力線を電気力線、磁場の力線を磁力線という<sup>2</sup>。



<sup>1</sup> 1979年9月20日(第1刷)

<sup>2</sup> 電気力線を例にとれば、電気力線上の各点における接線は、すべてそれぞれの点における電場の方向を示すことになります。

電気力線と磁力線は互いに交差することができるが、電場や磁場は一価の関数だから、ある一点での電場や磁場の方向は1つしかない、つまり自分自身と交わることは決していない。

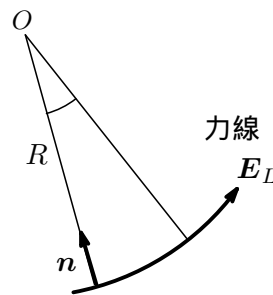
電気力線に沿って微小長さを  $dx$  としよう。この方向は接線方向で、電場  $E(x, t)$  の方向と平行なので

$$dx \times E = 0 \longrightarrow (dyE_z - dzE_y)\mathbf{i} + (dzE_x - dxE_z)\mathbf{j} + (dxE_y - dyE_x)\mathbf{k} = 0$$

いつでもこれが成り立つためには各成分がゼロでなければならないことから、電気力線は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dx}{E_x(x, t)} = \frac{dy}{E_y(x, t)} = \frac{dz}{E_z(x, t)} \quad (3.1)$$

また、縦型電場（渦無しベクトル場） $E_L(x)$  は、電気力線の曲がる方向に強くなるという性質を持つ。



$R$  を力線の曲率半径とすると  $E_L$  の曲率中心方向の傾きは

$$\frac{\partial E_L}{\partial n} = \frac{E_L}{R} \quad (3.2)$$

で与えられ、曲率が大きければ大きいほど曲がる方向に  $E_L$  は強くなる。

電場の強さが  $E$  [N/C] の点では電場の方向に垂直に単位面積当たり  $E$  本の割合（電気力線密度）で電気力線を描くこととする。電荷  $q$  がつくる Coulomb 場の場合、電荷  $q$  から距離  $r$  離れた場所の電場の強さ  $E$  は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

なので、半径  $r$  の球面を貫く電気力線の総本数はこれに球の表面積  $4\pi r^2$  をかけたものだから

$$\text{電気力線の総本数} = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

電荷  $q$  からでる電気力線の本数は  $q/\epsilon_0$  本ということになる。

電場の強さ  $E$   
 単位面積を垂直に貫く電気力線の本数が  $E$  本

単位面積  $E$  本

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

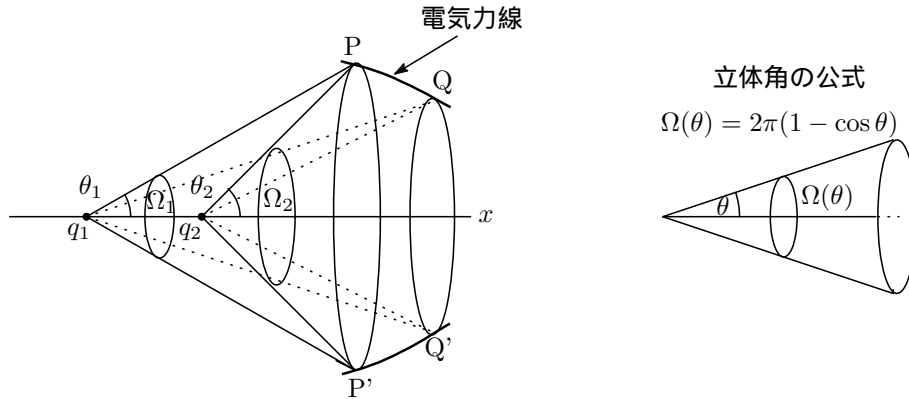
$4\pi r^2$

半径  $r$  の球面からでる電気力線の総本数

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

<電気力線の満たす方程式>

- 電荷  $q_1, q_2$  が  $x$  軸上に並んでいる場合、各電荷のつくる電気力線が満たす方程式を求めてみよう。電気力線上の1点と各電荷を結ぶ直線が  $x$  軸となす角を  $\theta_1, \theta_2$  とする。



電荷  $q_1, q_2$  から見た円板  $AA'$  の立体角をそれぞれ  $\Omega_1, \Omega_2$  とすると、立体角の公式より

$$\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos \theta_1), \quad \Omega_2 = 2\pi(1 - \cos \theta_2) \quad (3.4)$$

各電荷からはそれぞれ  $q_1/\epsilon_0, q_2/\epsilon_0$  本の電気力線があるので、円板  $PP'$  を貫く電気力線の本数はそれぞれ

$$\frac{q_1}{\epsilon_0} \times \frac{\omega_1}{4\pi} = \frac{q_1}{2\epsilon_0}(1 - \cos \theta_1), \quad \frac{q_2}{\epsilon_0} \times \frac{\omega_2}{4\pi} = \frac{q_2}{2\epsilon_0}(1 - \cos \theta_2)$$

となる。尚、 $4\pi$  は球面の立体角。したがって、円板  $PP'$  を貫く電気力線の総本数は

$$\sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{2\epsilon_0}(1 - \cos \theta_i) \quad (3.5)$$

$PQ$  を電気力線とすると、円板  $PP'$  を貫く電気力線はすべて円板  $QQ'$  を貫き、それら円板を貫く 電気力線の総数はどこでも等しい。従って、電気力線上の任意の点で

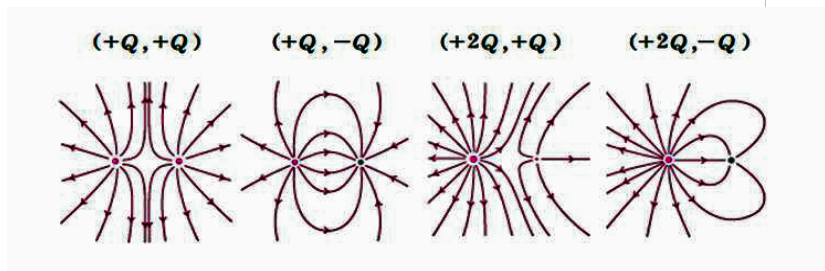
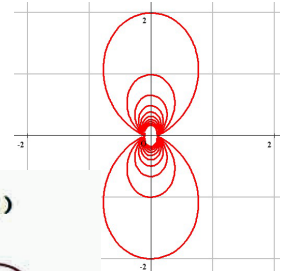
$$\sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{2\epsilon_0}(1 - \cos \theta_i) = \text{一定}$$

となり、これから

$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = C \quad (C: \text{定数}) \quad (3.6)$$

を得る。

式 (3.6) を使って、 $x$  軸上の  $(-1, 0), (1, 0)$  に電荷  $q_1 = 1, q_2 = -1$  を置いたときの電気力線の図を右図に載せる。一番外側は  $C = 0.1$  で内側に向かって  $0.1$  の刻み幅で  $C = 1.0$  の範囲までを描いた。同様にして電荷の大きさ、符号を変えると下のような図となる。



### 3.2.2 電束密度と磁束密度

- K氏：1[C]の電荷から  $q/\epsilon_0$  本の電気力線がでる。この電気力線を  $\epsilon_0$  本束ねたものを電束という。したがって  $q$ [C]の電荷からは  $q$  本の電束がでる。単位面積を垂直に貫く電気力線を  $\epsilon_0$  本束ねたものを電束密度  $D$  という。

$$D = \epsilon_0 E \quad (3.7)$$

先ほどの Coulomb 場の場合，電荷  $q$  を中心とした半径  $r$  の球の単位面積当たりの電気力線の本数は本数は  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ 。これを  $\epsilon_0$  本束ねたものが電束密度なので

$$D = \epsilon_0 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \quad (3.8)$$

となる。

+ $m$  [N/Wb] の磁極からは  $m/\mu_0$  本の磁力線がでる。この磁力線を  $\mu_0$  本束ねたものを磁束という。単位面積を垂直に貫く磁力線を  $\mu_0$  本束ねたものを磁束密度という。磁束は横型なので，任意の閉じた面について

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.9)$$

が成り立ち，閉じた曲面を貫く磁束は常に 0 である。つまり，磁力線は無限の彼方から来て無限の彼方に去っていくか，それとも自分自身で輪になっているかである。

### 3.3 電磁場のエネルギーと応力テンソル

- K氏：電磁場のエネルギー密度，エネルギー密度の流れと Maxwell の応力テンソルを力線で解釈しようというのがこのテーマとなる。
- アリス：Faraday 流の解釈をしようというわけね。

#### 3.3.1 電気力線のエネルギー

- K氏：荷電粒子が存在しない場合の電磁場のエネルギー密度は

$$\mathcal{E}^{(\text{ele})}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(x) \quad (3.10)$$

で与えられた。電場のエネルギー密度は  $(1/2)\epsilon_0 \mathbf{E}^2$ ，単位面積に垂直に通る電気力線の本数である電束密度  $D$  は  $\epsilon_0 E$  なので，1本の電気力線は単位長さあたり

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 \div \epsilon_0 E = \frac{1}{2}E \quad (3.11)$$

のエネルギーをもつことになる。

#### 3.3.2 磁力線のエネルギー

- 1本の磁力線の単位長さあたりのエネルギーも同様にして  $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} B$  のエネルギーをもつことがわかる。

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \div B = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} B \quad (3.12)$$

### 3.3.3 電磁場のエネルギーの流れ

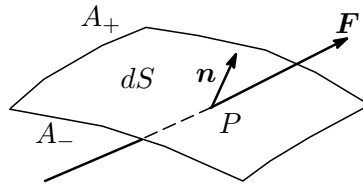
- 電磁場のエネルギー密度の流れは

$$\mathbf{J}^{(\text{ele})}(x) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(x) \times \mathbf{B}(x) \quad (3.13)$$

で与えられた。電気力線と磁力線が交差するところでは、面積  $dS$  を通して単位時間当たり  $(1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$  のエネルギーが流れている。当然、電場と磁場が交差せず平行なところは  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0$  となって、エネルギー流はない。

### 3.3.4 応力テンソル

- K氏：連続体の中に点  $P$  を通る1つの面要素を考えよう。



法線方向の単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  として、面  $dS$  を挟んで法線方向にある部分を  $A_+$ 、反対方向にある部分を  $A_-$  とする。 $dS$  を通しての応力  $FdS$  は  $A_+$  の部分が  $A_-$  の部分に及ぼす力<sup>3</sup>で、これは一般には  $\mathbf{n}$  と平行でなく、また、点  $P$  の位置によっても変わるので、応力は  $\mathbf{n}$  の関数ということになる。

$\mathbf{F}$  と  $\mathbf{n}$  が平行であれば法線応力、直角であればせん断応力といい、一般にはこれら力の組み合わせになる。一方、 $\mathbf{n}$  をどんな方向にとっても  $\mathbf{F}$  が同じ大きさである場合は、それを静水応力といい、水圧等はこれに当たる。

さて、法線応力の場合、 $\mathbf{F} \parallel \mathbf{n}$  で向きが同じ場合、つまり  $A_+$  の部分が  $A_-$  部分を引っばっているとき、それを張力といい、向きが反対の場合、圧力という。点  $x$  における微小面  $\Delta S$  に作用する応力を  $\mathbf{F}(x, \mathbf{n})$  と書くと、応力テンソルを  $\mathbf{T}$  として

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}\Delta S \quad (3.14)$$

と表される。具体的に書くと

$$F_i(x, \mathbf{n}) = \Delta S \sum_{j=1}^3 T_{ij}n_j = T_{ij}n_j\Delta S \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \Delta S \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

と表せる<sup>4</sup>。したがって、微小面  $\Delta S$  に作用する応力の  $x, y, z$  成分は

$$\begin{aligned} F_x &= \Delta S(T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z) \\ F_y &= \Delta S(T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z) \\ F_z &= \Delta S(T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z) \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>3</sup> 応力は単位面積当たりの面積力。

<sup>4</sup>  $T_{11}, T_{22}, T_{33}$  が法線応力、 $T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$  がせん断応力

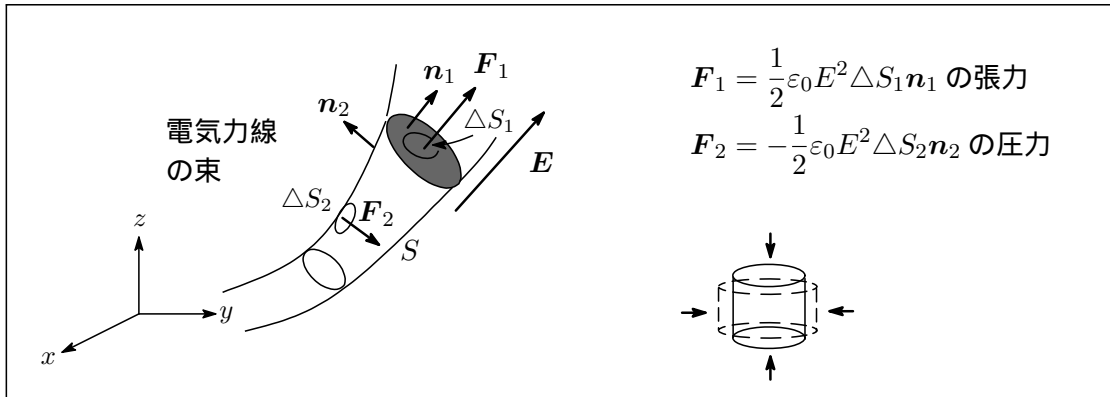
で与えられる。

Maxwell の応力テンソルは

$$t_{ij}^{(\text{elm})} = \left\{ \delta_{ij} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) - \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j \right\} \quad (3.18)$$

で与えられた。電場に関係するところを  $t_{ij}^{(e)}$  とすると

$$-t_{ij}^{(e)} = \varepsilon_0 E_i E_j - \frac{\varepsilon_0}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$



$$F_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_1 n_1 \text{ の張力}$$

$$F_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_2 n_2 \text{ の圧力}$$

いま、電気力線の束の一部を考え、断面と側面に作用する応力を調べてみよう。電場  $\mathbf{E}$  と直交する等電位面上の微小面を  $\Delta S_1$  とする。電場は断面の法線ベクトル  $\mathbf{n}_1$  と平行になるので、単位ベクトルを  $i, j, k$  とすると、 $\mathbf{E} = E\mathbf{n}_1 = E n_{1x} \mathbf{i} + E n_{1y} \mathbf{j} + E n_{1z} \mathbf{k}$  と表すことができ、微小面  $\Delta S_1$  に作用する力の  $x$  成分は (3.17) と (3.19) より

$$F_{1x} = \Delta S_1 (T_{xx} n_{1x} + T_{xy} n_{1y} + T_{xz} n_{1z})$$

$$\begin{cases} T_{xx} = \varepsilon_0 (E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) \\ T_{xy} = \varepsilon_0 E_x E_y = \varepsilon_0 E^2 n_{1x} n_{1y} \\ T_{xz} = \varepsilon_0 E_x E_z = \varepsilon_0 E^2 n_{1x} n_{1z} \end{cases}$$

$$\therefore F_{1x} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_1 n_{1x}$$

となる。同様にして  $F_{1y} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_1 n_{1y}$ ,  $F_{1z} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_1 n_{1z}$  を得るので、これらの力の合力である  $\mathbf{F}_1$  は

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j} + F_{1z} \mathbf{k} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_1 \mathbf{n}_1 \quad (3.20)$$

で与えられる。この力は断面  $\Delta S_1$  に対して外向きに垂直に働く力なので、単位面積当たりの力の大きさ  $\varepsilon_0 E^2 / 2$  の張力<sup>5</sup>である。言い換えると、電気力線は縮まろうとする。

次に、側面に作用する力を調べてみよう。側面の微小面を  $\Delta S_2$ 、その面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}_2$  とする。このとき電場の方向と  $\mathbf{n}_2$  は直交しているので

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_2 = E_x n_{2x} + E_y n_{2y} + E_z n_{2z} = 0 \quad (3.21)$$

<sup>5</sup> 張力：物体のある平面において、引っ張り合う応力として定義される。

となる。(3.17) と (3.21) より

$$\begin{aligned}
 F_{2x} &= \Delta S_2(T_{xx}n_{2x} + T_{xy}n_{2y} + T_{xz}n_{2z}) \\
 &= \varepsilon_0 \Delta S_2 \left\{ \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)n_{2x} + E_x E_y n_{2y} + E_x E_z n_{2z} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \Delta S_2 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) n_{2x} \\
 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_2 n_{2x} \\
 \therefore \mathbf{F}_2 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta S_2 \mathbf{n}_2
 \end{aligned}$$

が得られる。この力は法線と逆方向に作用する力で、単位面積あたりに  $\varepsilon_0 E^2/2$  の大きさの圧力で、隣接する電気力線の束はお互いに押し合っている、言い換えると、電気力線は互いに反発しあっていることになる。

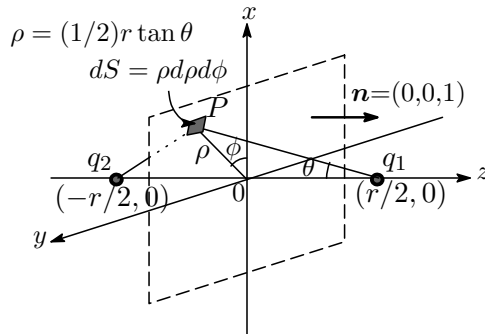
以上の話を整理すれば、

- (1) 電気力線の断面には  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  の張力が働く … 電気力線は縦の方向（電場の方向）に縮まろうとする。
- (2) 電気力線の側面には  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  の圧力が働く … 電気力線は横の方向（電場に垂直な方向）に膨らもうとする。
- (3) この張力と圧力が平衡して力線を一定の形に保つ。

ということになる。磁力線も全く同じ議論ができて、

- (1) 磁力線の断面には  $\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$  の張力が働く
- (2) 磁力線の側面には  $\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$  の圧力が働く
- (3) この張力と圧力が平衡して力線を一定の形に保つ。

Maxwell 応力から Coulomb の法則を導いてみよう。図に示すように  $z$  軸上に電荷  $q_1, q_2$  を置き、 $xy$  面上で  $q_1$  の  $q_2$  に及ぼす力を計算しよう。



図において、 $xy$  平面上の点  $P$  における電場を求めると

$$\begin{cases}
 E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{(r/2 \cos \theta)^2} \sin \theta \cos \phi = \frac{q_1 + q_2}{\pi\varepsilon_0 r^2} \cos^2 \theta \sin \theta \cos \phi \\
 E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{(r/2 \cos \theta)^2} \sin \theta \sin \phi = \frac{q_1 + q_2}{\pi\varepsilon_0 r^2} \cos^2 \theta \sin \theta \sin \phi \\
 E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 - q_2}{(r/2 \cos \theta)^2} \cos \theta = -\frac{q_1 - q_2}{\pi\varepsilon_0 r^2} \cos^3 \theta
 \end{cases} \quad (3.22)$$



となる。Maxwell 応力は

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{zx} = E_z E_x = -\frac{q_1^2 - q_2^2}{\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \cos^5 \theta \sin \theta \cos \phi \\ T_{zy} = E_z E_y = -\frac{q_1^2 - q_2^2}{\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \cos^5 \theta \sin \theta \sin \phi \\ T_{zz} = E_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 = E_z^2 - \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \\ \quad = \frac{1}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \{ (q_1 - q_2)^2 \cos^6 \theta - (q_1 + q_2)^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta \} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

したがって点  $xy$  面に働く力は<sup>6</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \int_S T_{zx} d\mathbf{S} = 0 \\ F_y = \int_S T_{zy} d\mathbf{S} = 0 \\ F_z = \int_S T_{zz} d\mathbf{S} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi T_{zz} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta d\phi = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

となって Coulomb 力が得られる。 $q_1 = q_2$  のとき, (3.23) より  $E_z = 0$  で, 電気力線は  $xy$  平面近くで平行になり互いに圧力  $T_{zz} = -\frac{1}{2\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \{ (q_1 + q_2)^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta \}$  で反発して斥力になっている ( $T_{zx} = T_{zy} = 0$ )。一方,  $q_1 = -q_2$  のときは,  $E_x = E_y = 0$  で, 電気力線は  $xy$  平面近くで面に垂直になり引力  $T_{zz} = \frac{2}{\pi^2 \varepsilon_0 r^4} q_1^2 \cos^6 \theta$  になっている。

### 3.4 Fourier 変換

- K 氏: 一辺が  $L$  の大きな立方体に閉じ込められた電磁場を考える。周期的境界条件を使って, 電磁場を Fourier 変換<sup>7</sup>すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{p}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{q}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.26)$$

Fourier 係数  $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}, \mathbf{q}_{\mathbf{k}}$  は複素数ベクトルで,  $\sum_{\mathbf{k}}$  は周期的境界条件を満たすために

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \iff k_i = \frac{2\pi}{L_i} n_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.27)$$

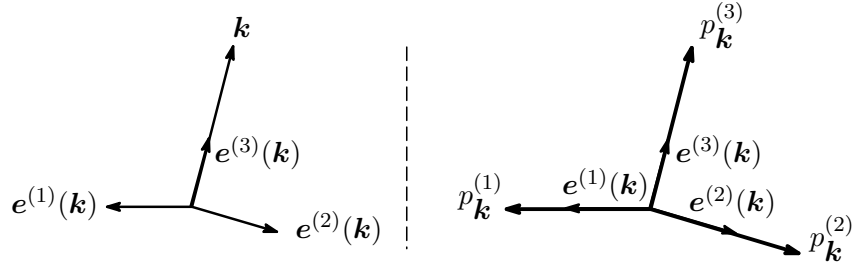
のすべての  $\mathbf{n}$  についての 3 重の和である。3 つの互いに直交する単位ベクトル  $e^{(1)}(\mathbf{k}), e^{(2)}(\mathbf{k}), e^{(3)}(\mathbf{k})$  を導入し, 磁場が横成分しかもっていないことを考慮して 3 つ目の単位ベクトルを  $\mathbf{k}$  の方向

$$e^{(3)}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (3.28)$$

にとる。

<sup>6</sup>  $x, y$  成分は  $\phi$  積分の結果消える。積分計算は *Mathematica ONLINE INTEGRATOR* を使えばよい。

<sup>7</sup> 波数  $\mathbf{k}$  の多数の波の重ね合わせ。輻射場の量子論では Coulomb ゲージを採用し, ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の Fourier 変換が使われる。



この3個の単位ベクトルの間には，直交条件と完全性の条件<sup>8</sup>が各  $k$  について成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{直交条件: } e^{(r)}(\mathbf{k}) \cdot e^{(s)}(\mathbf{k}) = \delta_{rs} \\ \text{完全性条件: } \sum_{r=1}^3 e_i^{(r)}(\mathbf{k}) e_j^{(r)}(\mathbf{k}) = \sum_{r=1}^2 e_i^{(r)}(\mathbf{k}) e_j^{(r)}(\mathbf{k}) + e_i^{(3)}(\mathbf{k}) e_j^{(3)}(\mathbf{k}) \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{r=1}^2 e_i^{(r)}(\mathbf{k}) e_j^{(r)}(\mathbf{k}) + \frac{1}{k^2} k_i k_j \\ \qquad \qquad \qquad = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Fourier 係数をこれらの単位ベクトルで展開すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_{\mathbf{k}} = e^{(1)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(1)} + e^{(2)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(2)} + e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(3)} = \sum_{r=1}^3 e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{k}} = -i \{ e^{(1)}(\mathbf{k}) q_{\mathbf{k}}^{(1)} + e^{(2)}(\mathbf{k}) q_{\mathbf{k}}^{(2)} \} = -i \sum_{r=1}^2 \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) q_{\mathbf{k}}^{(r)} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

と書ける。Fourier 成分の  $k$  の方向を向いたのを縦成分， $k$  と垂直なのを横成分という。また，横成分の  $e^{(1)}(\mathbf{k})$ ,  $e^{(2)}(\mathbf{k})$  を偏極ベクトルと呼んでいる<sup>9</sup>。尚，(3.30) の第2式で虚数  $i$  をつけているのは便宜上である。これらの係数を使って (3.25)，(3.26) を書き直すと

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.34)$$

となる。電場や磁場は実数だから，

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^*(\mathbf{x}, t) \quad (3.35)$$

でなければならない。 $*$  は複素共役を意味する。縦電場の複素共役は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L^*(\mathbf{x}, t)_L &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(3)*}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(3)}(-\mathbf{k}) p_{-\mathbf{k}}^{(3)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{-\mathbf{k}}^{(3)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

<sup>8</sup> 任意のベクトルが基底ベクトルの一次結合で表されるための条件。

<sup>9</sup> 偏極とはある特定の方向に偏ること。

となる。 $e^{(3)}(-\mathbf{k})$  は  $e^{(3)}(\mathbf{k})$  と向きが正反対となるので  $e^{(3)}(-\mathbf{k}) = -e^{(3)}(\mathbf{k})$  となることに注意。次に横電場と磁場の複素共役は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^*(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(-\mathbf{k}) p_{-\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{-\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^*(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) q_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 (-\mathbf{k}) \times e^{(r)}(\mathbf{k}) q_{-\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) q_{-\mathbf{k}}^{(r)*}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.35) の条件より各係数の関係は

$$\begin{cases} p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) = -p_{-\mathbf{k}}^{(3)*} \longrightarrow p_{\mathbf{k}}^{(3)*}(t) = -p_{-\mathbf{k}}^{(3)} \\ p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) = p_{-\mathbf{k}}^{(r)*} \longrightarrow p_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) = p_{-\mathbf{k}}^{(r)} \quad (r=1, 2) \\ q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) = q_{-\mathbf{k}}^{(r)*} \longrightarrow q_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) = q_{-\mathbf{k}}^{(r)} \quad (r=1, 2) \end{cases} \quad (3.39)$$

を満たしていなければならない。Fourier 係数の次元を調べると

$$\left[ p_{\mathbf{k}}^{(r)} \right] = M^{\frac{1}{2}} L T^{-1} \quad (3.40)$$

$$\left[ q_{\mathbf{k}}^{(r)} \right] = M^{\frac{1}{2}} L \quad (3.41)$$

となり，共に力学的な次元を持つことがわかる。特に，(3.40) と (3.41) の積は角運動量の次元  $M L^2 T^{-1}$  を持つことに注目しておこう。

### 3.5 Fourier 係数と Maxwell の方程式

- Maxwell 方程式は，何度もでてきたが，これを Fourier 変換していく。

$$\begin{cases} (1) \text{Coulomb の法則} & : \nabla \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \\ (2) \text{Faraday の法則} & : \nabla \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ (3) \text{磁場の空間分布} & : \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \left\{ \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} \\ (4) \text{単磁極} & : \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

まず (1) は，

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

なので，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{x}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot e^{(3)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}| p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

これから

$$\rho(\mathbf{x}, t) = i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{V}} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}| p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.43)$$

これを Fourier 逆変換<sup>10</sup> すると

$$|\mathbf{k}| p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) = -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.44)$$

が得られる。

次に (2) は<sup>11</sup>

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} \mathbf{k} \times e^{(r)}(\mathbf{k}) \dot{q}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.45)$$

となり, これから次の簡単な式に還元される。

$$p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) = \dot{q}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) \quad (r = 1, 2) \quad (3.46)$$

この式はなにやら調和振動子のイメージを<sup>ほうふつ</sup>とさせる!

次の3式を磁場の空間分布の式 (3) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) \mathbf{k}^2 q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) \dot{p}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\Rightarrow \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \left\{ \dot{p}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) + c^2 \mathbf{k}^2 q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \xi_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) \right\} = 0 \quad (3.48)$$

が得られる。 $\xi_{\mathbf{k}}^{(r)}(t)$  は  $\mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t)$  の逆 Fourier 変換より

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 e^{(r)}(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ \rightarrow \xi_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V e^{(r)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (r = 1, 2) \end{aligned}$$

となるので, (3.48) より次の関係式が得られる。

$$\dot{p}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) + c^2 \mathbf{k}^2 q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V d^3x e^{(r)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (r = 1, 2) \quad (3.49)$$

この式は (3.46) より

$$\dot{q}_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) + c^2 \mathbf{k}^2 q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) = Q^{(r)}(\mathbf{k}, t) \quad r = 1, 2 \quad (3.50)$$

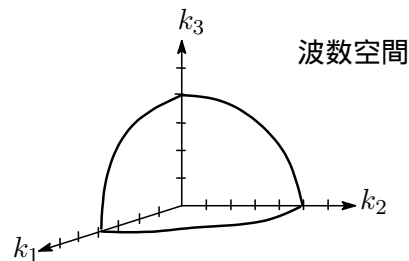
と表すことができ, 各波数  $\mathbf{k}$  について2つの独立な外力 (横型電流による強制力) がかった角振動数  $\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|$  の調和振動子<sup>12</sup> とまったく同等ということになる。

<sup>10</sup>  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k) e^{ikx} dk \leftrightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx$

<sup>11</sup>  $\nabla$  の Fourier 変換は  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$  と置き換えればよい。

<sup>12</sup> 一定の外力  $F$  を受けた調和振動子の運動方程式は  $m\ddot{x} + m\omega^2 x = F$  で与えられる。

- アリス：ゴタゴタした計算が続いたけど，その目的は電磁場は調和振動子の集まりと同等ということを引き出すことにあったのね。つまり，光（電磁波）の振動は普通の力学系の振動となんら異なるところがないということ？
- K氏：そうだね。
- エミリー：電磁場は調和振動子の集まりと同等ということは，電磁場は調和振動子が空間にいっぱい分布しているというイメージで捉えればいいの？
- K氏：素直な疑問だね。(3.50)には調和振動子の変数に位置座標  $x$  は含まれていないだろう。つまり，調和振動子が空間のどの位置にあるのかということの問題にはいけない（笑い）ということなんだ。逆に言うと，一辺  $L$  の立方体の空間全体にわたって一様に存在するという事だね。波には，波の位置と波数  $k$  の間に  $\Delta x \Delta k \sim 1$  という不確定性関係が存在し， $k$  を正確に指定すれば完全に位置はぼやけることになる<sup>13</sup>。
- ユナ： $k = (2\pi/L)n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ということだから調和振動子は無限個あるということになるわね。ということは，電磁場のエネルギーは無限大になるのじゃないかしら。
- K氏：う～ん，痛いところを突くなあ～（笑い）。現実には無限大のエネルギーにはならない。それでは何かが間違っていたのかということだけど，そこから Planck の量子発見に結びついていくんだね。この話はやれば長くなるのでここでは省略するとして，波数空間において  $k \sim k + dk$  の間に何個の調和振動子があるか，ユナ計算してみるかい。



- ユナ：波数空間では  $k$  の値は  $2\pi/L$  の間隔で飛び飛びね。つまり，体積  $(2\pi/L)^3$  について  $k$  が 1 個存在することになるわ。だから，単位体積あたりでの数を  $w(k)$  とすると

$$w(k) = \frac{1}{(2\pi/L)^3} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$$

原点から  $k \sim k + dk$  の球殻の体積は  $4\pi k^2 dk$  なので，求める個数は  $r = 1, 2$  の 2 つの偏極分を加味して

$$2 \times \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \times 4\pi k^2 dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

となるわね。

- K氏：そうだね。ついでに重要な関係式を載せておくよ。 $k$  空間内の隣接点間の距離が  $2\pi/L$  なので，その密度は  $(L/2\pi)^3$  で， $V \rightarrow \infty$  極限では

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \quad (3.51)$$

となる。

<sup>13</sup> 「量子力学」のセクションの「ガウス波束とダイナミクス」のレポートも参照されたし。

### 3.6 調和振動子による電磁場のエネルギーと慣性

#### 3.6.1 電磁場のエネルギー

- 電磁場のエネルギーを調和振動子の座標で書いてみよう。全空間に含まれる電磁場エネルギーはエネルギー密度を全空間にわたって積分したものだから、それを  $H^{(\text{em})}$  とすると

$$\begin{aligned}
 H^{(\text{em})} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3x \mathbf{E}^2(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0} \int_V d^3x \mathbf{B}^2(x) \\
 &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \left\{ \varepsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(x) \right\} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3x \mathbf{E}_L^2(x) \\
 &\equiv H_{\text{rad}} + H_{\text{Coul}}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

となる。ここで縦型電場と横型電場は直交するという条件

$$\int_V d^3x \mathbf{E}_T(x) \cdot \mathbf{E}_L(x) = 0$$

を使った。電場や磁場は Fourier 変換による複素ベクトルで与えられたから、それらの 2 乗はそれぞれ  $E^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}^*$   $B^2 = \mathbf{B}\mathbf{B}^*$  としなければならない。

直交条件

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad \begin{cases} 1 : \mathbf{k} = \mathbf{k}' \\ 0 : \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \end{cases} \tag{3.53}$$

に留意しながら  $H_{\text{rad}}$  を展開すると

$$\begin{aligned}
 H_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \left\{ \varepsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(x) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{r=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ p_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) q_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) \right\} \quad (\omega_{\mathbf{k}}^2 = c^2 \mathbf{k}^2)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

となる。これは解析力学でおなじみの調和振動子の Hamiltonian である。

次に  $H_{\text{Coul}}$  は

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V d^3x \mathbf{E}_L^2(x) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}^{(3)*}(t) p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) \tag{3.55}$$

となる。この式の意味を調べるために、まず (3.43) を逆 Fourier 変換して  $p_{\mathbf{k}}$  を求めると

$$p_{\mathbf{k}}^{(3)}(t) = -\frac{1}{|\mathbf{k}|} \frac{i}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V d^3x \rho(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.56}$$

(3.56) を (3.55) に入れ、(3.51) を使うと

$$\begin{aligned}
 H_{\text{Coul}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int_V d^3x \int_V d^3x' \rho(x) \rho(x') \frac{1}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x \int_V d^3x' \int d\mathbf{k} \frac{1}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
 &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

となって、荷電粒子との間の Coulomb 相互作用によるエネルギーを表すことが分かる。ここで次の Fourier 変換を使った。

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (3.58)$$

- コニー：前回の §2.3 「電磁場のエネルギー」の「エネルギー保存則」の項で、電磁場のエネルギーと荷電粒子の運動エネルギーの総和が保存されるというお話があったけど、系全体のエネルギーは、“調和振動子のエネルギー + Coulomb 相互作用によるエネルギー + 荷電粒子の運動エネルギー”ということになるのね。

- K 氏：そうだね。

### 3.6.2 慣性の流れ

- 次に“慣性の流れ”を一般化座標で書いてみよう。慣性の流れの密度は (2.50) で

$$\mathbf{J}^{(\text{elm})}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.59)$$

だった。これを全空間で積分したものを  $G$  とすると

$$\begin{aligned} G &= \int_V d^3x \mathbf{J}^{(\text{elm})}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{i}{V} \int_V d^3x \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^3 e^{(r)}(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \times \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{r'=1}^2 \mathbf{k}' \times e^{(r')}(\mathbf{k}') q_{\mathbf{k}'}^{(r')*}(t) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ &= i \sum_{r=1}^2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left\{ p_{\mathbf{k}}^{(r)}(t) q_{\mathbf{k}}^{(r)*}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。ただし、ここで次の展開式を使った。

$$e^{(r)}(\mathbf{k}) \times (\mathbf{k}' \times e^{(r')}(\mathbf{k}')) = \mathbf{k}' (e^{(r)}(\mathbf{k}) \cdot e^{(r')}(\mathbf{k}')) - e^{(r')}(\mathbf{k}') (\mathbf{k}' \cdot e^{(r)}(\mathbf{k}))$$

(3.60) は、電磁場（調和振動子系）のもつ運動量（慣性の流れ）で、波数  $k$  に比例しているという点に注目しよう。  $p_k q_k$  は角運動量の次元を持っていた。量子力学で運動量は  $p = \hbar k$  と表され、 $\hbar$  は角運動量の次元を持っていたことを思い出すと、なかなか意味深だ。

## 3.7 まとめ

- K 氏：電場や磁場を Fourier 変換し、その係数を一般化座標として採用すると、電磁場は調和振動子の集まりだということが分かった。ここでは、Coulomb ゲージを採用して議論を再度整理していこう。

### 3.7.1 横型電場とベクトルポテンシャル

- 電場は電磁ポテンシャルを使うと (2.70) に示したように

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \nabla A_0(\mathbf{x}) \quad (3.61)$$

だった。上の式に左から  $\nabla$  をかけると

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_T(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_L(\mathbf{x})) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \nabla^2 A_0(\mathbf{x})$$

Coulomb ゲージでは  $\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0$  , また ,  $\nabla^2 A_0(x) = -\nabla \cdot \mathbf{E}_L(x)$  なので , 上の式は

$$\dot{\mathbf{A}}_T(x) = -\mathbf{E}_T(x) \quad (3.62)$$

となる。次に , (3.42) の磁場の空間分布の式より

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_T(x) &= c^2 \nabla \times \mathbf{B}(x) - c^2 \mu_0 \mathbf{J}_T(x) = c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_T(x)) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \\ &= c^2 \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_T(x)) - \nabla^2 \mathbf{A}_T(x) \} - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \\ &= -c^2 \nabla^2 \mathbf{A}_T(x) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \end{aligned} \quad (3.63)$$

が得られる。(3.62) と (3.63) は未知数が 6 個 (ベクトルポテンシャル, 電場, 電流の各横成分だから  $3 \times 2 = 6$ ) で, 方程式の数は成分に分けると 6 個となり, 大変扱いやすい形をしているね。(3.62) と (3.63) から

$$\begin{aligned} c^2 \nabla^2 \mathbf{A}_T(x) - \ddot{\mathbf{A}}_T &= \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \\ \therefore \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A}_T(x) &= -\mu_0 \mathbf{J}_T(x) \end{aligned}$$

これは (2.109) で得られた波動方程式だ。

### 3.7.2 縦型電場とスカラーポテンシャル

- 縦型電場とスカラーポテンシャルの関係は次式で与えられた。

$$\mathbf{E}_L(x) = -\nabla A_0(x) \quad (3.64)$$

これから

$$\nabla^2 A_0(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x) \quad (3.65)$$

この Poisson 型の方程式の解はすぐ得られて

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}') \quad (3.66)$$

これから

$$\mathbf{E}_L(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}') \quad (3.67)$$

を得る。ところで, 縦型電場は次の 2 つの式が成立する。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_L(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x) \\ \dot{\mathbf{E}}_L(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_L(x) \end{cases} \quad (3.68)$$

2 つ目の式は (1.37) で導いたね。この 2 つはそれぞれ独立の式かということそうではない。電荷保存則

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}_t(x) + \mathbf{J}_L(x)) = \frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_L(x) = 0 \quad (3.69)$$

を考えると独立したものでないことが分かる。

- サム : (3.68) を (3.69) に入れると電荷保存則を満たす, つまり, 上の 2 式は電荷保存則という枠内で相互に関連する式ということですね。



- K氏：そうだね。これらの式から，与えられた電荷と電流に対してベクトルポテンシャルと縦型，横型の電場が決まると，次の式より全電場と磁場が求められる。

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}_T(x) \quad (3.70)$$

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_t(x) + \mathbf{E}_L(x) = \mathbf{E}_T(x) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}') \quad (3.71)$$

(3.62) と (3.63) は取り扱いやすい形をしており，未知数が素直に求めやすいので，これらの量で電磁場の全エネルギーを書いてみよう。

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}_T(x)) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_T(x)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \sum_{i \neq j} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{Tj} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{Tj} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E}_T^2(x) + \frac{1}{\mu_0} \partial_i A_{Tj} \partial_i A_{Tj} \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.73)$$

となる。また，慣性の流れは，結果だけを書く

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int d^3x \mathbf{J}^{(\text{elm})}(x) = \epsilon_0 \int d^3x \{ \mathbf{E}_T(x) \times (\nabla \times \mathbf{A}_T(x)) \} \\ &= \epsilon_0 \int d^3x (E_{Tj}(x) \nabla A_{Tj}(x)) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Einstein の規約が使われていることに留意して。これで第3章は終わりだ。ヤレヤレ。。

- コニー：え～っと，テキストの【蛇足】(1)には，Lorenz ゲージ ( $\dot{A}_0(x) = c^2 \nabla \cdot \mathbf{A}(x)$ ) を使った場合，以下の条件だけでは Coulomb の法則がでてこない，さてどうしたらいいだろうか？と課題が投げかけられているわね。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}(x) = -\mathbf{E}(x) - \nabla A_0(x) \\ \dot{\mathbf{E}}(x) = c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(x)) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J}(x) \\ \dot{A}_0(x) = -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A}(x) \end{cases} \quad (3.75)$$

どうするのかしら。。。

- K氏：そうだね，え～っと，電場とベクトルポテンシャルを縦・横成分に分けると

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}_T(x) + \mathbf{A}_L(x) \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}_T(x) + \mathbf{E}_L(x) = -(\dot{\mathbf{A}}_T(x) + \dot{\mathbf{A}}_L(x)) - \nabla A_0(x) \\ \therefore \mathbf{E}_T(x) &= -\dot{\mathbf{A}}_T(x) \quad \mathbf{E}_L(x) = -\dot{\mathbf{A}}_L(x) - \nabla A_0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

一方，磁場のほうは横成分オンリーだから

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \mathbf{A}(x) = \nabla \times \mathbf{A}_T(x) \quad (3.78)$$

ベクトル解析の公式  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$  を使い,  $\nabla \times \mathbf{A}_L(x) = 0$  を考慮すると,  $\nabla \cdot \mathbf{A}_T(x) = 0$  なので,  $\mathbf{A}_L(x)$  は形式的に

$$\mathbf{A}_L(x) = \frac{1}{\nabla^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(x)) \quad (3.79)$$

と書ける。ここで Lorenz 条件を使うと

$$\mathbf{A}_L(x) = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{\nabla^2} \nabla \dot{\mathbf{A}}(x) \quad (3.80)$$

これを (3.77) に入れて

$$\mathbf{E}_L(x) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\nabla^2} \nabla \ddot{A}_0(x) - \nabla A_0(x) = \frac{1}{\nabla^2} \nabla \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A_0(x) \quad (3.81)$$

ここでスカラーポテンシャルの波動方程式

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] A_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x) \quad (3.82)$$

とドッキングさせると

$$\mathbf{E}_L(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{\nabla^2} \nabla \rho(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.83)$$

となって Coulomb の法則がでてくる。尚,  $\nabla^{-2}$  は前回の (2.101) で登場した積分演算子だね。

- コニー：スカラーポテンシャルの波動方程式を使うわけね。
- K氏：そうだね。ついでにおまけとして【蛇足】(2) についても言及しておこう。想像を逞しくすれば (3.62), (3.63) は強制された調和振動子の方程式に見えると書かれてあるね。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_T(x) &= -\mathbf{E}_T(x) \\ \dot{\mathbf{E}}_T(x) &= -c^2 \nabla^2 \mathbf{A}_T(x) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \end{aligned} \quad (3.84)$$

強制された調和振動子の運動方程式は  $\dot{p} + c^2 k^2 q = Q$  で表されるので  $-\mathbf{E}_T \rightarrow p, \nabla \rightarrow ik, \mathbf{A}_T \rightarrow q, (1/\varepsilon_0)\mathbf{J}_T \rightarrow Q$  という置き換えを考えれば (3.84) は強制力を受けた調和振動子の式になる。

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}_T = \dot{\mathbf{A}}_T &\longrightarrow p = \dot{q} \\ \dot{\mathbf{E}}_T(x) + c^2 \nabla^2 \mathbf{A}_T(x) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_T(x) \longrightarrow \dot{p} + c^2 k^2 q = Q \end{aligned}$$

以上で第3章を終わります。お疲れ様～。

---

*GOOD LUCK !  
SEE YOU AGAIN !*

by *KENZO*