

電磁気学再入門を読む (4) - 1

H E N L O U

2010年3月29日

桜の花もそろそろ満開を迎えようとする3月も終わりのある早朝，コニー一行がK氏を訪ねてきた。

- コニー：こんにちわ～Kさん。お邪魔しま～す。
- K氏：やあ，こんにちは。全員が揃ってきたんだね。春らしく暖かくなったと思ったら寒の戻りがあったりしたけど，みんな元気そうで何よりだ。ところで，今日は第3章に進むわけだけど，第2章まではどうだった。
- アリス：どうだったといわれても困るけど，なかなか厳しかったわ。まあ，繰り返し読み返していくつもりだけど。
- K氏：そうだね，繰り返し読むことは大変大事なことだね。わたしなんか，ボロボロになるまで読み返した本があるよ。
- コニー：え～っと，それでは早速第3章をはじめていただけるかしら。
- K氏：えらい気合が入っているねえ。わかりました，それではボチボチはじめようか。

目次

4 特別の場合	2
4.1 はじめに	2
4.2 磁場のない世界	2
4.2.1 Maxwell の方程式	2
4.2.2 点電荷	2
4.2.3 半径 a の球内で一様な密度を持った電荷	3
4.2.4 xy 平面上に電荷が一様分布	4
4.2.5 多重極展開	4
4.3 電場のない世界	7
4.3.1 Maxwell の方程式	7
4.3.2 Bio-Savart の法則	8
4.3.3 ベクトルポテンシャルの多重極展開	8
4.3.4 磁気ポテンシャル	12
4.3.5 定常電流によって作られる磁場	13
4.3.6 z 軸に平行な2つの電流の間に働く力	14
4.3.7 一般的なケース	14
4.4 静的な世界	15
4.4.1 Maxwell の方程式	15
4.4.2 電場と磁場のエネルギー	16

4 特別の場合

4.1 はじめに

- K氏：いままでは Maxwell 方程式から導き出される近似なしの結論を調べてきた。ここらで、そろそろ昔習ったいろいろな電磁気の現象や法則が Maxwell の方程式からどのようにして出てくるのかを復習していこう。細かな復習はやらないので、それについては他の適当なテキストを参照していただくとして、2, 3の特別な場合を見ていくことにしよう。

4.2 磁場のない世界

4.2.1 Maxwell の方程式

- K氏：何度もでてきた Maxwell 方程式を書くと

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \\ \nabla \times \mathbf{E}(x) = -\frac{\partial \mathbf{B}(x)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}(x) = \mu_0 \left\{ \mathbf{J}(x) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial t} \right\} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

だった。これから磁場を取り去ると

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) = 0 \quad (4.3)$$

$$0 = \mathbf{J}(x) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(x)}{\partial t} \quad (4.4)$$

これが磁場のない世界での Maxwell の方程式となる。(4.2), (4.3) から分かるように電場は完全に縦型となる。また, (4.4) の電流はやはり縦型で, (1.37) で見たように縦型電場の時間変化と消しあう。したがって, この電流は磁場を生じない。(4.2) は容易に解けて

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla \phi(x), \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t) \quad (4.5)$$

となる。 $\phi(x)$ はスカラーポテンシャルだ。この詳細は (1.32) で既にやった。

4.2.2 点電荷

- K氏：原点に点電荷 Q がおかれている場合

$$\rho(x) = Q\delta(x) \quad (4.6)$$

なので, (4.5) より

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \delta(\mathbf{x}') \nabla \frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \quad \left(\text{ただし, } \int dx \delta(x) f(x) = f(0) \right) \quad (4.8)$$

これは Coulomb 場を表す。

4.2.3 半径 a の球内で一様な密度を持った電荷

- K氏：半径 r の球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ 。半径 a の球に含まれる電荷を Q とすると、電荷密度は

$$\rho(x) = \frac{3Q}{4\pi a^3}\theta(a-r), \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (4.9)$$

で表され、 $\theta(x)$ は Heaviside の階段関数と呼ばれる。電場は Gauss の定理を使って

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(x) &= \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(x) \\ &= \frac{3Q}{4\pi a^3 \epsilon_0} \int_V d^3x \theta(a-r) \end{aligned} \quad (4.10)$$

電荷分布は球対称なので電場は動径方向の成分しかもたず、 r のみの関数となる¹。

(1) a より小さい球を考えると (4.10) は

$$\begin{cases} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(x) = 4\pi r^2 E(r) \\ \frac{3Q}{4\pi a^3 \epsilon_0} \int_V d^3x \theta(a-r) = \frac{3Q}{4\pi a^3 \epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{a^3 \epsilon_0} r^3 \quad (r < a) \end{cases}$$

これから

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3} \theta(a-r) \quad (4.11)$$

半径 $r (< a)$ の球に含まれる電荷の量を q とすると $q = (4/3)\pi r^3 \rho$ なので、

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (4.12)$$

と書ける。これは電荷 q が原点に集中したときに作る Coulomb 場と同じである。

(2) a より大きい球を考えると (4.10) は

$$\begin{cases} \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(x) = 4\pi r^2 E(r) \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(x) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{cases}$$

これから

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \theta(r-a) \quad (4.13)$$

これより、球内に含まれる総電荷 Q が原点に集中したときの Coulomb 場に等しいことになる。以上、2つの式を一緒にすると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r) &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{r}{a^3} \theta(a-r) + \frac{1}{r^2} \theta(r-a) \right\} \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left\{ r \theta(a-r) + \frac{a^3}{r^2} \theta(r-a) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。 $r < a$ では $E(r) \sim r$ となり、原点からの距離に比例し、 $r > a$ では $E(r) \sim r^{-2}$ で原点からの距離の2乗に逆比例している²。

- アリス：ポテンシャル論で、一様な質量密度をもつ球がその外にある質点の及ぼす万有引力は、全質量が球の中心に集中したとみなされる力に等しいという結果と同じね。

- K氏：そうだね。

¹ 動径の方向以外の電場成分は互いに消しあう。

² $r = a$ の球面上では $E = Q/4\pi \epsilon_0 a^2$

4.2.4 xy 平面上に電荷が一様分布

- K氏：面密度を σ とすると

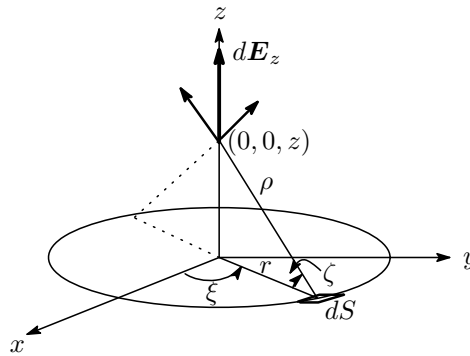
$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma\delta(z) \quad (4.15)$$

電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= -\nabla\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sigma\delta(z) \\ &= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int dx' dy' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

この積分計算は簡単そうに見えて結構大変³なんだ。今の場合，電荷分布の軸対称性を利用するやり方が一般的で，それを紹介しておこう。

xy 平面上の位置を極座標 (r, ξ) で表すと，面要素 $rdrd\xi$ に含まれる電荷は $\sigma rdrd\xi$ 。 (r, ξ) での電荷と $(r, \xi + \pi)$ での電荷の作る電場の xy 平面に平行な成分は，大きさが同じで向きが反対のため互いに打ち消しあう。したがって $E_x = E_y = 0$ 。この結果 z 軸方向の電場を求めればよいことになる。



面要素 dS が作る電場を dE_z とすれば

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\xi}{\rho^2} \cos(\pi/2 - \zeta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\xi}{\rho^2} \frac{z}{\rho}$$

これから

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\xi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times \left[-\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \end{aligned} \quad (4.17)$$

$z/|z|$ は $z > 0$ で 1 ， $z < 0$ で -1 となるので，電場の方向は xy 平面上側では電場は上向き，下側では下向きとなり，電場の大きさは z によらず一定となる。

4.2.5 多重極展開

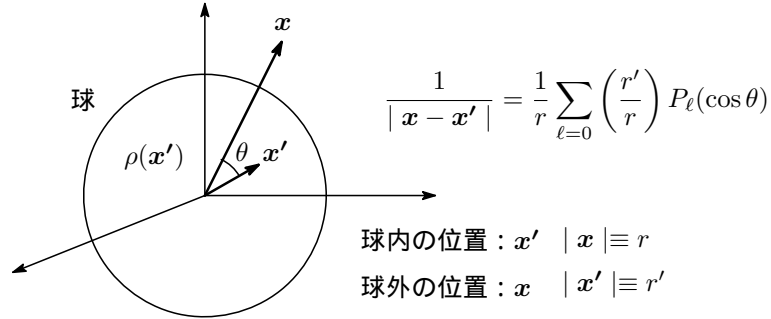
- ¥K：電荷分布が原点のまわりに球対称になっている場合，例2で見たように全電荷が球の中心に集中したときの点電荷による取り扱いをすればよかった。しかし，電荷分布が球対称でない場合，任意の電荷分布をもつ場合はどのようにすればよいだろうか。そのよう

³ Mathematica にやらせてみたが上手くいかなかった。どなたかご存知の方があればご教示ください。

な場合の取り扱いを次に見ていこう。

次の展開式を使い，スカラーポテンシャルを展開していくわけだ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') + \frac{1}{2r^4} (3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0} \left(\frac{r'}{r} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.18)$$



$P_\ell(\cos \theta)$ は Legendre の多項式と呼ばれ， θ は \mathbf{x} と \mathbf{x}' の間の角で， $\cos \theta = x$ と書くと

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_1(x) = x & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{cases} \quad (4.19)$$

これを使ってスカラーポテンシャルを展開すると

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left\{ \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') + \frac{1}{r^2} \left(\mathbf{x} \cdot \int_V d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \right) + A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } A(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{3}{2r^4} \int_V d^3x' \left\{ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2 \right\} \rho(\mathbf{x}') \\ &= \frac{3}{2r^4} x_i x_j \int_V d^3x' \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{x}'^2 \right) \rho(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.20) の最後の変形は

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 = \left(\sum_i x_i x'_i \right)^2 = \sum_{i,j} x_i x_j x'_i x'_j, \quad \mathbf{x}^2 \mathbf{x}'^2 = \sum_i x_i^2 \mathbf{x}'^2 = \delta_{ij} \sum_{i,j} x_i x_j \mathbf{x}'^2 \quad (4.22)$$

を使った。ここで以下の量を定義する。

$$\begin{cases} \text{全電荷} & Q \equiv \int_V d^3x \rho(x) \\ \text{電気双極子能率} & p_i \equiv \int_V d^3x x_i \rho(x) \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{電気四重極能率} & Q_{ij} \equiv \int_V d^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{x}^2 \right) \rho(x) \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (4.23)$$

電気四重極子能率は具体的に書くと

$$Q_{ij} = \int_V d^3x \begin{pmatrix} x_1^2 - \frac{1}{3}x^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 - \frac{1}{3}x^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 - \frac{1}{3}x^2 \end{pmatrix} \rho(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

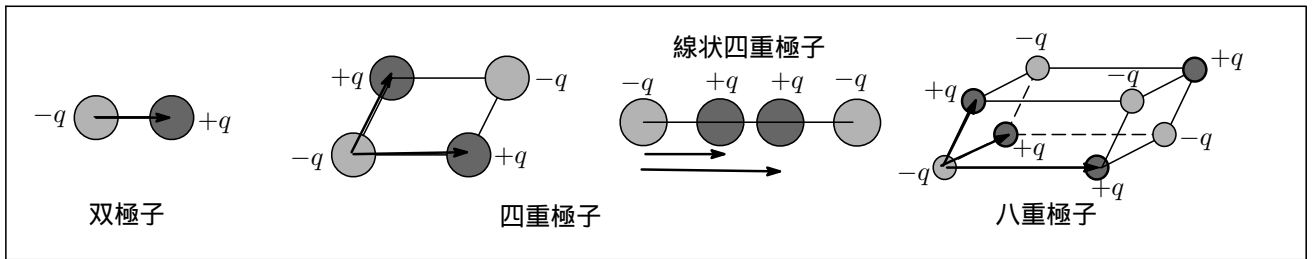
の2階対称テンソルで $\sum_i Q_{ii} = 0$ を満たし、独立な成分は5個となる。

(4.23) を使って (4.20) を書き直すと、 x 方向の単位ベクトル $\mathbf{x}/r (= \mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ の成分 $n_i \equiv \frac{x_i}{r}, i = 1, 2, 3$ を導入して

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ Q + \frac{1}{r} n_i P_i + \frac{3}{2r^2} n_i n_j Q_{ij} + \dots \right\} \quad (4.25)$$

と表すことができる。これを多重極展開という。

- コニー：この展開式を見ると、原点の辺りに局在する電荷 $\rho(\mathbf{x})$ から十分遠いところでは、原点に全電荷が集中しているとみなせる球対称電荷分布のケースと同じ結果を与えるわね。しかし、原点に次第に近付くにつれて球対称からのズレが次第に明瞭に現れてくるわけね。点電荷と双極子の電場の重ね合わせ、さらに近付くと四重極子の電場が重ね合わさり、さらに近付くと電気八重極子の電場が重なるといった状況になるのね。



- K氏：そうだね。遠目では分からなかったものが近目では鮮明にわかっていくという感じだね。電荷分布の分布の特別な場合として、双極子と四重極子の場合を見ていこう。

(1) 電気双極子 (electric dipole)

電荷分布が正電荷と負電荷がずれて存在する電気双極子の電荷密度は

$$\rho(\mathbf{x}) = e\delta\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - e\delta\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \quad (4.26)$$

と表される。このとき⁴、(4.23) は、

$$Q = \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}) = e \int d^3x \left\{ \delta\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - \delta\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \right\} = 0$$

$$\mathbf{p} = \int_V d^3x \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = e \int d^3x \mathbf{x} \left\{ \delta\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - \delta\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \right\} = e\mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \int_V d^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^2 \right) \rho(\mathbf{x}) \\ &= \int_V d^3x \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^2 \right) \left\{ \delta\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - \delta\left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

⁴ $\int dx f(x)\delta(x-a) = f(a)$ を使う。双極子な等量の逆負号の電荷の対だから、特別積分しなくても全電荷は $Q = 0$ であることがすぐ分かる。

となって, (4.25) の第 2 項だけが残ることになり, スカラーポテンシャルは

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad (4.27)$$

となる。電場の発散を取ると⁵

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \delta(x) = -\frac{\rho^P(x)}{\epsilon_0} \quad (4.28)$$

が得られるが, これから電気双極子能率は電荷密度

$$\rho^P = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(x) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(x), \quad \mathbf{P}(x) = \mathbf{p} \delta(x) \quad (4.29)$$

によってつくられていることがわかる。 $\mathbf{P}(x)$ は双極子能率密度である。

(2) 電気四重極子

全電荷量は $Q = 0$ で, また, 逆方向を向いた 2 つの電気双極子がセットになっているので全電気双極子能率は 0。この場合は (4.25) の第 3 項だけが残る

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \frac{Q}{r^3}, \quad Q = n_i n_j Q_{ij} \quad (4.30)$$

となる。

【註】電気双極子能率 (dipole moment)⁶ は一般には座標原点の選び方によらない本当のベクトルではない。というのは, 座標の原点を \mathbf{b} だけずらして $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{b}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int d^3x \mathbf{x} \rho(x) = \int d^3x' (\mathbf{x}' + \mathbf{b}) \rho(\mathbf{x}' + \mathbf{b}) \\ &= \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}' + \mathbf{b}) + \mathbf{b} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}' + \mathbf{b}) \end{aligned}$$

新しい座標系で見た電荷分布を $\bar{\rho}(\mathbf{x}') \equiv \rho(\mathbf{x}' + \mathbf{b})$ で定義すると

$$\mathbf{p} = \int d^3x' \mathbf{x}' \bar{\rho}(\mathbf{x}') + \mathbf{b} \int d^3x' \bar{\rho}(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{p}} + Q\mathbf{b} \quad (4.31)$$

ここで $\bar{\mathbf{p}}$ は新しい座標系で見た電気双極子能率である。これから, $Q \neq 0$ の場合, \mathbf{p} は座標の選び方によって異なる値を持つことになりベクトルではない。全電荷 $Q = 0$ の場合は $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$ で座標のとり方によらないベクトルとなる。これは正負等量の電荷から構成されている系の場合がそれに相当する⁷。

電気双極子能率の時間的変化 $\dot{\mathbf{p}}$ は常にベクトルとなる。というのは, 全電荷 Q の時間微分は常に 0 なので,

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{Q}\mathbf{b} = \dot{\bar{\mathbf{p}}}$$

となるから。

4.3 電場のない世界

4.3.1 Maxwell の方程式

- K 氏: 電場のない世界の Maxwell の方程式は

$$\rho(x) = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(x) = \mu_0 \mathbf{J}(x) \quad (4.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.35)$$

⁵ $\delta(x) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$

⁶ 電気双極子能率 \mathbf{p} は $-e$ の電荷から $+e$ への電荷の変位ベクトルを \mathbf{a} とすると, 電荷量と変位ベクトルの積で与えられる。

⁷ 普通, 電気双極子能率といえば正負等量の電荷を考えるのでベクトルとして扱われます。

となる。この世界に電荷が少しでもあると必ず縦型電場がどこかに生じるので、電場のない世界には電荷はありえない。また、磁場の時間的変化は必ず横型電場を発生するので、磁場は時間に依存できないことを (4.33) は表している。(4.34) より、電流は必ず横型で

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.36)$$

を満たすようなものでなければならない。

4.3.2 Bio-Savart の法則

- K氏：この世界からは有名な Bio-Savart の式が導かれる。以下にそれを導出してみよう。(4.34) の両辺に $\nabla \times$ を作用させ、公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ を使って整理すると

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (4.37)$$

これから Bio-Savart の式がでてくる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (4.38)$$

磁場は電流の要素からの距離の 2 乗に逆比例して磁場は弱くなることを示している。

次に、別のやり方として (2.73) で導入したベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を使って Bio-Savart の式を導出してみよう。(2.111) より

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left\{ \frac{\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left\{ \frac{-1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \right\} \quad (\because \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \dots \text{Bio-Savart の式} \end{aligned}$$

4.3.3 ベクトルポテンシャルの多重極展開

- K氏：ベクトルポテンシャルを多重極展開してみよう。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + \dots = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \left\{ 1 + \frac{1}{r^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') + \dots \right\} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.39)$$

$$\therefore \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.40)$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V d^3x' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.41)$$

第 1 項 $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$ は次のようにして求められる。 \mathbf{x}' の成分を $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ とし、 x' 成分について計算する。

$$\nabla' \cdot (\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}')) = (\nabla' x') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') + x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = (\mathbf{J}(\mathbf{x}'))_x + x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

$$\text{ただし } \nabla' = (i\partial_{x'} + j\partial_{y'} + k\partial_{z'})$$

となる。これを体積積分すると

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot (x' \mathbf{J}(\mathbf{x}')) = \int_V d^3x' (\mathbf{J}(\mathbf{x}'))_x + \int_V d^3x' x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.42)$$

左辺は次のように面積積分に置き換え，十分遠方では $\mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ になるので落とすことができる。

$$\int_V d^3x' \nabla' \cdot (x' \mathbf{J}(\mathbf{x}')) = \int_{\partial V} x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') dS = 0$$

また， $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ は横型電流で $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$ なので，結局 (4.42) は

$$\int_V d^3x' (\mathbf{J}(\mathbf{x}'))_x = - \int_V d^3x' x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$$

となる。 y, z 成分についても同様に成り立つので

$$\int_V d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = - \int_V d^3x' x' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0 \quad (4.43)$$

これから

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0 \quad (4.44)$$

を得る。電場の多重極展開では第 1 項に全電荷 Q がでてきた（電気双極子の場合には第 1 項が 0 になった）が，磁場の場合には，第 1 項が 0 になる。このことは磁気単極子というものが存在しないということを意味すると考えられる。

次に第 2 項を計算してみよう。

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V d^3x' (x' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.45)$$

ベクトル解析の公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ を使えば

$$\left\{ \int_V d^3x' (x' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \right\} \times \mathbf{x} = \int_V d^3x' (x' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}') - \int_V d^3x' x' (x \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \quad (4.46)$$

一方，

$$\nabla' \cdot (x' (x' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}')) = (x' \cdot \mathbf{x}) (\mathbf{J}(\mathbf{x}'))_x + x' (x' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) + (x' \cdot \mathbf{x}) \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

この体積積分をとると左辺は面積積分に直すことができ落ちて，また右辺第 3 項は横電流の関係から 0 となるので，次式が成り立つ。

$$\int_V d^3x' (x' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}') + \int_V d^3x' x' (x' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')) = 0 \quad (4.47)$$

(4.46) と (4.47) を足しあわすと

$$\int_V d^3x' (x' \cdot \mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}') = \left\{ \frac{1}{2} \int_V d^3x' (x' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \right\} \times \mathbf{x}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{1}{2} \int_V d^3x' (x' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) \right\} \times \mathbf{x} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' x' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.49)$$

を得る。 m を磁気双極子能率と呼んでいる。 m は座標原点の選び方によらない本当のベクトルであることを見ておこう。座標の原点を b だけずらして $x' = x - b$ とすると

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_V d^3x' (\mathbf{x}' + \mathbf{b}) \times \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}') + \mathbf{b} \times \frac{1}{2} \int_V d^3x' \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (4.50)$$

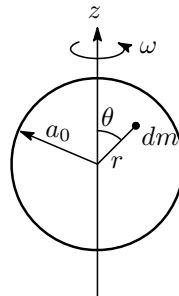
$$= \bar{m} + \mathbf{b} \times \frac{1}{2} \int_V d^3x' \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}'), \quad \bar{m} \equiv \frac{1}{2} \int_V d^3x' \mathbf{x}' \times \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}') \quad (4.51)$$

ここで $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}') \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x}' + \mathbf{b})$ は新しい座標系から見た電流密度。ところで、(4.44) より右辺第2項は0となるので $m = \bar{m}$ となり、座標原点のとり方によらないベクトルであることがわかる⁸。

【余談】 少しここで脱線するが、電子のスピン（角運動量）は自転によるものではないということに触れておこう。

- コニー：電子スピンは自転による云々という歴史のお話は朝永振一郎「スピンはめぐる」に詳しくでていいるわね。スピンを自転と考えるとおかしなことになるといいう話をしていただけなのかしら？
- K氏：うん。そうなんだ。電子を半径が古典電子半径 $a_0 (= e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2)$ の剛体球としよう。いま、電子は z 軸の回りに角速度 ω で回転しているとする。半径 $r (< a_0)$ の位置での剛体球の微小部分の質量を dm とすると、 Ω を立体角として

$$dm = \rho dr dS = \frac{m}{V_0} r^2 dr d\Omega, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi a_0^3$$



自転の角運動量の大きさ S は

$$S = \int_V r \sin \theta \cdot r \omega \sin \theta dm = \frac{m}{V_0} \int_0^{a_0} r^4 dr \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{5} m v_0 \cdot a_0 \quad (4.52)$$

v_0 は電子の表面での速さ。 $S = \hbar/2$ であるので、これを上式に入れて v_0 を求めると

$$v_0 = \frac{5}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{e^2} \right) c = \frac{5}{4} \frac{c}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036} \quad (4.53)$$

となる。 α は微細構造定数と呼ばれる。これを見ると、電子が自転しているとした場合、その表面速度は電子の半径に関係なく光速を超えてしまうことになる。つまり、特殊相対論と矛盾する結果になるという次第だ。

⁸ 電気双極子能率の場合、対向する電荷が等量でなければベクトルにはならなかったことを思い出そう！

さて, (4.25) の右辺第 2 項から電場を計算し, (4.48) から磁場を計算して両者を比較してみよう。電気双極子能率による電場であるが, スカラーポテンシャルは次式で与えられるので

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.54)$$

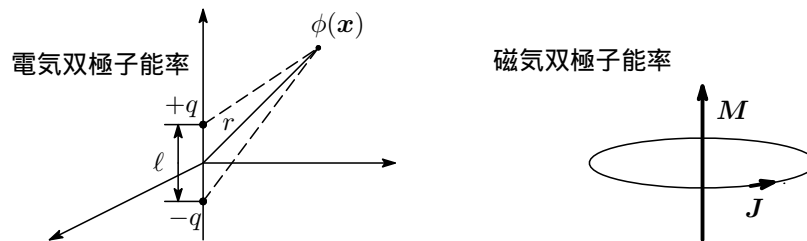
電場は次の公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}) \quad (4.55)$$

を使って

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mathbf{x}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{p} \delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

と求まる。



次に磁気双極子能率による磁場だが, ベクトルポテンシャルは, 微分公式 $\frac{\mathbf{x}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}$ を使って次式で与えられるので,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} \quad (4.57)$$

磁場は $\delta(\mathbf{x})$ 関数の公式

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} \quad (4.58)$$

を使って

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{m}}{r} - \nabla^2 \frac{\mathbf{m}}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} \mathbf{x}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right) + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

と求まる。

さて, (4.56), (4.59) を比較してみよう。デルタ関数の項を無視すると, 磁気双極子能率が作る磁場において,

$$\mu_0 \mathbf{m} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{p} \quad (4.60)$$

という置き換えをするとちょうど E とまったく同じになることが分かる。

- ユナ: ということは何を意味するのかしら。
- K氏: そこを少し考えてみようというわけだ。

- ユナ：そうなの。電気双極子能率の電場はスカラーポテンシャルを使って求められたわね。磁気双極子能率を作る磁場は結果的に、いま K 氏さんの言われた置き換えをすればよいわけだから、磁場も適当なスカラー関数 φ_m の勾配で表すことができる？しかし、そうすると $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が成り立たなくなる。磁気単極子がいま至るまで発見されていない以上、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を変えるわけにはいかないわ。たまたまそうなったということも考えられるわね。

4.3.4 磁気ポテンシャル

- K 氏：うん。。。え〜っと、 \mathbf{B} の回転を計算してみよう。(4.66) を使うと、 ∇^2 はスカラーの微分演算子で r に作用することに留意すると

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla^2 \left(\nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \nabla^2 \frac{1}{r} = -\mu_0 \mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{x}) \quad (4.61)$$

ここで (4.58) を使った。右辺は (4.34) から

$$\mathbf{J} = -\mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.62)$$

とかける。つまり \mathbf{B} は原点の流れる電流密度によって作られた場ということになる。ここで $\mathbf{M} = m\delta(\mathbf{x})$ は磁気能率密度だね。これを一般化すると、任意の定常電流密度は $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{M}$ と書くことができることが示せる。いま、補助場 \mathbf{H} を

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (4.63)$$

で定義すると、アンペールの法則 (4.34) より

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = 0 \quad (4.64)$$

となるので、補助場 \mathbf{H} は

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (4.65)$$

を満たすことが分かる。したがって、スカラー関数 φ_m を使って

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \varphi_m \quad (4.66)$$

と書ける。 φ_m は磁位とか磁気ポテンシャルと呼ばれる。(4.54) より、磁気能率のつくる磁場は磁気ポテンシャル

$$\varphi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \quad (4.67)$$

で表すことができ、 \mathbf{H} は (4.56) より

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left(3 \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} \mathbf{x}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) - \frac{1}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{x}) \quad (4.68)$$

となる。

- ユナ：なるほど、補助場を定義すれば電場のケースと同様にスカラーポテンシャルである磁気ポテンシャルが矛盾なく導入できるというわけね。そうすると、電荷に相当する磁荷のようなものが (4.65) からでてくるのかしら？

- K 氏： \mathbf{H} の発散を計算すると

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{m} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}) = \rho_m^M, \quad \rho_m^M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (4.69)$$

となり、電気双極子の場合の (4.28) に対応して、接近した磁荷対による磁荷密度 ρ_m^P が \mathbf{H} をつくることを表している。

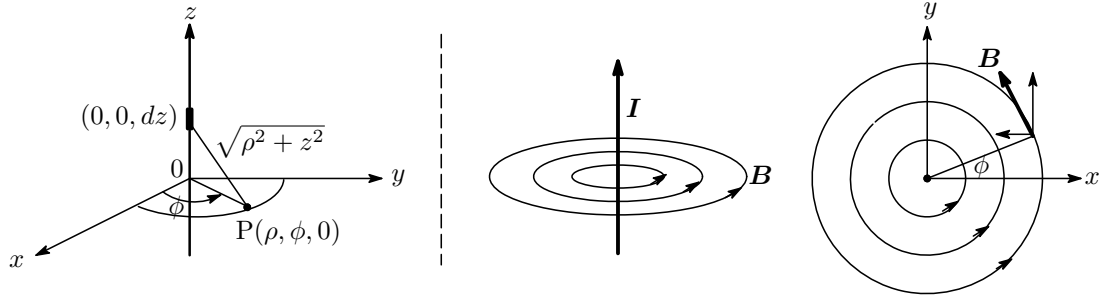
- ユナ：そうなんだ。やはり磁荷というものはでないわけね。
- K 氏：うん。さて、ここらでちょっと具体的な問題にあたってみようか。

4.3.5 定常電流によって作られる磁場

- K氏： z 軸に沿って流れる定常電流によって作られる磁場を求めてみよう。電流は

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = I\delta(x)\delta(y), \quad \mathbf{I} = (0, 0, I) \quad (4.70)$$

で与えられる。



図のような円柱座標をとると，ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{J}(\mathbf{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dz \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (4.71)$$

$z = \rho \tan \theta$ と置換して積分を実行すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} dz \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi} \log \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + \rho^2}}{\rho} \\ &= \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{2\pi} \log \left\{ \frac{\ell}{\rho} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\ell}\right)^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルは z 成分しか持たない。円柱座標で $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の回転は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= (\nabla_{\rho} \times \mathbf{A})\mathbf{e}_{\rho} + (\nabla_{\phi} \times \mathbf{A})\mathbf{e}_{\phi} + (\nabla_z \times \mathbf{A})\mathbf{e}_z \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_{\rho} + \left(\frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_{\phi} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\phi}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

と表される。磁場は $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$ で ϕ 方向だけに成分を持つことになるので，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= (\nabla_{\phi} \times \mathbf{A}(\mathbf{x}))\mathbf{e}_{\phi} = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})_z}{\partial r} \mathbf{e}_{\phi} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{\rho(-\ell)}{\ell \rho^2} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (\frac{\rho}{\ell})^2}} \cdot \frac{\rho/\ell}{\sqrt{1 + (\frac{\rho}{\ell})^2}} \right\} \mathbf{e}_{\phi} \end{aligned}$$

ここで $\ell \rightarrow \infty$ として

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_{\phi} \quad (4.72)$$

を得る。円柱座標と3次元直交座標の単位ベクトルの関係式

$$\mathbf{e}_{\phi} = -i \sin \phi + j \cos \phi = (-iy/\rho + jx/\rho)$$

を使うと (4.72) は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad (4.73)$$

と表せる。これから，磁場は z 軸を中心にして右ネジの方向を向いた同心を描き，磁場の強さは ρ に反比例して弱くなるのが分かる。

4.3.6 z 軸に平行な 2 つの電流の間に働く力

- K 氏：前セクションの電流から距離 ρ だけ離れた点に，電流 I と平行に電流 I' を流した場合， I' には I の磁場による Lorentz 力が働く。その力は I' の単位長さに対して

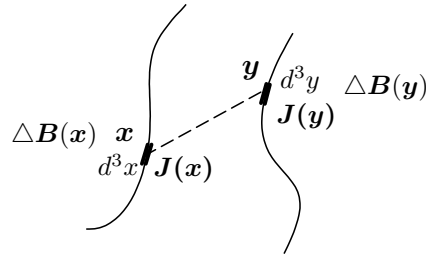
$$\begin{aligned} F &= I' \times B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} I' \times (I \times \rho) \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} \{ (I' \cdot \rho) I - (I' \cdot I) \rho \} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho^2} (I' \cdot I) \rho \quad (\because I' \perp \rho) \end{aligned} \quad (4.74)$$

となる⁹。これより， I' と I が同じ向きに流れる電流の場合は引き合い，反平行であれば反発し合うことが分かる。(4.74) を使って 1 ampere の電流が定義される。

- エミリー：1 ampere の電流が定義というのは「互いに 1 メートルはなれた等しい電流の間の力が，単位長さについて $F = 2 \times 10^{-7} \text{Nm}^{-1}$ であるとき，その電流を 1 ampere と決める。」だったわね。

4.3.7 一般的なケース

- K 氏：空間の一点 x に電流密度 $J(x)$ があり，また別の点 y に電流密度 $J(y)$ があるとす。電流の方向はまったく勝手なものでよい。



このとき，点 x にある電流要素 $J(x)d^3x$ が生ずる点 y での磁場を $\Delta B(y)$ とすると Bio-Savart の式 (4.38) より

$$\Delta B(y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times J(x) d^3x \quad (4.75)$$

ただし， ∇_y は変数 y に作用する nabla 演算子である。これが点 y における電流要素に及ぼす力は

$$\begin{aligned} f_{x \rightarrow y}(x, y) d^3x d^3y &= (J(y) \times \Delta B(x)) d^3y \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} J(y) \times \left(\nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times J(x) \right) d^3x d^3y \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (J(y) \cdot J(x)) \right. \\ &\quad \left. - J(x) \left(\nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \cdot J(y) \right) \right\} d^3x d^3y \end{aligned} \quad (4.76)$$

⁹ $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

全く同様にして，点 \mathbf{y} にある電流要素 $\mathbf{J}(\mathbf{y})d^3y$ の点 \mathbf{x} における電流要素に及ぼす力は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})d^3x d^3y &= (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \Delta \mathbf{B}(\mathbf{y}))d^3x \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{y})) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{J}(\mathbf{y}) \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right) \right\} d^3x d^3y \end{aligned} \quad (4.77)$$

となる。さて， $\mathbf{f}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}}d^3x d^3y$ と $\mathbf{f}_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}}d^3x d^3y$ を比較すると

$$\begin{cases} \text{右辺第 1 項: } \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\mathbf{J}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})) & \Leftrightarrow \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} (\mathbf{J}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})) \\ \text{右辺第 2 項: } -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \left(\nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right) & \Leftrightarrow -\mathbf{J}(\mathbf{y}) \left(\nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right) \end{cases}$$

で，第 1 項は互いに負号が逆で，作用・反作用の関係が成立しているが，第 2 項はそうにはなっていない。しかし，このことは空間に固定した電流要素間の力の作用を言っているのであって，電流は本質的に動く電荷であり，このため，2つの電流経路全体に対して作用する力について作用・反作用の法則が成立するか否かを調べる必要がある。ここでは計算は略すが，電流経路全体にわたって積分すると作用反作用の法則が成立することが分かる。

- キャサリン：木を見て森を見ずでは駄目なわけね。

4.4 静的な世界

4.4.1 Maxwell の方程式

- K 氏：静的世界は時間変化のない世界で，この世界での Maxwell の方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \quad (4.78)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.79)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (4.80)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.81)$$

となる。(4.80)の電流は横型のみだ。これらの式を満たす解は，

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}') \quad (4.82)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (4.83)$$

で，それぞれ Coulomb の法則と Bio-Savart の法則を表し，場は電荷，電流の要素からの距離の 2 乗に逆比例している。静的な世界での電磁場のエネルギーを計算してみよう。その前に次の積分公式を上げておく。

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} &= - \int_V d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \\ &= 4\pi \int_V d^3x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} = 4\pi \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \end{aligned} \quad (4.84)$$

この公式を使う場合の注意点として，部分積分を何度かやって，表面の寄与を落としているので，被積分関数の遠方での振舞いに気をつけなければならない。

- ユナ：遠方では無視できるくらいの方は表面積分で落とすことができる。しかし，無視できない場合はその寄与を考慮しなければならないということね。
- K氏：そうなんだ。今の場合，電場も磁場も無限遠方では ~ 0 となるので心配はいらないけど。

4.4.2 電場と磁場のエネルギー

- K氏：電場のエネルギーを \mathcal{H}_E とすると，積分公式を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_E &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_V d^3x' \int_V d^3x'' \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} \rho(\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}'') \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{2} \int_V d^3x \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

が得られる。これは前回の(3.73)で得たCoulombエネルギーだね。

次に磁場のエネルギーだが，この計算は少々厄介で，上の積分の公式と次のベクトル解析の公式を併用することになる。

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (4.85)$$

磁場のエネルギーを \mathcal{H}_M とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_M &= \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \int_V d^3x' \int_V d^3x'' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')\right) \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'')\right)\end{aligned}$$

ベクトル解析の公式を使って展開し，積分公式を使って整理し，表面積分で落とせる項を消すと最終的に

$$\mathcal{H}_M = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

を得る。電磁場のエネルギーはこれらの足し算だから

$$\mathcal{H}_{EM} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V d^3x \int_V d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (4.86)$$

となる。

この続きは次回にやるとして，今回はとりあえずここまでとしておこう。お疲れ様～

*GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !*

by *KENZO*