

# 電磁気学再入門を読む(4) - 2

*H E N L O U*

2010年4月15日

今年の桜の時期は寒暖急変が激しく妙な気候となったが、ある暖かい日の早朝、コニーら一行がK氏を訪ねてきた。

- コニー：こんにちわ～。今年の春はなにかおかしな気候ね。そろそろ桜も散り始めたけどまた寒くなりそうね。
- K氏：いやぁ～，こんにちわ。全員元気そうで何よりだね。今回はテキスト第4章の前半ということで、磁場のない世界や電場のない世界など、特別の場合をやったね。今回は第4章の中盤ということで電磁波の輻射に関する話題となるんだ。電荷や電流が原点付近に局在していて、それらが時間的に変動する場合、電磁波が輻射されるけど、そのあたりの状況をみていこうと思う。ちょっとハードな計算が続くのでうんざりするかもしれないけど、まぁそこは持ち前のファイトでフォローしていただければと思うんだ。
- キャサリン：ワリマシタ。電磁場の輻射の話題は面白そうだから、がんばってみるわ。
- K氏：OK！それじゃ早速スタートしよう。

## 目次

4.5	電荷と電流の分布 . . . . .	2
4.5.1	遅延 Green 関数 . . . . .	3
4.5.2	遅延 Green 関数が Lorenz ゲージ条件を満たすことの証明 . . . . .	4
4.5.3	電場の計算 . . . . .	5
4.5.4	磁場の計算 . . . . .	7
4.6	原点の辺りに局在する電流の作る場 . . . . .	7
4.6.1	電気双極子輻射 . . . . .	8
4.6.2	電気双極子輻射場の特長 . . . . .	12
4.6.3	波動帯における電磁場 . . . . .	12
4.7	Fourier 変換による輻射の取り扱い . . . . .	17

#### 4.5 電荷と電流の分布

- K氏：電荷や電流が時間的に変動する場合，その時間的変化が周囲の場の時間変化を促し，それが波動となって周囲の空間に電磁波として伝播していく。時間に依存する電荷や電流から空間を伝播する電磁場を求めるという問題は，つまるところ次の3つの方程式のいずれかから電磁場を計算するということになる。その3つの方程式は以下のとおり。

(1) 電磁場の波動方程式 … (2.66), (2.67)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho(x) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(x) \quad (4.1)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B}(x) = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}(x) \quad (4.2)$$

(2) 強制力が作用している調和振動子の式 … (3.49), (3.50)

$$\dot{p}_k^{(r)} + c^2 k^2 q_k^{(r)}(t) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \int_V d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{J}(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (4.3)$$

(3) 電磁ポテンシャルを求め，それから場を計算する … § 2.6.1

ここでは，(3)のケースを取り扱おう。Lorenz ゲージを採用すると，電磁ポテンシャルは(4.4)と(4.5)で決まる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_0(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x) \quad (4.4)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(x) = -\mu_0 \mathbf{J}(x) \quad (4.5)$$

ただし，Lorenz ゲージをとっているので次の条件が加わる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_0(x) = 0 \quad (4.6)$$

電磁場は次の2式で与えられる。

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(x) - \nabla A_0(x) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B}(x) = \nabla \times \mathbf{A}(x) \quad (4.8)$$

これを積分して電磁場を求めていくわけだが，具体的な計算では Green 関数を利用する<sup>1</sup>ので，簡単にその復習をしておこう。

Green 関数の復習 - - - - -

(1) Poisson 方程式を解く

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Poisson 方程式に対する Green 関数の満たすべき方程式は

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.10)$$

<sup>1</sup> Green 関数の詳しい説明は HP の「数学」セクション「対話・グリーン関数(1)」を参照

これを満たす  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  は次式で与えられる。

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.11)$$

ただし, Green 関数の境界条件は無限遠で 0 とする。求める解は

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \quad (4.12)$$

で与えられる。

## (2) 波動方程式を解く

波動方程式の解を Green 関数で表してみよう。この場合は時刻  $t$  が入っていることに注意しよう。

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

波動方程式に対する Green 関数の満たすべき方程式は

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (4.14)$$

これを満たす Green 関数は次式で与えられる。これを遅延 Green 関数<sup>2</sup>と呼んでいる。

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) \quad (4.15)$$

求める解は

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int dt' \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') \quad (4.16)$$

で与えられる。

- - - - - Green 関数の復習はこれでおしまい。

### 4.5.1 遅延 Green 関数

- K 氏：遅延 Green 関数を次のように書こう。

$$D^{(\text{ret})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \quad (4.17)$$

これを使うと (4.4) の解は

$$A_0(\mathbf{x}) = A_0^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}' D^{(\text{ret})}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'), \quad (\text{但し } \mathbf{x}' \equiv (\mathbf{x}', t')) \quad (4.18)$$

と書ける。右辺第 1 項は源に関係なくはじめからあった場, 第 2 項は過去の時空点  $\mathbf{x}'$  にあった源の影響が点  $\mathbf{x}$  まで伝播する様子を示している<sup>3</sup>。時間積分を先にやると

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{x}) &= A_0^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \rho(\mathbf{x}') \int d\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= A_0^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (4.19)$$

<sup>2</sup> 現在の場は過去から伝わってくる場の影響を集約したものという因果律に適合。先進 Green 関数は, 未来を決めたとき現在はどうあるべきかというスタンスに立つ。

<sup>3</sup>  $\mathbf{x}'$  にある源から時刻  $t'$  に輻射された電磁波が  $\mathbf{x}$  なる場所で受信される時刻が  $t = t' + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  である。つまり電磁波の速度は  $c$  で有限であるため  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  だけ時間がかかるということ。

が得られる。 $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$  は、電磁作用が有限の速度  $c$  で伝播する遅延時間。ベクトルポテンシャルも同様にして

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= A^{(0)}(\mathbf{x}) + \mu_0 \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}' D^{(ret)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') \\ &= A^{(0)}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (4.20)$$

と求まる。これは遅延ベクトルポテンシャルとも呼ばれる。(4.19), (4.20) の第 1 項は

$$\square A_0^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_0^{(0)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.21)$$

$$\square \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.22)$$

を満たす任意の解で、初期条件と Lorenz ゲージの条件 (4.6) から決める。

#### 4.5.2 遅延 Green 関数が Lorenz ゲージ条件を満たすことの証明

- K 氏：遅延ベクトルポテンシャルは、Lorenz ゲージでの波動方程式 (4.4), (4.5) を満たすが、同時に Lorenz ゲージの条件 (4.6) を満たさないと Maxwell の方程式を満足することにはならないので、その確認をしておくことにしよう。

まず、次の準備をしておく。遅延時刻  $t - R/c$  における量を  $[\Psi]$  と書くことにすると

$$[\psi] = \psi(\mathbf{x}', t - R/c) \quad \text{ただし } R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.23)$$

表記のように、 $[\Psi]$  は  $\mathbf{x}'$  と  $t$  の関数だが、 $t - R/c$  の  $R$  に空間変数が入っていることに注意が必要で、 $[\psi]$  の空間微分をとる場合、 $t - R/c$  の  $R$  を通じての微分も考慮に入れる必要がある。実際には次のようにやる。

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right] = \frac{\partial}{\partial x'} [\psi] - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial x'} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

$$\therefore \nabla' [\psi] = [\nabla' \psi] - \frac{1}{c} \nabla' R [\dot{\psi}] \quad (4.24)$$

さて、Lorenz ゲージ条件を満たすことを確かめてみよう。簡略化のために各ポテンシャルの第 1 項を省略する。そうすると、

$$A_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - R/c)}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\rho]}{R} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - R/c)}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{[\mathbf{J}]}{R} \quad (4.26)$$

となるので遅延ベクトルポテンシャルの空間微分は

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \nabla' \cdot \left( \frac{[\mathbf{J}]}{R} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) [\mathbf{J}] + \frac{1}{R} \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) [\mathbf{J}] + \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \mathbf{J}] - \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{J}}] \nabla' R \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる。ところで、

$$\nabla' \cdot \left( [\mathbf{J}] \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \mathbf{J}] + \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) [\mathbf{J}] - \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{J}}] \nabla' R \quad (4.28)$$

と展開でき，左辺の体積積分は表面積分に書き換えられる。無限遠方での表面では電流密度が0になることを考慮するとこの項は落とせるので，(4.27)は

$$\nabla' \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \mathbf{J}] \quad (4.29)$$

となる。一方

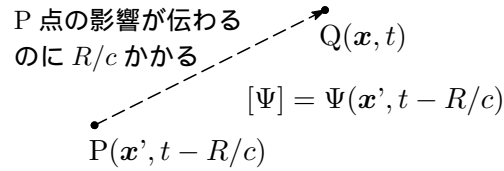
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\dot{\rho}] \quad (4.30)$$

なので，連続の式より

$$\nabla' \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\dot{\rho} + \nabla' \cdot \mathbf{J}] = 0 \quad (4.31)$$

となり，遅延ベクトルポテンシャルは Lorenz ゲージの条件を満たすことが分かる。

- サム：遅延時刻における量  $[\psi]$  を定義したわけですけど，それはある場所での“場”は，現在ではなく以前のある時刻の影響を受けている，その時刻は過去の影響が伝播するに要する時間  $|x - x'|/c$  だけ以前の時刻ということですね。
- K氏：そうだね。具体的に言えば，時刻  $t$  での電場を求めたければ，時刻  $t - \frac{1}{c} |x - x'|$  における電荷の位置や運動を計算しなくてはならないということだね。



#### 4.5.3 電場の計算

- K氏：準備ができたので電場の計算に入ろう。電磁ポテンシャルを使うと電場は次式((4.7))で与えられる。

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.32)$$

(4.19)，(4.20)の初項は  $E^0(x, t)$  を与えるので，その項は省略するとして電場は

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \rho] - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\mathbf{J}] \quad (4.33)$$

と書ける。そして，

$$\nabla' \cdot [\rho] = [\nabla' \cdot \rho] - \frac{1}{c} [\dot{\rho}] \nabla' R \quad (4.34)$$

なので，(4.33)の右辺第1項は負号係数を省略すると

$$\begin{aligned} \int d^3x' \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \rho] &= \int d^3x' \frac{1}{R} \nabla' \cdot [\rho] - \frac{1}{c} \int d^3x' [\dot{\rho}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} \\ &= \int d^3x' \nabla' \cdot \left( \frac{[\rho]}{R} \right) - \int d^3x' [\rho] \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{1}{c} \int d^3x' [\dot{\rho}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

右辺第1項は表面積分に書き換えられ，表面では荷電密度が0になることを考慮すると落とせる。第3項は連続の式を使うと

$$[\dot{\rho}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} = [\nabla' \cdot \mathbf{J}] \frac{\mathbf{R}}{R} = \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} + \frac{1}{c} [\mathbf{J}] \cdot \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (4.36)$$

また,

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \left( [\mathbf{J}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} \right) &= \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} + [\mathbf{J}] \frac{2\mathbf{R}\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} \\ &= \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \frac{\mathbf{R}}{R^2} + 2[\mathbf{J}] \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}}{R^4} - \frac{[\mathbf{J}]}{R^2}\end{aligned}\quad (4.37)$$

となり, 左辺は表面積分に直して落とせるので, (4.36) は

$$[\rho] \frac{\mathbf{r}}{R^2} = -2[\mathbf{J}] \mathbf{r} \frac{\mathbf{R}}{R^4} + \frac{[\mathbf{J}]}{R^2} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{J}}] \cdot \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (4.38)$$

となる。(4.26) より

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\dot{\mathbf{J}}]}{R} \quad (4.39)$$

以上の結果から電場は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' [\rho] \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int d^3x' \left( \frac{2[\mathbf{J}] \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} - \frac{[\mathbf{J}]}{R^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int d^3x' [\dot{\mathbf{J}}] \cdot \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}}{R^3} [\dot{\mathbf{J}}]\end{aligned}\quad (4.40)$$

と表せる。さらに, ベクトル解析の公式  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$  を使えば, 上式は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' [\rho] \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int d^3x' [\mathbf{J}] \cdot \left( 2\frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} - \frac{1}{R^2} \right) \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{([\dot{\mathbf{J}}] \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}}{R^3}\end{aligned}\quad (4.41)$$

となる。第2項は静電場の式と同じで, 第2項と第3項とも遠方では  $r^{-2}$  で急速に小さくなるが, 第4項は  $r^{-1}$  の減少だから遠方ではこの項が支配的になることがわかる。

- アリス: 第2項は電場が時間的な変化をしない静的な場合の Coulomb 場ね。静的な場合は  $\dot{\mathbf{J}} = 0$  で第4項も消えるからいいのだけれど, 第3項はどうなるのかしら? 消えてくれないとまずいと思うけど。。
- K氏: そうだね, その心配はもっともだ。静的な場合にはこの項はないはずだね。それが消えるかどうか確認してみよう。この計算では, 非定常電流について成り立つ次の公式<sup>4</sup>を使う。

$$\int d^3x \mathbf{J} = - \int d^3x \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (4.42)$$

そこで

$$\begin{aligned}\int d^3x' \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right) &= - \int d^3x' \mathbf{x} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right) \\ &= -\mathbf{x} \int d^3x' \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right) + \int d^3x' \mathbf{R} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right)\end{aligned}\quad (4.43)$$

右辺第1項は表面積分に直すと消えるので

$$\int d^3x' \mathbf{R} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right) = \int d^3x' \mathbf{R} \left( \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{R^2} + 2\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}}{R^4} \right) \quad (4.44)$$

<sup>4</sup> 定常電流の場合, 電荷密度の時間変化は0だから連続の式より  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。これから  $\int d^3x \mathbf{J} = 0$  となる。

左辺第 1 項も表面積分に直すと消えるので，結局

$$\int d^3x' \left( \frac{\mathbf{J}}{R^2} \right) = \int d^3x' 2\mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^4} \quad (4.45)$$

となり，うまい具合に (4.41) の第 3 項は 0 になる，というわけだね。

[公式 (4.42) の証明] —————

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

を使う。  $\mathbf{A} = \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{x}$  とすると

$$\mathbf{J} = -\mathbf{x}\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{x})$$

両辺を積分すると

$$\int d^3x \mathbf{J} = - \int d^3x \mathbf{x}\nabla \cdot \mathbf{J} + \int d^3x \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{x})$$

第 2 項は表面積分に直し，十分遠方では電流密度は 0 になるので落とせる。したがって

$$\int d^3x \mathbf{J} = - \int d^3x \mathbf{x}\nabla \cdot \mathbf{J}$$

#### 4.5.4 磁場の計算

- K 氏：次に磁場の計算をやろう。電場の計算とまったく同様にして

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\nabla' \times \mathbf{J}] \\ &= \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} \nabla' \times [\mathbf{J}] + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' [\dot{\mathbf{J}}] \times \frac{\mathbf{R}}{R^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

また，

$$\nabla' \times \frac{[\mathbf{J}]}{R} = \frac{\nabla' \times [\mathbf{J}]}{R^2} R - \frac{[\mathbf{J}] \times \mathbf{1}}{R^2} = \frac{1}{R} \nabla' \times [\mathbf{J}] - \frac{[\mathbf{J}]}{R^3} \times \mathbf{R} \quad (4.47)$$

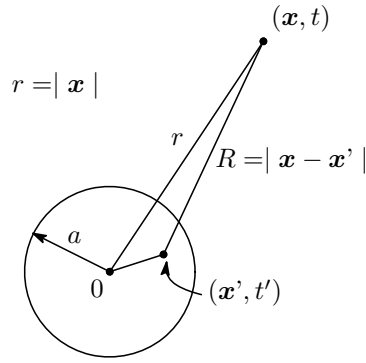
と展開でき，左辺の体積積分は表面積分に直して落とせるので，求める磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{[\mathbf{J}] \times \mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{[\dot{\mathbf{J}}] \times \mathbf{R}}{R^2} \quad (4.48)$$

となる。この第 2 項は静磁場における Bio-Savart の法則を与える。  $r$  が電流分布の範囲より大きいところでは  $r^{-2}$  により急速に 0 に近づく。一方，第 3 項は  $r^{-1}$  の減少で遠方ではこの項が効いてくる。

#### 4.6 原点の辺りに局在する電流の作る場

- K 氏：原点近傍の狭い領域（半径  $a$ ）に電荷分布と電流分布があり，それらが時間的に変動するとき周囲の空間に電磁波が輻射されるが，これを電気双極子輻射と呼んでいる。  
いま，原点からずっと離れた点  $\mathbf{x}$  での電磁場を計算してみよう。そのためには，次の近似式を利用する。



$r = |\mathbf{x}|$  が電荷や電流から十分はなれた場所では,  $\mathbf{x}'$  に関して

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \quad (4.49)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r \left( 1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \right) + \dots \quad (4.50)$$

$$t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{cr} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \dots \quad (4.51)$$

$$f \left( \mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) = f \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \dot{f} \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (4.52)$$

と展開できる。

#### 4.6.1 電気双極子輻射

- K氏：上の近次式を使うとベクトルポテンシャルの最低次の項は

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\mathbf{J} \left( \mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \mathbf{J} \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' [\mathbf{J}] \quad (4.53)$$

となる。ここで  $[\mathbf{J}] = \mathbf{J}(\mathbf{x}', t - r/c)$  で, 遅延時刻  $t - r/c$  での値をとる<sup>5</sup>。

- アリス：ちょっと待って。本来なら  $t - \frac{R}{c}$  となるべきなのに, どうして  $t - \frac{r}{c}$  となるのかしら。
- K氏：そうだね, たしかに原点と  $\mathbf{x}'$  の位置からそれぞれ観測点  $\mathbf{x}$  に到達する時間は異なる。これをすべて原点から到達した時間に焼きなおしたのが上の式ということだね。このように焼きなおす理由が実は2つあるんだ。一つは  $R$  の中には  $\mathbf{x}'$  が含まれているので, まともに上の積分計算をやろうとすると大変なことになるのでこれを回避したいという理由。もう1つの理由は, この理由が本質的なんだけど, 動いている電荷の速さが光速  $c$  よりずっと小さいとすると, 場所の違いによる到達時刻の違いは無視できるだろう。そして  $t - \frac{r}{c}$  と焼きなおすことで  $r$  は  $\mathbf{x}'$  の関数ではなくなり, 積分計算が楽になるというご利益がある。しかし, 電荷が光速に近い速さで動くような場合には, このような焼き直しはできない。
- アリス：なるほど, そうのことね。

<sup>5</sup> 電荷分布と電流分布の場所  $\mathbf{x}'$  ごとに異なる電磁波の発信時刻を, 原点から電磁波が出発したときの共通の発信時刻  $t - r/c$  で表現している。



- K氏：さて，公式 (4.42) と連続の式を使うとベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' [\mathbf{J}] = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \mathbf{x}' \nabla' \cdot [\mathbf{J}] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3x' \mathbf{x}' [\dot{\rho}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\dot{\mathbf{p}}]}{r} \end{aligned} \quad (4.54)$$

となる。ただし，

$$[\dot{\mathbf{p}}] = \int d^3x' \mathbf{x}' [\dot{\rho}] \quad (4.55)$$

であり<sup>6</sup>，原点付近の電荷の運動による  $[\mathbf{p}]$  の時間的变化率を表す。次に

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho \left( \mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \\ &= \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \right) \left\{ \rho \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{cr} \dot{\rho} \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \right\} \\ &= \frac{[\rho]}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' [\rho]}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' [\dot{\rho}]}{cr^2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

と展開できるので，スカラーポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left( \frac{[\rho]}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' [\rho]}{r^3} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' [\dot{\rho}]}{cr^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{[\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{[\dot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}}{cr^2} \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

となる。第1項の  $q$  は

$$q = \int d^3x' [\rho] \quad (4.58)$$

で，この系の全電荷。これは電荷の保存則により時間によらない定数なので電磁波の輻射には関係しない。以上のような近似での電磁波の輻射を電気双極子輻射と呼んでいる。

さて，上で得られた電磁ポテンシャルから電場と磁場を求めよう。 $\nabla$  や  $\text{rot}$  の空間微分計算となるが， $\mathbf{p}$  に含まれている  $r$  を通しての微分も考慮する必要があるので面倒だが，次の公式を使うとその手間が省ける。

$$\nabla f \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{cr} \dot{f} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (4.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{cr} \times \dot{\mathbf{g}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (4.60)$$

スカラーポテンシャルの空間微分は，静電場を与える初項は省略するとして

$$\nabla A_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \frac{[\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{[\dot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}}{cr^2} \right) \quad (4.61)$$

右辺第1項は

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{[\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x}}{r^3} \right) &= \frac{[\mathbf{p}]}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{x} + [\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x} \left( \nabla \frac{1}{r^3} \right) + \nabla [\mathbf{p}] \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} \\ &= \frac{[\mathbf{p}]}{r^3} - 3 \frac{([\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}}{r^5} - \frac{([\dot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}}{cr^4} \end{aligned} \quad (4.62)$$

<sup>6</sup> 電気双極子能率の時間微分は常にベクトルとなることは前回の 4.2 の【註】を参照。

第2項は

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x}}{cr^2}\right) &= \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{cr^2}\nabla\cdot\boldsymbol{x} + \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x}\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) + \nabla[\boldsymbol{p}]\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{cr^2} \\ &= \frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{cr^2} - 2\frac{([\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{cr^4} - \frac{([\ddot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{c^2r^3}\end{aligned}\quad (4.63)$$

となり, それらの結果を整理すると

$$\begin{aligned}\nabla A_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{[\boldsymbol{p}]}{r^3} - 3\frac{([\boldsymbol{p}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^5}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r^2} - 3\frac{([\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^4}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{([\ddot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^3}\end{aligned}\quad (4.64)$$

が得られる。次にベクトルポテンシャルの時間微分は容易にできて

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{r}\quad (4.65)$$

これらから電場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla A_0 - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{[\boldsymbol{p}]}{r^3} + 3\frac{([\boldsymbol{p}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^5}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\left(-\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r^3} + 3\frac{([\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^5}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{c^2 r} + \frac{([\ddot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{c^2 r^3}\right)\end{aligned}\quad (4.66)$$

と求まる。次に磁場を計算だが, ベクトル解析の公式  $\nabla\times(f\boldsymbol{g}) = (\nabla f)\times\boldsymbol{g} + f\nabla\times\boldsymbol{g}$  を使えば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times[\dot{\boldsymbol{p}}] + \frac{1}{r}\nabla\times[\dot{\boldsymbol{p}}]\right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]\times\boldsymbol{x}}{r^3}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]\times\boldsymbol{x}}{cr^2}\right)\end{aligned}\quad (4.67)$$

と求まる。

上で得られた電場と磁場の表式を見ると, それぞれ  $[\boldsymbol{p}]$ ,  $[\dot{\boldsymbol{p}}]$ ,  $[\ddot{\boldsymbol{p}}]$  に比例する3つの部分から成り立っていることが分かる。それぞれ肩添字 0, 1, 2 を付けて3つの項を表すと

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{E}^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{[\boldsymbol{p}]}{r^3} + 3\frac{([\boldsymbol{p}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^5}\right), \quad \boldsymbol{B}^{(0)} = 0 \\ \boldsymbol{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}\left(-\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]}{r^3} + 3\frac{([\dot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{r^5}\right), \quad \boldsymbol{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}]\times\boldsymbol{x}}{r^3}\right) \\ \boldsymbol{E}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]}{c^2 r} + \frac{([\ddot{\boldsymbol{p}}]\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{c^2 r^3}\right), \quad \boldsymbol{B}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}]\times\boldsymbol{x}}{cr^2}\right) \end{array}\right.\quad (4.68)$$

となる。

- ユナ: え~っと, いままでのお話を整理すると, 原点近傍に局在した時間的に変動している電荷分布や電流分布があるとして, 原点からずっと遠方のところから眺めた場合, 時間的に変動する電気双極子が原点に存在しているケースと同じになるということね。そして, それが作りだす電場と磁場は(4.66)と(4.67)で与えられ, これらの場は,  $[\boldsymbol{p}]$ ,  $[\dot{\boldsymbol{p}}]$ ,  $[\ddot{\boldsymbol{p}}]$  に比例する3つの部分から構成されているということね。

- そうだね。前回の多重極展開近似の話も復習するといいと思うけど。
- ユナ：ところで  $E_0$  は時間的に変化しない電気双極子が作る静電場の式と同じ形をしているけど、 $[p]$  は  $p(t - r/c)$  で時間的に変化しているわね。静電場では時間的な変化はないはずだけど、その辺りのことはどう解釈すればいいのかしら。
- K氏：そうだね。 $E^{(0)}$  は遅延時刻  $t - r/c$  その瞬間での  $p$  が点  $x$  に作る電場で、当然それは  $p$  の時間的な変化にともなって  $E^{(0)}$  も変化していくということなんだ。
- ユナ：そうなんだ。
- K氏：ところで、 $E^{(0)}$  と  $E^{(1)}$  の式はよく似ているだろう。 $E^{(1)}$  では  $p$  が  $[\dot{p}]$  になり、また、 $r/c$  を掛けた形となっている。これは時間  $r/c$  の間に移動した電荷が作る双極子能率  $(r/c)\dot{p}$  がつくる電場が  $E^{(1)}$  だと解釈できる。
- アリス： $(r/c)\dot{p}$  は、双極子能率の変化率に遅れの時間  $r/c$  を掛けたものね。

- K氏：うん。これは (4.67) の括弧でくくった第1項の補正項にあたる。つまり、双極子能率の変化が緩やかであれば、これら2つの項で同じ時刻の双極子能率がつくる電場になるというわけだ。つまり

$$[p]^\circ = [p] + \frac{r}{c}[\dot{p}] \quad (4.69)$$

とおいて、 $[p]^\circ$  が作る電場が  $E^{(0)} + E^{(1)}$  ということになる。しかし、3つ目の  $E^{(2)}$  は、いまのように電気双極子がつくる電場という風には解釈できない。これは電荷密度分布の加速度運動による新たな効果を表している。

- エミリー：新たな効果とはどのような効果なのかしら？
- K氏：うん、まさにそれをここでは問題にしようというわけだ。 $E^{(0)}$  や  $E^{(1)}$  は電気双極子能率の作る電場で、これらは遠方では早く減衰してしまうけど、 $E^{(2)}$  はずっと遠方まで効いてくる。 $B^{(2)}$  も同じだ。ということで、電気双極子から発射される電磁波として遠方まで伝播していくのは  $E^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$  になるわけだ。次のセクションでは電磁場  $E^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$  の振る舞いについて調べていくので楽しみに。
- キャサリン：それは楽しみ。ところで、原点近傍に時間的に変動する電荷分布、電流分布のケースを調べてきたわけだけど、面倒な計算が多くて辟易したけど（笑い）、この近似計算で得られた結論は、先ほどユナがまとめたように原点に時間的に変動する電気双極子を置いた場合と同じ結果が導かれるということね。
- K氏：そういうことだね。くどいようだけどそのモデルで計算をやってみよう。  
(4.19) より  $A_0^{(0)}$  は省略して

$$A_0(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\rho]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.70)$$

原点に置かれた静的な電気双極子  $p$  と電荷密度の関係は (4.30) より

$$\rho = -p \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}')$$

で、いま  $p$  が時間に依存するとすると時間  $t$  を変数に含むので

$$[\rho] = -[p] \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}'), \quad [\rho] = \rho \left( \mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \quad (4.71)$$

これをスカラーポテンシャルに入れて積分計算をやり、部分積分をやって

$$\begin{aligned}
 A_0(x) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\mathbf{p}] \cdot \nabla \delta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \nabla \cdot \left( \frac{[\mathbf{p}]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \delta(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left\{ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot [\mathbf{p}] + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \cdot [\dot{\mathbf{p}}] \right\} \delta(\mathbf{x}') \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{[\mathbf{p}] \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{c} \frac{[\dot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}}{r^2} \right) \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

が得られる。これは (4.57) とまったく同じ表式だね。

#### 4.6.2 電気双極子輻射場の特長

- K氏：さて、あらためて上で分類した3種類の場の特長を調べていこう。原点の狭い領域（半径  $a$ ）に閉じ込められた電荷の運動の目安の時間（周期運動であればその周期，周期運動でない場合は Fourier 展開したその主な成分の周期）を  $T$  としよう。電荷の運動が周期的であれば電磁波の波長  $\lambda$  は

$$\lambda = cT \quad (4.73)$$

また， $\partial \mathbf{p} / \partial t$ ,  $\partial^2 \mathbf{p} / \partial t^2$  は大きさの程度としてそれぞれ  $p/T$ ,  $p/T^2$  となるので，各電場，磁場の大きさを見積もると

$$\begin{cases} E^{(0)} \sim \frac{1}{r^3} [p], \\ E^{(1)} \sim \frac{1}{r^2} \frac{[p]}{cT}, & cB^{(1)} \sim \frac{1}{r^2} \frac{[p]}{cT} \\ E^{(2)} \sim \frac{1}{r} \frac{[p]}{(cT)^2}, & cB^{(2)} \sim \frac{1}{r} \frac{[p]}{(cT)^2} \end{cases} \quad (4.74)$$

で，各場の大きさを比較すると

$$\begin{cases} E^{(1)} : E^{(0)} \sim \frac{r}{cT} \\ E^{(2)} : E^{(1)} \sim \frac{r}{cT}, & B^{(2)} : B^{(1)} \sim \frac{r}{cT} \\ E^{(2)} : E^{(0)} \sim \left( \frac{r}{cT} \right)^2 \end{cases} \quad (4.75)$$

となり，電磁波の波長の長さよりずっと長い，つまり，原点から十分離れた  $r \gg cT (= \lambda)$  の領域を波動域とか波動帯（wave zone）と呼んでいるが，この領域では， $E^{(0)}$  より  $E^{(1)}$  が， $E^{(1)}$  より  $E^{(2)}$  が残り， $B^{(1)}$  より  $B^{(2)}$  が残ることが分かる。 $[\dot{\mathbf{p}}]$  を含む  $E^{(2)}$  と  $B^{(2)}$  の場だけが  $r^{-1}$  の程度に減少するにすぎないので，この場が一番遠くまで生き残ることがわかる。この場は電荷密度の加速度運動により作られる場だ。

#### 4.6.3 波動帯における電磁場

- サム：波動帯での磁場と電場との関係は

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{[\dot{\mathbf{p}}]}{c^2 r} + \frac{([\dot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}}{c^2 r^3} \right) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{[\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{x}}{cr^2} \right) = \frac{1}{cr} \mathbf{x} \times \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (4.77)$$

となりますね。

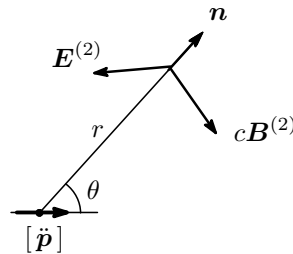
- K氏：そうなんだ。波動帯の領域では電場と磁場の表式は (4.76) と (4.77) を使えばいいんだね。ベクトル解析の公式

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times [\ddot{\mathbf{p}}]) = \mathbf{x}([\ddot{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{x}) - [\ddot{\mathbf{p}}]r^2 \quad (4.78)$$

を使えば，電場と磁場の関係は サム が指摘したように

$$\mathbf{E}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times ([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{x})}{r^3} = -\frac{c}{r} (\mathbf{x} \times \mathbf{B}^{(2)}) = -c\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(2)} \quad (4.79)$$

となり， $\mathbf{E}^{(2)}$ ， $\mathbf{B}^{(2)}$ ， $\mathbf{n}$  は互いに垂直なベクトルで右手系を作っている。



$\mathbf{E}^{(2)}$  も  $\mathbf{B}^{(2)}$  も当然 Maxwell の波動方程式を満たすので，波動帯における電磁場は真空中の自由電磁波の場合と同じく横波で，

$$|\mathbf{E}^{(2)}| = c |\mathbf{B}^{(2)}|$$

なる性質をもっていることになる。

波動帯でどれだけのエネルギーが流れているか，単位面積・単位時間に流れるエネルギー Poynting ベクトル  $\mathbf{P}$  を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{B}^{(2)}) = -\frac{c}{\mu_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(2)}) \times \mathbf{B}^{(2)} \\ &= -\frac{c}{\mu_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(2)}) \cdot \mathbf{B}^{(2)} - (\mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(2)}) \mathbf{n} \right\} \\ &= \frac{c}{\mu_0} B^{(2)2} \mathbf{n} = \frac{c}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{c^2 r^4} ([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{x})^2 \mathbf{n} \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{n})^2}{r^2} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.80)$$

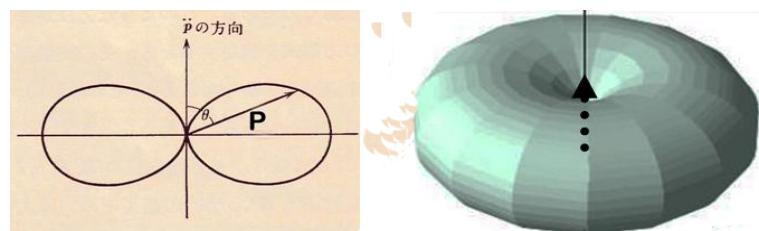
となって， $[\ddot{\mathbf{p}}]$  の方向を  $\theta = 0$  の方向にとれば

$$([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{n})^2 = [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \sin^2 \theta$$

で，Poynting ベクトルの大きさは

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{[\ddot{\mathbf{p}}]^2 \sin^2 \theta}{r^2} \quad (4.81)$$

になる。これからエネルギーの流れは双極子の方向には 0 で，それと垂直の方向に最も強く流れるという，下図のような角度分布をもつことが分かる。



原点を中心とする半径  $r$  の球面上の原点から角  $\theta$  にある微小面積  $dS$  を通して流れる単位時間当たりのエネルギーを  $dW$  とすると

$$dW = P dS = P r^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (4.82)$$

$d\Omega$  は  $dS$  の立体角。全立体角に輻射される単位時間当たりのエネルギーは  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  を使って

$$\begin{aligned} W &= \int d\Omega \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \sin^2 \theta = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \end{aligned} \quad (4.83)$$

になる。いま、双極子が角振動数  $\omega$  で振動しているとすれば

$$[\mathbf{p}] = \mathbf{p}_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{ただし } t \text{ は遅延時刻 } t \equiv \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

とにおいて、 $W$  の時間的平均は、振動の周期を  $T (= 2\pi/\omega)$  として

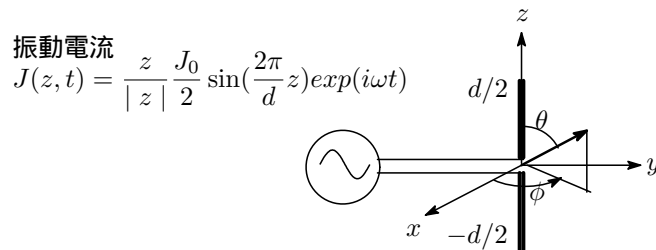
$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt W = \frac{\mu_0}{6\pi c} \omega^4 \mathbf{p}_0^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} \mathbf{p}_0^2 \end{aligned} \quad (4.84)$$

となる。

- キャサリン：電気双極子輻射の具体例を挙げていただけないかしら。
- K氏：うん、dipole アンテナの例を挙げよう。アンテナの棒の長さは電磁波の波長よりずっと小さいものとする。図のように長さ  $d$  の線状のアンテナ（dipole アンテナ）に振動電流

$$J(z, t) = \frac{z}{|z|} \frac{J_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{d} z\right) e^{i\omega t}$$

が流れているとする。このアンテナから出る電磁波の単位時間当たりの全平均輻射エネルギーを求めてみよう。



電荷密度は連続の式より求める。

$$\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_z}{\partial z} = \pm \frac{J_0}{2} \left(\frac{2\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right) e^{i\omega t} \quad (4.85)$$

正・負号はそれぞれ  $z < 0$ ,  $z > 0$  の場合。これから

$$\rho(z, t) = \pm \frac{J_0}{2i\omega} \left(\frac{2\pi}{d}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right) e^{i\omega t} \quad (4.86)$$

電気双極子能率はこれの実数部をとって

$$p(t) = \text{Re} \int_{-d/2}^{d/2} dz' z' \rho(z', t) = \frac{J_0 z}{\pi \omega} \sin \omega t \quad (4.87)$$

したがって, (4.83) より単位時間当たりの全輻射エネルギーは

$$W = \frac{\mu_0}{12\pi c} \left( \frac{J_0 z \omega}{\pi} \right)^2 \quad (4.88)$$

となる。

- ユナ：テキストに 『 $z$  軸上のアンテナ

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\pi I}{a \omega_a} \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) \sin(\omega_a t) \delta(x) \delta(y) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, I) \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \cos(\omega_a t) \delta(x) \delta(y) \end{cases} \quad (4.89)$$

の輻射を計算してみられたい。 $a$  はアンテナの長さで

$$a \geq z \geq 0, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega_a} c \gg a \quad (4.90)$$

』と載っているわね。折角だからこの計算をやってみるわ。

- K氏：ご健闘を祈る。
- ユナ：まず, アンテナの長さ  $a$  は電磁波の波長  $\lambda$  よりずっと小さい。逆に言うと電磁波の波長はアンテナの長さよりずっと長い, つまり,  $\omega_a$  は小さいということなので緩やかに振動しているということね。 $\rho$  と  $\mathbf{J}$  は連続の式  $\partial\rho/\partial t + \partial\mathbf{J}/\partial z = 0$  を満たしている。そこで, 電荷密度から電気双極子能率を求め, 時間の2階微分をとると

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^a dz z \rho = \frac{\pi I}{a \omega_a} \sin(\omega_a t) \int_0^a dz z \cos\left(\frac{\pi}{a} z\right) = -\frac{2aI}{\pi \omega_a} \sin(\omega_a t) \\ \ddot{p}(t) &= \frac{2aI\omega_a}{\pi} \sin(\omega_a t) \end{aligned}$$

だから

$$dW = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 \sin^2 \theta d\Omega = \frac{\mu_0 a^2 I^2 \omega_a^2}{4\pi^4 c} \sin^2 \omega_a t \sin^2 \theta d\Omega \quad (4.91)$$

これから輻射の全エネルギーは

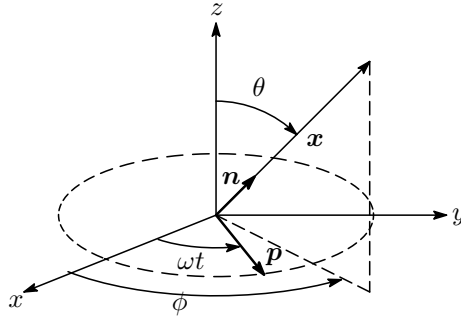
$$W = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left( \frac{2aI\omega_a}{\pi} \sin(\omega_a t) \right)^2 = \frac{2\mu_0 a^2 I^2 \omega_a^2}{3\pi^3 c} \sin^2(\omega_a t) \quad (4.92)$$

また, 時間平均は

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt W = \frac{2\mu_0 a^2 I^2 \omega_a^2}{3\pi^3 c} \frac{\omega_a}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_a} dt \sin^2(\omega_a t) = \frac{\mu_0 a^2 \omega_a^2 I^2}{6\pi^4 c} \quad (4.93)$$

となるわ。

- K氏：OK! なお, 検算は各自フォローしておいてください。  
え〜っと, 今まで電気双極子が振動している場合をみてきたけど, ついでに電気双極子が  $xy$  平面で角振動数  $\omega$  の回転している場合はどうなるかを調べてみようか。



電気双極子能率を成分表示し,  $t$  の 2 階微分をとると

$$[\mathbf{p}] = ([\mathbf{p}]_x, [\mathbf{p}]_y, [\mathbf{p}]_z) = p(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \quad (4.94)$$

$$[\ddot{\mathbf{p}}] = -\omega^2 [\mathbf{p}] \quad (4.95)$$

電場と磁場は (4.79) と (4.77) より

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times ([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{x})}{r^3} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times ([\mathbf{p}] \times \mathbf{x})}{r^3} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}] \times \mathbf{x}}{cr^2} \quad (4.97)$$

Poynting ベクトルは (4.80) より,  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  なので

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{([\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{n})^2}{r^2} \mathbf{n} = \frac{\mu_0 \omega^2}{16\pi^2 c} \frac{([\mathbf{p}] \times \mathbf{n})^2}{r^2} \mathbf{n} \\ &= \mathbf{n} \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{p^2 \omega^4}{cr^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \omega t)) \end{aligned} \quad (4.98)$$

となる。また, Poynting ベクトルの時間平均は

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbf{P} = \mathbf{n} \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{p^2 \omega^4}{cr^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (4.99)$$

が得られる。これから, 電磁場のエネルギーは  $z$  軸方向 ( $\theta = 0$ ) に最も強く流れるが,  $xy$  平面内 ( $\theta = 0$ ) でも 0 ではないことが分かる。回転する双極子からの単位時間当たりの全輻射エネルギーは (4.83) より

$$W = \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}]^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} p^2 \omega^4 \quad (4.100)$$

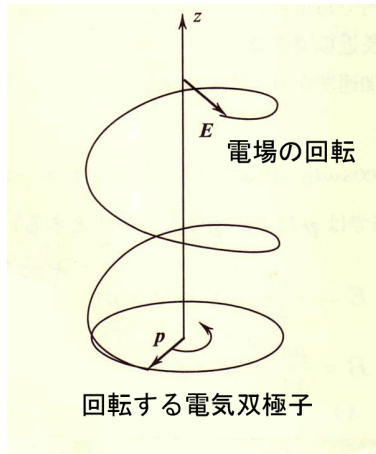
となる。

輻射される電磁波の様子を  $z$  軸方向から観測すると  $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ ,  $r = z$  となることに注意し,  $t$  を遅延時刻に直すと, 電磁場と電気双極子は

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times ([\mathbf{p}] \times \mathbf{x})}{r^3} = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} [\mathbf{p}] \\ \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \\ [\mathbf{p}] = p(\cos \omega(t - r/c), \sin \omega(t - r/c)) = p(\cos(\omega t - kr), \sin(\omega t - kr), 0) \end{cases} \quad (4.101)$$

と表せる。ただし,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ 。





これは電場，磁場が遅延時刻での電気双極子能率に同期して回転している電磁波，すなわち円偏光状態<sup>7</sup>となっている。xy平面へ射影した電場は電気双極子と同期して回転していることになる。

#### 4.7 Fourier 変換による輻射の取り扱い

- K氏：ここでは強制された調和振動子の式 (4.3) を解いて時間的に動く電流による電磁場を計算してみよう。強制された調和振動子の式は

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \omega_k^2 \right] q_k^{(r)}(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} I_k^{(r)} \quad (r = 1, 2) \quad (4.102)$$

ただし，

$$I_k^{(r)} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{V}} \int_V d^3x e^{(r)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.103)$$

Green 関数を使うと，(4.102) の解は

$$q_k^{(r)}(t) = q_k^{(r)}(t)^0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_k(t-t') I_k^{(r)}(t') \quad (4.104)$$

と書ける。右辺第1項は (4.102) の右辺をゼロとおいた方程式の解で，初期値で決まる。電磁波の散乱を取り扱う場合にはこれが入射波を表すが<sup>8</sup>，ここでは入射波はないとして以下の項は考えない。天下り的だが，この Green 関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} G_k(t-t') &= \frac{1}{\omega_k} \{ \sin \omega_k(t-t') \} \theta(t-t') \\ &= \frac{-i}{2\omega_k} \{ \exp[i\omega_k(t-t')] - \exp[-i\omega_k(t-t')] \} \theta(t-t') \end{aligned} \quad (4.105)$$

$\theta(t)$  は Heaviside の階段関数 (ステップ関数) で，次式を満たす。

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.106)$$

(4.104) は

$$q_k^{(r)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\sin \omega_k(t-t')}{\omega_k} I_k^{(r)}(t') \quad (4.107)$$

<sup>7</sup> 電場の振動する面を偏光面と呼んでいる。

となり, (3.46) より

$$p_k^{(r)}(t) = \dot{q}_k^{(r)}(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \cos \omega_k(t-t') I_k^{(r)}(t') \quad (4.108)$$

を得る。電流によって発射される全エネルギーの計算は (3.54) を使う。そうすると

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1,2} \sum_k \left\{ p_k^{(r)*}(t) p_k^{(r)}(t) + \omega_k^2 q_k^{(r)*}(t) q_k^{(r)}(t) \right\} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \sum_{r=1,2} \sum_k \iint_{-\infty}^t dt' dt'' \\ &\quad \times \{ \cos \omega_k(t-t') \cos \omega_k(t-t'') + \sin \omega_k(t-t') \sin \omega_k(t-t'') \} \\ &\quad \times I_k^{(r)*}(t') I_k^{(r)}(t'') \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \sum_{r=1,2} \sum_k \iint_{-\infty}^t dt' dt'' \cos \omega_k(t'-t'') I_k^{(r)*}(t') I_k^{(r)}(t'') \end{aligned} \quad (4.109)$$

となる。単位時間当たりどれだけのエネルギーが発射されるかを知るためには, 原理的にはこれを時間で微分すればよいが, ここでは正の角振動数  $\omega_a$  で振動している電流に話を限り, 非常に長い時間を取り, あとでその時間で割って単位時間当たりのエネルギーを求めるというやり方でやることにする。

$$I_k^{(r)}(t) = I_k^{(r)} \cos \omega_a t \quad (4.110)$$

これを (4.109) に入れると

$$H_{\text{rad}}(t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \sum_{r=1,2} \sum_k \iint_{-\infty}^t dt' dt'' \cos \omega_k(t'-t'') \cos \omega_a t' \cos \omega_a t'' |I_k^{(r)}|^2 \quad (4.111)$$

となる。振動の 1 周期の時間よりずっと長い時間

$$t \gg \frac{2\pi}{\omega_a} \quad (4.112)$$

を考え, 積分の上限を  $t \rightarrow \infty$  へもっていくと

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' \cos \omega_k(t'-t'') \cos \omega_a t' \cos \omega_a t'' = \frac{\pi}{2} \delta(\omega_k - \omega_a) \int_{-\infty}^{\infty} dt \quad (4.113)$$

となるので<sup>8</sup>,

$$H_{\text{rad}}(\infty) = \frac{\pi}{4\varepsilon_0^2} \sum_{r=1,2} \sum_k \delta(\omega_a - \omega_k) |I_k^{(r)}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \quad (4.114)$$

右辺の  $\int_{-\infty}^{\infty} dt$  は輻射にかかった全時間だから, 単位時間に輻射されたエネルギーは

$$W = \frac{H_{\text{rad}}(\infty)}{\int_{-\infty}^{\infty} dt} = \frac{\pi}{4\varepsilon_0^2} \sum_{r=1,2} \sum_k \delta(\omega_a - \omega_k) |I_k^{(r)}|^2 \quad (4.115)$$

<sup>8</sup> 最後の表式のフォローはできていないが, ここは鵜呑みにしておこう! (笑い)

となる。輻射される電磁波はデルタ関数がかかっているため電流と同じ角振動数を持つ。これを (4.103) を使って元の電流に書きかえると<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi}{4\epsilon_0} \frac{1}{V} \sum_{r=1,2} \sum_k \delta(\omega_a - \omega_k) \left| \int_V d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_T(\mathbf{x}, 0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right|^2 \\ &= \frac{\pi}{4\epsilon_0} \frac{1}{V} \sum_k \delta(\omega_a - \omega_k) \left| \int_V d^3x \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

ここで  $\mathbf{J}_T$  を全体の電流  $\mathbf{J}$  に書きなおした。

$$\mathbf{n}_k \equiv \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (4.117)$$

という単位ベクトルを導入し、

$$\mathbf{k} = \frac{\omega_k}{c} \mathbf{n}_k \quad (4.118)$$

として、(4.116) の  $k$  についての和を計算しなければならない。そのために、 $V$  が大きいときに成り立つ関係

$$\frac{1}{V} \sum_k \dots = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int dk k^2 \dots = \frac{1}{(2\pi c)^3} \int d\Omega \int d\omega \omega^2 \dots \quad (4.119)$$

を使って  $\omega$  の積分を行う。結果は

$$W = \frac{\pi\omega_a^2}{4(2\pi c)^3\epsilon_0} \int d\Omega \left| \int d^3x \mathbf{n}_k \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0) \exp\left(-i\frac{\omega_a}{c} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{x}\right) \right|^2 \quad (4.120)$$

となる。

先ほどユナが計算した  $z$  軸上のアンテナに流れる (4.89) の電流の場合、電流が  $z$  軸方向を向いているので、電磁波の進行方向となす角を  $\theta$  とすると

$$|\mathbf{n}_k \times \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0)| = |\mathbf{J}(\mathbf{x}, 0)| \sin\theta \quad (4.121)$$

なので、 $(\theta, \phi)$  方向への輻射の割合は

$$dW = \frac{\pi\omega_a^2}{4(2\pi c)^3\epsilon_0} \left| \int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}, 0) \exp\left(-i\frac{\omega_a}{c} \cdot \mathbf{x}\right) \right|^2 \sin^2\theta d\Omega \quad (4.122)$$

となり、輻射のエネルギーは電流の角振動数  $\omega_a$  の 2 乗に比例していることが分かる。電磁波が最も強く輻射される方向は、もし  $\omega_a/c$  が小さくて (4.90) の条件が満たされるなら上の積分の中の指数関数は 1 とおくことができるので、角への依存性は  $\sin^2\theta$  だけとなり、電流から垂直の方向、 $xy$  平面へでていく割合が大きい。尚、指数関数を 1 とは置けないような短い波長を問題にする場合には、ことは複雑になってくる。汗;;

ちょっと長くなったので今回はここまでにしよう。お疲れ様~

*GOOD LUCK!  
SEE YOU AGAIN!*

by *KENZO*

<sup>9</sup> 最後の変形もテキスト鵜呑みとしておく。汗;