電磁気学再入門を読む（4）－3

KENZOU

2010 年 4 月 23 日
2012 年 3 月 25 日（「電場の計算」の誤植修正* ）

4 月も下旬を迎えたある曇天の早朝，コニーら一行がK氏を訪ねてきた。

- コニー：こんにちわ〜。桜も今年はまだ満開のところがあるわね。
- K氏：いやぁ〜，こんにちわ。今年は桜が長く楽しめるねぇ。近くの公園の桜は今が満開になっているよ。ところで「電磁気学再入門を読む」もいよいよ第 4 章の後半を迎えたね。第 5 章の輻射場まであと一歩だけど，なかなか道は険しくて大変だけど踏ん張ってがんばっていこう。
- ユナ：第 5 章からは QED への入門となるわけね。その前に第 4 章の後半をこなさなくては。
- エミリー：前回は，電荷や電流の分布が原点近傍に局在し，これが時間的に変動しているケースだったわね。多重極子展開して長波長近似（電磁波の波長が局在分布の領域より遥かに大きい）により，$[\ddot{\boldsymbol{p}}]$ が遠方まで伝播する電磁波を放射していていることが分かったのね。
- K氏：そうだね。そこでこのセクションでは与えられた軌道を加速度運動する点電荷（荷電粒子）が作りだす電磁場について調べていこう。この電磁場を決める電磁ポテンシャルとして Lienard-Wiechert のポテンシャルが登場してくる。例によって難義な計算が続くと思うけど，そこはまぁガマンしていただくとして，それじゃ早速スタートしよう。

目 次

*2012.3.24 徳田さんよりご指摘を受ける。Thank's 徳田さん。

4.8 点電荷による電磁場

4.8.1 Lienard-Wiechert のポテンシャル

- K氏：前回は，原点辺りに局在している電荷と電流に話を限ったが，ここでは点電荷が与えられた軌道 $\boldsymbol{\xi}(t)$ を運動している場合の電磁場を求めていこう。点電荷と電流密度はそれぞれ

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = e\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t)) \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t) = e\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t) \tag{4.2}$$

で与えられる。これを前回の§4.5.1「遅延 Green 関数」のところででてきた $A_0(x)$, $\boldsymbol{A}(x)$ の式に代入して積分すれば電磁ポテンシャルが求まる。スカラーポテンシャルの空間積分は容易にできて

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_V d^3x' \frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \mid}\delta\left(t - t' - \frac{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \mid}{c}\right)\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{\xi}(t')) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \dfrac{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t') \mid}{c}\right)}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t') \mid} \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。t' についての積分は $\boldsymbol{\xi}(t')$ の中の t' のために面倒となるが，

$$f(t') \equiv t' + \frac{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t') \mid}{c} \tag{4.4}$$

とおくと (4.3) の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t')\delta(t - f(t')) \tag{4.5}$$

という形になる[1]。そこで

$$y = f(t') \tag{4.6}$$

として，これを t' について解いた解を

$$t' = h(y) \tag{4.7}$$

とすると

$$dt' = \frac{dh(y)}{dy}dy \tag{4.8}$$

(4.5) はしたがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(h(y))\delta(t - y)\frac{dh(y)}{dy}dy = g(h(t))\frac{dh(t)}{dt} \tag{4.9}$$

となる。(4.6) で $y = t$ としたときの t' の値を t_1 とすると

$$t = f(t_1) \quad \text{あるいは} \quad t_1 = h(t) \tag{4.10}$$

そこで

$$\frac{dt}{dt_1} = \frac{df(t_1)}{dt_1} \quad \text{あるいは} \quad \frac{dt_1}{dt} = \frac{dh(t)}{dt}$$

[1] ここの計算プロセスは砂川重信「理論電磁気学」（紀伊国屋書店）参照した。

となるので

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left[\frac{df(t_1)}{dt_1}\right]^{-1} \tag{4.11}$$

を得る。これを使うと (4.9) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')\delta(t - f(t'))\frac{dh(y)}{dy}dy = g(t_1)\left[\frac{df(t_1)}{dt_1}\right]^{-1} \tag{4.12}$$

となる[2]。ただし，t_1 は (4.10) から

$$t = f(t_1) = t_1 + \frac{1}{c} \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid = 0 \tag{4.13}$$

の解 (この解は一つしかない) として与えられる発信時刻[3]であり，t_1 は t と $\boldsymbol{x}$ の関数である。遅延時刻 t_1 に発信された信号が現在の時刻 t の観測点に到達する。

(4.13) より，

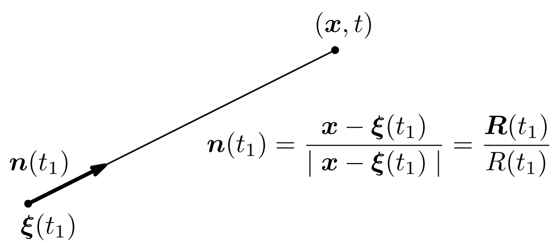
$$\begin{aligned}\frac{df(t_1)}{dt_1} &= 1 - \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1)}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}(t_1)}{dt_1} \\ &= 1 - \boldsymbol{n}(t_1) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_1) \end{aligned} \tag{4.14}$$

を得る。ここで

$$\boldsymbol{n}(t_1) \equiv \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1)}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid} \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t_1) \equiv \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1) \tag{4.16}$$

$$\alpha(t_1) \equiv \frac{df(t_1)}{dt_1} \tag{4.17}$$



また，

$$\beta_R(t_1) \equiv \boldsymbol{n}(t_1) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_1) \tag{4.18}$$

とおくと，これは，点粒子が時刻 t_1 において $\boldsymbol{x}$ 方向に向かって進んでくる速さを光速度 c で割ったもの[4]で，1 よりはるかに小さい。(4.12) よりスカラーポテンシャル (4.3) は

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \dfrac{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t') \mid}{c}\right)}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t') \mid} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid}\frac{1}{\alpha(t_1)} \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1 - \beta_R(t_1)}\frac{1}{\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid} \end{aligned} \tag{4.19}$$

[2] δ 関数の性質「$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(f(x)) = \left|\frac{df(x_0)}{dx_0}\right|^{-1}$, x_0 は $f(x) = 0$ の根」という公式を使ってもよい。

[3] 現在の時刻 t からみれば t_1 は $\mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(t_1) \mid /c$ だけ過去の時間。

[4] 光速 c で規格化した荷電粒子の速度。

まったく同様にしてベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{c}{1-\beta_R(t_1)}\frac{\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid}=\frac{\beta_R(t_1)}{c}A_0(x) \tag{4.20}$$

となる。これらを，Lienard-Wiechert（リエナール-ヴィーヘルト）のポテンシャルと呼ぶ。

- キャサリン:つまり，運動する荷電粒子によって生じる電磁ポテンシャルがLienard-Wiechert のポテンシャルということね。
- K氏：そうだね。ところで，$\beta_R(t_1)$ は粒子が観測点 $\boldsymbol{x}$ に向かってくる速度を表すので，点 $\boldsymbol{x}$ へ近付いてくる粒子は $\beta_R(t_1)>0$ で

$$\frac{e}{1-\beta_R(t_1)}>e \tag{4.21}$$

これは，あたかも粒子の電荷が大きくなったように見える。一方，点 $\boldsymbol{x}$ から遠ざかる粒子は $\beta_R(t_1)<0$ となるので

$$\frac{e}{1-\beta_R(t_1)}<e \tag{4.22}$$

で，電荷が小さくなったように見えるはずである[5]。

4.8.2 運動する点電荷が作る電場と磁場

- K氏：以上で運動する点電荷の電磁ポテンシャルが求められた。それがつくる電磁場は次の式より計算できる。

$$\boldsymbol{E}(x)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(x)-\nabla A_0(x) \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{B}(x)=\nabla\times\boldsymbol{A}(x) \tag{4.24}$$

　さて，具体的に計算を進めるにあたり，次の変数を導入して電磁ポテンシャルを書き換えておこう。

$$\begin{aligned} s(t_1)&=(1-\beta_R(t_1))\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid=R(t_1)-\frac{\boldsymbol{R}(t_1)\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1)}{c}\\ &=R(t_1)(1-\beta_R) \end{aligned} \tag{4.25}$$

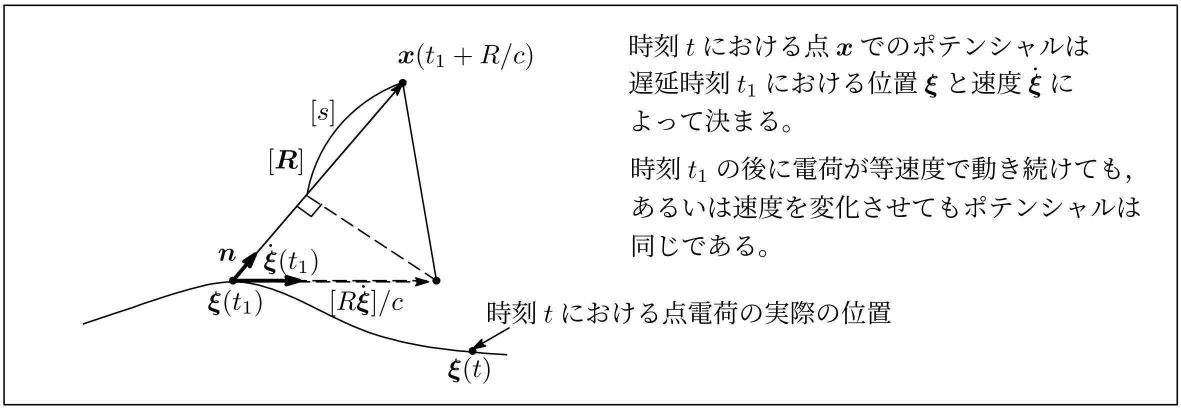
Lienard-Wiechert のポテンシャルは

$$A_0=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s}\right],\quad \boldsymbol{A}=\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{s}\right] \tag{4.26}$$

ここで [ ] は**遅延時間 t_1 での値を意味する**。

- キャサリン：電磁ポテンシャルがずいぶんスッキリした形に書き換えられるわね。s は一体何を意味するのかしら。荷電粒子が静止している場合は $\dot{\boldsymbol{\xi}}=0$ なので，$A_0=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}$ の Coulom ポテンシャルだけが残るわね。
- K氏：そうだね。$[s]$ は何を意味しているのか，それを考えてみよう。

[5] これは Lorentz 収縮により電荷が変化するという効果を表している。



時刻 t_1 に点電荷が発した信号は時間 $[R]/c$ 後に観測点 $\boldsymbol{x}$ に到達する。点電荷は加速度運動しているが。もし点電荷が t_1 での速度 $[\dot{\boldsymbol{\xi}}]$ を持ったまま飛行した場合には距離 $[R\dot{\boldsymbol{\xi}}]/c$ だけ進む。この距離ベクトルを $[\boldsymbol{R}]$ の方向に射影したものは $\boldsymbol{n}$ を点電荷の位置と観測点を結ぶ方向の単位ベクトルとして，$\boldsymbol{n}\cdot[R\dot{\boldsymbol{\xi}}]/c=[\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}]/c$ となる。だから，$[s]$ はその垂線が $[\boldsymbol{R}]$ と交わる点から観測点までの距離ということになる。

- キャサリン：そうなんだ。電磁ポテンシャルは遅延時刻 t_1 における「位置と速度」だけで決まり，その直後の速度変化には関係しないということね。

■電場の計算

- K氏：え〜っと，上で得られた電磁ポテンシャルを使うと電場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\nabla A_0 = -\frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{s}\right]-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= -\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{s}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t}-\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t}\right]+\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{s^2}\right]\nabla[\,s\,] \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

と書ける。$[\,s\,]$ と $[\dot{\boldsymbol{\xi}}]$ を $\boldsymbol{x}, t$ で微分するときは，あらわに含まれている $\boldsymbol{x}$ の他に $\boldsymbol{\xi}, t_1$ を通じての微分も考慮する必要があり，真正面から取り組むと神経をすり減らすので次の公式を活用しよう。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{\partial t_1}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t_1} \\
\nabla=\nabla_{\mathsf{exp}}+\nabla t_1\dfrac{\partial}{\partial t_1}
\end{cases} \qquad (4.28)
$$

∇_{exp} はあらわに含まれている $\boldsymbol{x}$ に対する偏微分を表す。

さて，(4.13) より

$$
t_1=t-\frac{R(t_1)}{c}, \qquad R=\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid \qquad (4.29)
$$

これの時間微分は，上の公式を使って，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial t_1}{\partial t} &= \left[1-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}\right]=1+\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial t_1}{\partial t}=1+[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}]\frac{\partial t_1}{\partial t} \\
\therefore\quad \frac{\partial t_1}{\partial t} &= \left[\frac{1}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right]=\left[\frac{1}{1-\beta_R}\right] \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

同様に空間微分は,

$$
\nabla t_1 = -\left[\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\right] + \left[\frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}}{cR}\right]\nabla t_1 = -\left[\frac{\boldsymbol{n}}{c}\right] + [\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}]\nabla t_1
$$

$$
\therefore\quad \nabla t_1 = -\left[\frac{\boldsymbol{n}/c}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right] = -\left[\frac{\boldsymbol{n}/c}{1-\beta_R}\right] \tag{4.31}
$$

となる。この結果を使うと $[\,s\,]$ の時間微分は

$$
s(t_1) = R(t_1) - \frac{1}{c}\boldsymbol{R}(t_1)\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t_1), \qquad \frac{\partial[\,s\,]}{\partial t} = \frac{\partial[\,s\,]}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t} = \left[\frac{1}{1-\beta_R}\frac{\partial s}{\partial t_1}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial[\,s\,]}{\partial t_1} &= \frac{\partial[R]}{\partial t_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_1}[\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}] = \left[-\frac{\boldsymbol{R}}{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}\right] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t_1}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t_1}\right] \\
&= [-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}] \\
\therefore\ \frac{\partial[\,s\,]}{\partial t} &= \left[\frac{1}{1-\beta_R}(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\right]
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

次に，空間微分は

$$
\begin{aligned}
\nabla[\,s\,] &= \nabla\left[R - \frac{\boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}}{c}\right] = \left[\frac{\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{c}\right] + \nabla t_1\frac{\partial[\,s\,]}{\partial t_1} = [\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}] + \nabla t_1\frac{\partial[\,s\,]}{\partial t_1} \\
&= \left[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta} + \frac{\boldsymbol{n}/c}{1-\beta_R}(c\beta_R - c\beta^2 + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\beta}})\right]
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

また,

$$
\frac{\partial[\,\dot{\boldsymbol{\xi}}\,]}{\partial t} = [\,\ddot{\boldsymbol{\xi}}\,]\frac{\partial t_1}{\partial t} = [c\dot{\boldsymbol{\beta}}]\frac{\partial t_1}{\partial t} \tag{4.34}
$$

である。以上の結果を (4.27) に入れて整理すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)} + \frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\Big\{(\beta_R - 1)\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{n}\Big\}\right] \\
&= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)} + \frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cs(1-\beta_R)^2}\right]
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}\frac{1}{(1-\beta_R)^3}\Big\{(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n}) + (1-\beta_R)\dot{\boldsymbol{\beta}}\right. \\
&\quad\left. + \ \frac{c}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}(1-\beta^2)(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\Big\}\right]
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

となる。最後の表記は「電磁気学再入門」テキストに載っている表記である[6]。尚，1 行目から 2 行目への変形は $1-\beta_R = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$ とベクトル解析の公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を使った。

- サム：荷電粒子の加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ に関係する項は距離 $R^2/cs^3 \sim 1/R$ に比例しますが，等速度運動に関係する項は $R/s^3 \sim 1/R^2$ で，こちらの方は遠方で早く減衰しますね。波動帯には届かないというか，これは輻射に関係しない項でしょうか。というのは，点電荷と共に一定の速度 $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ で運動している座標系から見れば，点電荷は静電場だけを作ることになりますから。

[6] 答えが分かっているからいいようなものの，ここまで来るのに大変苦闘した（^^）; 。尚,「電磁気学再入門」の (4.127), (4.128) 右辺第 1 項の係数 $1/(1-\beta_R)$ は誤植で正解は $1/(1-\beta_R)^3$。

- K氏：そうなんだ。実はこの加速度に関係する項が輻射に関係してくるんだ。詳しいことは後ほど触れるけど，輻射エネルギーは加速度の二乗に比例するという Lamor（ラーモア）の法則があり，等速運動する荷電粒子はエネルギーを放射しないんだね。

■磁場の計算

- K：次に磁場を計算しよう。磁場は電磁ポテンシャルを使って
$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla t_1 \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} = \nabla\times\boldsymbol{A} - \frac{1}{c(1-\beta_R)}\boldsymbol{n}\times\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} \tag{4.37}$$
と表せる[7]。右辺を個別に計算すると
$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{e\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left[\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{s}\right] = -\frac{e\mu_0}{4\pi}\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\nabla\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\boldsymbol{\beta}\times\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2}$$
$$= -\frac{e\mu_0 c}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{s^2}\right] \tag{4.38}$$
$$\tag{4.39}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial t_1}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} = \left[\frac{1}{1-\beta_R}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1}\right] = \frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{1-\beta_R}\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{s}\right]$$
$$= \frac{e\mu_0 c}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{1-\beta_R}\right)\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{s} + \boldsymbol{\beta}\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{1}{s}\right)\right] \tag{4.40}$$
となる。これらの結果を (4.37) に入れて整理すると
$$\boldsymbol{B} = -\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\boldsymbol{n}\times\left(\frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)} + \frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cs(1-\beta_R)^2}\right)\right] \tag{4.41}$$
$$= -\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}\frac{1}{(1-\beta_R)^3}\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + (1-\beta_R)\dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{c}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}(1-\beta^2)\boldsymbol{\beta}\right\}\right] \tag{4.42}$$
を得る。最後の表記は「電磁気学再入門」テキストに載っている表記である。なお，
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}[\,\boldsymbol{n}\,]\times\boldsymbol{E} \tag{4.43}$$
が常に成り立っている。

- アリス：込み入った計算が続いてお疲れさまでした。荷電粒子が与えられた軌道 $\boldsymbol{\xi}(t)$ を運動する場合，それが作る電磁場は前回勉強した原点局在モデルの電磁場とずいぶん異なった形をしているわね。ところで，荷電粒子が等速度運動する場合には Bio-Savart の法則があるけど，それは (4.42) から出てくるかしら。

- K氏：うん，そうだね，前回やった電気双極子輻射の波動帯における電磁場との比較は後で触れることにして，Bio-Savart の法則がでるか折角だから確認してみるかい。

- アリス：そうね。等速度運動だから $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ で，荷電粒子の速度は光速 c よりずっと遅い ($\beta \ll 1$) と仮定すると
$$\boldsymbol{B} \doteq -\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}\boldsymbol{n}\times\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|}\right)\right] = -\frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\nabla\frac{1}{R}\right] \tag{4.44}$$
となって，Bio-Savart の法則がでてくるわ。

[7] ここでの ∇ は ∇_{exp} であることに注意されたし。ベクトル解析の公式 $\nabla\times(f\boldsymbol{F}) = \nabla f\times\boldsymbol{F} + f(\nabla\times\boldsymbol{F})$ を使う。

- K氏：そうだね。点電荷が静止している場合，静電場は

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{c}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|^2}\boldsymbol{n}\right] = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\nabla\frac{1}{R}\right] \tag{4.45}$$

となって，Coulomb の法則がでてくる。

- エミリー：ところで，上で得られた電磁場の特長としてどのようなものがあるかしら。

- K氏：うん，特長を箇条書きでまとめておこう。

(1) Lienard-Wiechert のポテンシャルから得られた電磁場は近似に寄らない正確なものである。

(2) $\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入っていない項，つまり点電荷の等速度運動に関係した項は，$\boldsymbol{\xi}(t_1)$ からの距離の 2 乗に反比例している。

(3) $\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入った項，つまり点電荷の加速度に関係した項は，$\boldsymbol{\xi}(t_1)$ からの距離に反比例している。したがって，遠方ではこの寄与が大きくなる。これは先ほど サムが指摘したとおりだね。また，この項と $\boldsymbol{n}(t_1)$ との内積は 0 となるので，$\boldsymbol{n}(t_1)$ と直交している。

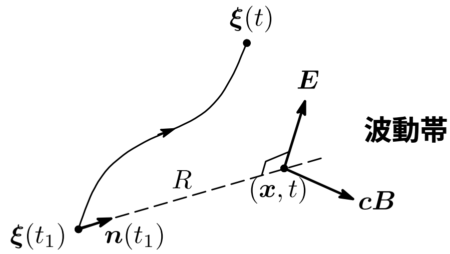
(4) (4.42) より常に $c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}(t_1)\times\boldsymbol{E}$ が成り立っている。しかし，

(5) $\boldsymbol{n}$ 方向の成分電場，磁場の縦成分はそれぞれ[8]

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}(t_1) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta_R)^2}\right] \tag{4.46}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}(t_1) = 0 \tag{4.47}$$

だから，あまり遠くないところ（点電荷に近いところ）では，電場には縦成分（Coulomb 場）が混ざっている。ただし，波動帯では電場の縦成分はなくなり，$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{n}$ と直交している。つまり自由空間の電磁波の性質を持っている。



アリスが最初言った電気双極子輻射の場合との比較をしてみよう。点電荷の速度が光速度に比べて小さいとき，波動帯での電磁場は（右が双極子輻射）

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\mathsf{rad}} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 cR}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times[\,\ddot{\boldsymbol{p}}\,]) \\ \boldsymbol{B}_{\mathsf{rad}} = \dfrac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\mathsf{rad}} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\mathsf{rad}} \end{cases} \tag{4.48}$$

と書けるだろう。比較すると $[\,\ddot{\boldsymbol{p}}\,]$ が $e\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ に対応していることが分かる。つまり双極子能率 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{\xi}$ によって与えられるというわけだ。そこで点電荷が単位時間に輻射する全エネルギーを求めると，前回の (4.81) より

$$W = \frac{\mu_0}{6\pi c}[\,\ddot{\boldsymbol{p}}\,]^2 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{\xi}}^2 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \tag{4.49}$$

[8] $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

となり，これは全輻射エネルギーは点電荷の加速度の二乗に比例するという Lamor（ラーモア）の公式になる。等速運動する点電荷はエネルギーを放射しないことになるね。Lamor の公式はまたあとで登場するよ。

4.8.3　制動輻射

- K氏：点電荷が加速することによって電磁波を発射することを制動輻射（Bremsstrahlung）という。ここでは，制動輻射のエネルギーを計算してみよう。波動帯での電磁場を使って Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0 c}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = \frac{1}{\mu_0 c}E^2\boldsymbol{n}\\ &= \frac{1}{\mu_0 c^3}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left[\left\{\frac{1}{(1-\beta_R)^6}\frac{1}{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\mid^2}\{\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\}^2\right\}\boldsymbol{n}\right]\\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\frac{[\,\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2}{[\,s^2(1-\beta_R)^4\,]}[\,\boldsymbol{n}\,] = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{R^2}\right]\frac{[\,\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2}{[(1-\beta_R)^6\,]}\end{aligned} \tag{4.50}$$

  となり，これを半径 $R=\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid$ の球にわたって面積分すると，単位時間にこの球を通過するエネルギーが得られる。半径 R の球面を時刻 t に通過するエネルギーを $dW'(t)/dt$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{dW'(t)}{dt} &= \int_{\partial S}\boldsymbol{P}dS = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{\partial S}dS\left[\frac{\boldsymbol{n}}{R^2}\right]\frac{[\,\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2}{[(1-\beta_R)^6\,]}\\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\,\frac{[\,\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2}{[(1-\beta_R)^6\,]}\end{aligned} \tag{4.51}$$

  となる。ただし，注意すべき点は，これは時刻 t_1 に点電荷から放射されたエネルギーが時刻 t に観測点 $\boldsymbol{x}$ で測定される単位時間，単位面積あたりのエネルギー量であって，時間 t_1 に点電荷が単位時間に放射したエネルギーではないということ。

- ユナ：なにやら話がややこしいけど，つまりこういうことなの。点電荷が時刻 t_1 から t_2 までの間に加速されて放射されるエネルギーは，観測点 $\boldsymbol{x}$ では時刻 $t^1=t_1+\dfrac{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid}{c}$ から $t^2=t_2+\dfrac{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_2)\mid}{c}$ までの間に観測される。点電荷が加速された時間は t_2-t_1 だけど，点 x でエネルギーを受ける時間は

$$t^2-t^1=\left(t_2+\frac{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_2)\mid}{c}\right)-\left(t_1+\frac{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}(t_1)\mid}{c}\right)$$

  となって，点電荷が加速された時間と異なるわ。だから，単位時間あたりという意味が，観測点 $\boldsymbol{x}$ における t についてなのか，点電荷 $\boldsymbol{\xi}(t_1)$ についての時間 t_1 についてなのか，そのあたりを明確に区別しないといけないということね。

■ Lamor の公式

- K氏：そういうこと。だから先ほどの (4.51) は，観測点 $\boldsymbol{x}$ での時刻 t における単位時間に通過するエネルギーということだね。点電荷が単位時間に放射したエネルギー dW/dt を知りたい場合は，

$$dt=\frac{dt}{dt_1}dt_1=\frac{d}{dt_1}\left(t_1+\frac{R(t_1)}{c}\right)dt_1=(1-\beta_R(t_1))dt_1 \tag{4.52}$$

を使って**「点電荷の単位時間」**に直してやらなければならない。そうすると，点電荷が単位時間に放射するエネルギーは

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega \frac{[\,\boldsymbol{n}\times((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2}{[(1-\beta_R)^5\,]} \tag{4.53}$$

となる。いずれにしても点電荷の速度が光速度に比べて小さい ($\beta \ll 1$) 場合は

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt} &= \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\,[\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\,]^2 \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\,[\,\dot{\boldsymbol{\beta}}^2-(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\,]\end{aligned} \tag{4.54}$$

で近似される。$\boldsymbol{n}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ の間の角度を θ とすると

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int d\Omega\,[\sin^2\theta(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2] = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}[\dot{\boldsymbol{\beta}}]^2\int d\Omega\,\sin^2\theta \tag{4.55}$$

$$= \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}[\,\dot{\boldsymbol{\beta}}\,]^2 \tag{4.56}$$

となって，Lamor の公式になる。放射の角分布は $\sin^2\theta$ に比例し，これは先ほどみたように電気双極子による放射になっている。

■ Rutherford 原子モデル

- K氏：Rutherford は、中心にプラスの電荷を持つ原子核があり，そのまわりにマイナスの電荷をもつ電子が回っているという原子モデルを考えた。しかし，このモデルでは軌道運動と共に電磁波を放射して電子はエネルギーを失い，その結果，螺旋を描きながら原子核に向かって落ち込み，ついには電子は原子核に衝突するという非現実的なモデルであった。ここでは Rutherford の原子モデルにおける電子の運動方程式を解いてみよう。
電子が正電荷を持つ原子核の周りを半径 r で円運動しており，速度を v，角速度を ω とすると，Newton の運動方程式は
$$mr\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$
これから電子の加速度は
$$r\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr^2}$$
が得られる。ところで，電子が加速されると電磁波が放射されエネルギーを失って行くが，単位時間に失うエネルギーは，Lamor の公式より
$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr^2}\right)^2 \tag{4.57}$$
次に，電子が原子核に衝突するまでの時間を求めてみよう。エミリー，やってみるかい。

- エミリー：はい，電子の持っているエネルギーは運動エネルギー $\frac{1}{2}m(r\omega)^2$ とポテンシャルエネルギー $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ の和なので
$$W = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{4.58}$$
単位時間に失われるエネルギーは dW/dt で，(4.58) より
$$\frac{dW}{dt} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} \tag{4.59}$$

で，これは電子の軌道が時々刻々縮まっていくことになる。この失われるエネルギーは電磁波の放射エネルギーとして持っていかれる分だから（全エネルギー保存則）

$$-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr^2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{dr}{dt}=-\frac{4}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2\frac{c}{r^2}=-\frac{4}{3}\frac{r_e^2}{r^2}c \tag{4.60}$$

ここで r_e は古典電子半径と呼ばれるものね。電子は初期値 $t=0$ で $r=a$ の位置にあり，原子核に落ち込むまでの時間を τ とすると

$$\int_0^\tau dt=-\frac{3}{4c}\frac{1}{r_e^2}\int_a^0 r^2dr$$

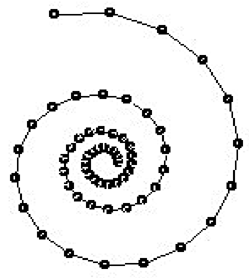
$$\therefore\quad \tau=\frac{1}{4c}\frac{a^3}{r_e^2} \tag{4.61}$$

が得られる。a として Bohr 半径 5.3×10^{-11}[m] をとると，$r_e=2.8179\times10^{-15}$[m], $c=2.9979\times10^8$[m/sec] として

$$\tau=1.6\times10^{-11}\texttt{sec} \tag{4.62}$$

となるわ。

- K氏：そうだね。この計算では，電子の円運動の1周期に失うエネルギーは小さいので電子の運動を近似的に円運動（電磁波の放出と共に電子の軌道半径が徐々に縮んでいく）としたけど，電子が電磁波を放射せずに Bohr 半径で円運動している場合の周期 T のオーダーを求めてみると $T=2\pi/\omega=\sqrt{a^3/c^2r_e}$ より $T\sim10^{-17}$[sec] となる。だから，電子が原子核にぶつかるまでザックリ言って100万回の半分50万回程度原子核の周りをクルクル回っている勘定になるね。ところで，ぶつかるまでに要した 10^{-11}sec という時間は素粒子の世界では非常に長い寿命ということになるけど，常識的にはまさに瞬間につぶれてしまうということになるね。
  さて，次回は電磁波が電荷の運動エネルギーに匹敵するような大きなエネルギーを持ち去る場合の一般的な運動方程式を考えていくことにするとして， 今日はこの辺りでお開きとしよう。それじゃ次回会える日を楽しみに，さようなら。



GOOD LUCK！
SEE YOU AGAIN！

by *KENZOU*

■**更新記録**

- 2012 年 3 月 31 日： 「運動する点電荷が作る電場と磁場」の計算レポート[9]が徳田さんから送られてきたので（HP の掲示板参照），氏の了解を得て付録に掲載。
- 2012 年 3 月 28 日：(4.35) の符号を修正。
- 2012 年 3 月 25 日：電場の計算で (4.32), (4.33) の誤植を修正。Thank's　徳田さん。

●付録

*********** Caluclation of E & B by M.Tokuda (2012.03.29) ***********

■電場の計算

電場を求める式は

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{4.63}$$

である。

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{u}}{s}, \qquad \text{ただし}\,\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{\xi}} \tag{4.64}$$

を (4.63) に代入すると

$$\boldsymbol{E} = -\frac{q\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{u}}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s^2}\nabla s \tag{4.65}$$

となる。$\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$ を代入して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{u}}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{c^2}{s^2}\nabla s\right)\\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{cs}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{cs^2}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{s^2}\nabla s\right)\end{aligned} \tag{4.66}$$

となる。ここで，これまで得られた結果の式

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{(1-\beta_R)}\left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \tag{4.67}$$

$$\nabla s = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1-\beta_R)}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t} = \frac{1}{1-\beta_R}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} \tag{4.69}$$

を (4.65) の各項に代入すると，各項は

第 1 項：

$$\frac{1}{cs}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} = \frac{1}{cs(1-\beta_R)}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1}$$

第 2 項：

$$-\frac{\boldsymbol{\beta}}{cs^2}\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)$$

第 3 項：

$$-\frac{1}{s^2}\nabla s = -\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} + \frac{\boldsymbol{n}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)$$

[9] この計算では遅延時間 t_1 での値をしめす [ ] が特に明記されていないので，その点を留意すること。

これらを (4.66) に代入する。まず，$\boldsymbol{E}$ の $\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t$ 以外の係数を除いた項を $\boldsymbol{E}_1$，$\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t$ の項を $\boldsymbol{E}_2$ とすると

$$\boldsymbol{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) \tag{4.70}$$

となる。$\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ をそれぞれ計算する。まず，$\boldsymbol{E}_1$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= -\frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R+\beta^2\right) - \frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} + \frac{\boldsymbol{n}}{s^2(1-\beta_R)}(-\beta_R+\beta^2) \\ &= \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R+\beta^2\right) - \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta_R)}{s^2(1-\beta_R)} \\ &= \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(\beta^2-1)}{s^2(1-\beta_R)}\end{aligned} \tag{4.71}$$

となる。次に，$\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t$ の項 $\boldsymbol{E}_2$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{1}{cs(1-\beta_R)}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + \frac{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{R}}{cs^2(1-\boldsymbol{\beta}_R)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}}{cs^2(1-\beta_R)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} \\ &= \frac{1}{cs(1-\beta_R)}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + \frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{R}}{cs^2(1-\beta_R)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}/s = \boldsymbol{R}/(R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{R}/R(1-\beta_R) = \boldsymbol{n}/(1-\beta_R)$ を上式に入れて整理すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \frac{1}{cs(1-\beta_R)}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + \frac{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{cs(1-\beta_R)^2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} \\ &= \frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\left((1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)\end{aligned} \tag{4.72}$$

となる。(4.70)，(4.71)，(4.72) より

$$\boldsymbol{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(\beta^2-1)}{s^2(1-\beta_R)} + \frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\left\{(1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}\right] \tag{4.73}$$

となる。この結果から，加速度の部分は距離の 1 乗に反比例する。

■磁場の計算

$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{E}$ と同様に微分演算を変換しなければならないので

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla t_1 \times \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t_1} \tag{4.74}$$

である。これまで得られた結果をまとめておくと

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A} = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{u}}{s} = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{c\boldsymbol{\beta}}{s} \\ &\nabla_{\mathsf{exp}}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'(t_1)\right| = \boldsymbol{n} \\ &\nabla_{\mathsf{exp}} s = \boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta} \\ &\nabla t_1 = -\frac{\boldsymbol{n}}{c(1-\beta_R)} \\ &\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{(1-\beta_R)}\left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \\ &\nabla s = \boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1-\beta_R)}\left(-\beta_R+\beta^2-\frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \\ &\frac{1}{s^2}\nabla s = \frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} - \frac{\boldsymbol{n}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R+\beta^2-\frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \\ &\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t} = \frac{1}{1-\beta_R}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1}\end{aligned} \tag{4.75}$$

さて,

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{c\boldsymbol{\beta}}{s} \tag{4.76}$$

の微分演算の部分は，ベクトルの外積は ∇ と $\boldsymbol{\beta}$ で，微分演算は s に掛かることに注意して

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{\beta}}{s} = -\boldsymbol{\beta} \times \nabla \left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.77}$$

として計算すればよい。まず,

$$\nabla \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}\nabla s = -\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} + \frac{\boldsymbol{n}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \tag{4.78}$$

ここで，右辺第 2 項は

$$\frac{\boldsymbol{n}}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) = \frac{1}{s^2(1-\beta_R)}\left(-\boldsymbol{\beta} + \beta_R\boldsymbol{\beta} - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \tag{4.79}$$

とすべてベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の式となる。$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta} = 0$ の関係式を使うと (4.77) より (4.78) は右辺の第 1 項だけが残るので

$$\boldsymbol{\beta} \times \nabla \frac{1}{s} = -\boldsymbol{\beta} \times \frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{s^2}$$

したがって (4.76) は

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{q\mu_0 c}{4\pi}\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{s^2} \tag{4.80}$$

となる。

次に $\nabla t_1 \times \partial \boldsymbol{A}/\partial t_1$ を計算する。$\partial \boldsymbol{A}/\partial t_1$ は

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{s}\right) = \frac{q\mu_0 c}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s}\right) \tag{4.81}$$

である。微分項は

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s}\right) = \frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} + \boldsymbol{\beta}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.82}$$

で，(4.32) の

$$\frac{\partial s}{\partial t_1} = \left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)$$

を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t_1} = -\frac{1}{s^2}\left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right) \tag{4.83}$$

となるので，(4.82) より

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s}\right) = \frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2}\left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)$$

が得られる。したがって (4.81) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} = \frac{q\mu_0 c}{4\pi}\left\{\frac{1}{s}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2}\left(-c\beta_R + c\beta^2 - \boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)\right\} \tag{4.84}$$

となり,

$$\nabla t_1 \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_1} = -\frac{q\mu_0 \boldsymbol{n}}{4\pi(1-\beta_R)} \times \left\{\frac{1}{cs}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2}\left(-\beta_R + \beta^2 - \frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)\right\}$$

が得られる。以上の結果より (4.74) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla t_1\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t_1}\\ &= -\frac{q\mu_0 c}{4\pi}\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{s^2}-\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{n}}{(1-\beta_R)}\times\left\{\frac{1}{cs}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2}\left(-\beta_R+\beta^2-\frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.85}$$

となる。$\boldsymbol{E}$ の計算でも行ったように，$\partial\boldsymbol{\beta}/\partial t_1$ を含まない項 $\boldsymbol{B}_1$ と含む項 $\boldsymbol{B}_2$ に分けて計算する。$\boldsymbol{B}_1$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1 &= -\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta}}{(1-\beta_R)s^2}(-\beta_R+\beta^2)\\ &= -\boldsymbol{n}\times\left\{\frac{\boldsymbol{\beta}(1-\beta_R)}{s^2(1-\beta_R)}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1-\beta_R)s^2}(-\beta_R+\beta^2)\right\}\\ &= -\frac{\boldsymbol{n}}{(1-\beta_R)s^2}\times\left\{(1-\beta_R)\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}(-\beta_R+\beta^2)\right\}\end{aligned}\tag{4.86}$$

となる。{ } の中は

$$(1-\beta_R)\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}(-\beta_R+\beta^2)=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^3=(1-\beta^2)\boldsymbol{\beta}\to(1-\beta^2)(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})$$

となる。最後の $-\boldsymbol{n}$ の項は $\boldsymbol{n}\times$ を作用させるので付け加えることができる。電場 $\boldsymbol{E}$ と比較するために行った。結局

$$\boldsymbol{B}_1=-\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)}\tag{4.87}$$

となり，

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)}$$

と，$\boldsymbol{E}_1$ に対して係数を除いて一致する。なお，符号の違いは係数の符号の違いによるもので，一致している。
次に $\boldsymbol{B}_2$ を計算する。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_2 &= -\frac{\boldsymbol{n}}{(1-\beta_R)}\times\left\{\frac{1}{cs}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2}\left(-\frac{\boldsymbol{R}}{c}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right)\right\}\\ &= -\frac{\boldsymbol{n}}{c(1-\beta_R)}\times\left(\frac{1}{s}+\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\beta}}{s^2}\right)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\\ &= -\frac{\boldsymbol{n}}{c(1-\beta_R)^2 s}\times\{(1-\beta_R)+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\end{aligned}\tag{4.88}$$

ここで $\boldsymbol{R}/s=\boldsymbol{n}/(1-\beta_R)$ を使った。$\boldsymbol{E}_2$ の表式は

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\times\left\{(1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}$$

であるので，後に $\boldsymbol{n}\times$ を作用するから，$\boldsymbol{B}_2$ を次のように書き直すことができる。

$$\boldsymbol{B}_2=-\frac{\boldsymbol{n}}{cs(1-\beta_R)^2}\times\left\{(1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}\tag{4.89}$$

係数は $\boldsymbol{E}_2$ と係数を除いて一致する。係数の違いについては

$$\begin{cases}E\to q/4\pi\varepsilon_0 c\\ B\to q\mu_0/4\pi\end{cases}$$

であるので，$\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2, \mu_0/4\pi = (1/c)(1/4\pi\varepsilon_0 c)$ である。よって磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\frac{q\boldsymbol{n}}{4\pi\varepsilon_0 c} \times \frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(\beta^2-1)}{s^2(1-\beta_R)} \\ &\quad - \frac{1}{c}\frac{q\boldsymbol{n}}{4\pi\varepsilon_0 c} \times \frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\left\{(1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}\end{aligned} \tag{4.90}$$

となる。これを $\boldsymbol{E}$ の表式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(\beta^2-1)}{s^2(1-\beta_R)} \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\left\{(1-\beta_R)\frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}\end{aligned} \tag{4.91}$$

と比べると

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} \tag{4.92}$$

となる。次に $\boldsymbol{B}$ の表式をベクトルの外積を使って表現する。

$$\begin{aligned}1-\beta_R &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n} \\ \frac{\partial\boldsymbol{\beta}(t_1)}{\partial t_1} &= \boldsymbol{a}(t_1)\end{aligned}$$

と変形して，(4.90) の { } の中を

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\} = \{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{n}\}\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}\}$$

とするとベクトル解析の公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

より $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{C}\to(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})$ となるので { } の中 $= \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\}$
したがって

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{s^2(1-\beta_R)} + \frac{1}{cs(1-\beta_R)^2}\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t_1}\right\}\right] \tag{4.93}$$

を得る。

―――――――― **以上**