

電磁気学再入門を読む(4) - 4

H E N L O U

2010年10月8日

10月に入った日の早朝, コニーら一行がK氏を訪ねてきた。

- コニー: こんにちは。いよいよ初秋の10月を迎えたわね。
- K氏: いやあ~, こんにちは。今年の夏は36℃を越える猛暑というか酷暑が続いてまいったね。引越しや暑さボケでなかなか気が湧かず、「電磁気学再入門を読む」もしばらくほったらかしにしていたけど, まあ, そろそろ再開しようかという気になってきた。ということで第4章を仕上げたという次第だ。ここまで来るのに大変だったけど, あとひと踏ん張りだ。がんばっていこう。
- エミリー: この暑さで野菜の収穫も厳しいものがあったようね。ところで, 前回は, 加速度運動する点電荷(荷電粒子)から放射される電磁場について勉強したわ。ここでは電磁波の散乱と誘電体中の電磁場について勉強するのね。
- K氏: そうなんだ。いろいろ面白い話題がでてくると思うので楽しみにして。それでは早速はじめよう。

目次

4.9	その他の問題	2
4.9.1	輻射の反作用	2
	(1) エネルギー保存則と減衰力	2
	(2) 輻射の反作用	3
4.9.2	電磁波の散乱	13
	(1) 点電荷による電磁波の散乱	13
	(2) 微分断面積	15
	(3) Thomson 散乱	15
	(4) Rayleigh 散乱	18
4.9.3	物質の中の電磁場	20
	(1) 電気感受率	20
	(2) 金属の導電性	23

4.9 その他の問題

4.9.1 輻射の反作用

(1) エネルギー保存則と減衰力

- K氏：点電荷が加速されているとき，点電荷は電磁波を放出し，その分，自身のもつ力学的エネルギーは減少した。つまり荷電粒子の運動にブレーキがかかるわけで，これを輻射（放射）の反作用という。この反作用は，電荷が放出した電磁波が自分自身に作用して，電荷に力を及ぼす自己力によるものだ。輻射の反作用は，電荷の運動方程式の中に減衰力として顔をだしてくる。減衰力の一般的な導出は後でやるとして，ここではエネルギー保存則の立場から減衰力を導いてみよう（もっとも，これから導出された減衰力は正しいものではないことが後で分かる）。

点電荷が周期運動している場合を考える。ある時刻 t_1 と t_2 において

$$\dot{\xi}(t_1) = \dot{\xi}(t_2) = 0 \quad (4.1)$$

とする（単振動している場合，最大振幅の位置で速度は0となるね）。点電荷の速度が光速に比べて小さい場合，点電荷の単位加速時間あたりに放射される輻射エネルギーはLamorの公式から

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\xi}^2(t) \quad (4.2)$$

で与えられ，一方，点電荷の運動エネルギーは，エネルギー保存則より，この分のエネルギーが失われることになる。求める減衰力を K とすると，時間 t_1, t_2 において K が点電荷になす仕事は，同じ時間に放射された輻射エネルギーに等しいことから，単位時間になす仕事量，つまり，仕事率¹は

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt K(t) \cdot \dot{\xi}(t) &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} dt \ddot{\xi}^2(t) \\ &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \dot{\xi}(t) \cdot \ddot{\xi}(t) \right|_{t_1}^{t_2} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\xi}(t) \dddot{\xi}(t) \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\xi}(t) \dddot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。2行目から3行目にかけては周期運動条件(4.1)を使うことで第1項をバツサリ落とすことができる。これから減衰力 K は

$$\mathbf{K}(t) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}(t) = \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{\hbar}{mc^2} \right) m \dddot{\xi}(t) \quad (4.4)$$

と得られる²。時間の3階微分が顔をだす。 α は微細構造定数と呼ばれ， $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1/137$ の値をとる。 $m \ddot{\xi}$ にかかる係数は時間の次元をもち³，電子の場合その大きさを見積もると

$$T_0 = \frac{e^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{\hbar}{mc^2} \right) \simeq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{137} \cdot 10^{-21} \text{sec} \sim 10^{-23} \text{sec}$$

のオーダーとなる⁴。電子の加速度が変化する時間を T とすれば $m \ddot{\xi} \simeq m \ddot{\xi}/T$ とおけるので，減衰力は $\mathbf{K}(t) \simeq (T_0/T) \ddot{\xi}(t)$ と表わすことができる。加速度が変化する時間 T が T_0

¹ 単位時間にする仕事の量：力と速度の積

² 古典論なのに \hbar がでてきたことにギョッとされた方がおられるかも知れないが，微細構造定数を引っ張り出す関係で \hbar が顔をだしただけと理解いただきたい。

³ これでちょうど $K(t)$ は力の次元となる。

⁴ 電子の静止質量： $mc^2 = 0.511 \text{MeV} = 0.511 \times 10^{-13} \text{J}$, $\hbar = 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$.

に比べて十分長い場合，放射による減衰力は無視できる。例えば，巨視的な荷電体の場合などは質量 m が極めて大きく， T_0 は電子のときよりもさらに小さくなる。このため，電磁波の放射による減衰力は無視できる。

いま，1個の点電荷が外力 F によって加速され，電磁波を放射しながら運動している場合を考えよう。点電荷の運動方程式は

$$m\ddot{\xi}(t) = F(t) + K(t) = F(t) + T_0 m \ddot{\xi}(t) \quad (4.5)$$

となる。これは時間について3階の微分方程式なので，解は初期位置と初期速度の2つだけでは決まらない。つまり，時間について2階のNewtonの運動方程式から予想される解以外の解を含んでいる可能性がある。そこで，そのあたりの様子を調べるために $F = 0$ の場合についてみると，電子は自由運動（等速運動）するので $\ddot{\xi}(t) = 0$ なる解をもち，

$$\ddot{\xi}(t) = T_0 \ddot{\xi}(t) = 0 \quad (4.6)$$

より減衰力は0となる。ところで，この解以外に

$$\frac{d}{dt} \ddot{\xi}(t) = \frac{1}{T_0} \ddot{\xi}(t) \longrightarrow \ddot{\xi}(t) = \ddot{\xi}(0) \exp(t/T_0) \quad (4.7)$$

の解をもつ。 $\ddot{\xi}(0)$ は $t = 0$ における加速度。上の解は，外力が作用していないのに荷電粒子の加速度が指数関数的に増大するという奇妙な運動を示す⁵。この妙な解は $F = 0$ として出てきたものだが，この場合，点電荷の運動は周期的ではないことに注意！つまり，条件(4.1)を満たさないので，残念ながら減衰力 $T_0 m \ddot{\xi}(t)$ が正しく定式化されているという保証はない，ということになる。そこで，非周期運動をも含めた一般の運動に対して，減衰力がどのように定式化されるかを考える必要がある。そのためには荷電粒子の自分自身で作る電磁場から受ける反作用を正確に考慮していくことが必要になるわけだね。

- エミリー：ちょっとまわりくどい議論のようだったけど，整理するとこういうことね。周期運動を取り上げて，減衰力 K による仕事 = 輻射エネルギーとして求めた K は残念ながら減衰力を正しく表わしているという保証はないということね。

(2) 輻射の反作用

- K氏：うん。そこで，電磁場の中に置かれた点電荷系の運動を考えてみよう。まず，電磁場の中の i 番目の点電荷の運動方程式は

$$m\ddot{\xi}_i(t) = e_i \left\{ \mathbf{E}(\xi_i(t), t) + \dot{\xi}_i(t) \times \mathbf{B}(\xi_i(t), t) \right\} \quad (4.8)$$

で表わされる。点電荷系の運動に伴って電磁場が発生するが，その電磁場は次のMaxwellの方程式を満たす。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i \neq 0} \rho_i(\mathbf{x}, t) \quad (4.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \left\{ \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i \neq 0} \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.12)$$

⁵ 初期条件に位置と速度以外の特定条件をつけてこの不可解な解を排除するという操作が必要になる。

ただし,

$$\begin{cases} \rho_i(\mathbf{x}, t) = e_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i(t)) \\ \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) = e_i \dot{\boldsymbol{\xi}}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i(t)) \end{cases} \quad (4.13)$$

で, ρ_0 と \mathbf{J}_0 は, いま考えている電子の電荷密度と電流密度で, ρ_i と \mathbf{J}_i はそれ以外のすべての点電荷系による電荷密度と電流密度を表す。また, 電子は極めて小さいながらも半径 a_0 をもつ剛体球であるとしておく⁶。

- アリス: え~っと, 電磁場を注目している電子それ自身が作る電磁場とそれ以外の電子系が作る電磁場とに分離したわけね。電子は有限の大きさを持つ剛体球と仮定するということは, 電荷が球体内に分布し総電荷が e ということね。電子を有限な大きさを持つ帯電球とした場合, その静電エネルギー H_{Coul} は

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.14)$$

で⁷, この式に電荷密度 (4.13) を入れて積分すると分母に $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ があるため発散してしまい, 無限大のエネルギーとなってしまいうわ。電子が有限の大きさを持つとする剛体球モデルは無理があるのじゃないかしら?

- K氏: うん, その疑問は当然だね。これは自己エネルギーの問題として知られる, 未だに本質的解決がされていない難問中の難問なんだ! だからややこしいことには蓋をして(笑い), 先ほどの発散積分は a_0 で切断 (cut-off) して積分を収束させるというやり方で切り抜ける。 $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ で積分は発散するので, これを防ぐために点 \mathbf{x} と点 \mathbf{x}' とは

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{a_0}{2}$$

までしか近寄れないとするんだ。あるいは, (4.14) の積分の分母を $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + a_0/2$ に置きかえてやってもよい。そうすると積分は収束して, 静電エネルギーは

$$H_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \quad (4.15)$$

と得られる。相対論によると質量 m の粒子には mc^2 のエネルギーをもつので, これを H_{Coul} に等しいと置き, a_0 を r_e に置き換えると古典電子半径 r_e が得られる。

$$mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e}, \quad \therefore r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \simeq 2.8 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (4.16)$$

- アリス: この剛体球モデルでは, 電子は古典電子半径の殻を持ち, 殻の中は空っぽ? 電荷は殻の外側を包み込むように分布しているという構造になるわね。
- K氏: そうだね。まっ, そういうことで, $i = 0$ 番目の電子の運動方程式を書くと次のようになる。

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}_0(t) = \int_V d\mathbf{x} \{ \rho_0(\mathbf{x}, t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \} \quad (4.17)$$

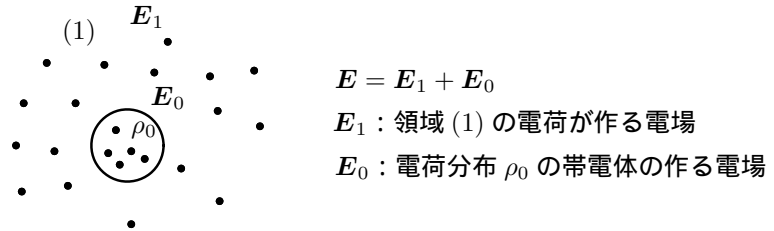
注目している電子自身が作った電磁場の自分自身に作用する自己力 (self force) を考えるために電磁場を2つに分けよう。すなわち

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.18)$$

⁶ 相対論では剛体は存在しないので, この前提は相対論の要求と相反する。

⁷ 第3回目の (3.73) を参照。

- エミリー：自己力というを少し詳しく説明いただけるかしら。
- K氏：そうだね。いままで自己力というものを特に考慮に入れてこなかったけど、輻射の問題ではこれが重要なファクターになるので簡単に復習しておこう。自己力というのは先ほども少し言ったように、自分が作る場から自分自身が力を受けるというものだ。



いま、静電場 E_1 があり、その中に電荷密度 ρ_0 の分布を持つ帯電体をおく。帯電体も電場 E_0 を作るだろう。だから、全体の電場 E はもともとあった静電場 E_1 と帯電体の作る新たな電場 E_0 の重ね合わせで $E = E_1 + E_0$ となる。したがって、帯電体が電場 E から受ける力を F とすると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) (\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_0(\mathbf{x})) \\
 &= \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) + \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}_0(\mathbf{x})
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

と表すことができ、右辺の第2項

$$\mathbf{F}_0 = \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{E}_0(\mathbf{x})
 \tag{4.20}$$

を自己力といい、 $E_0(x)$ を自己場 (self field) と呼んでいる。

- キャサリン：自分が作った電場を自己場といい、その自己場から自分自身が力を受ける、それを自己力と呼んでいるわけね。
- K氏：そうだね。
- アリス：ところで Coulomb の法則を勉強したとき自己力は問題にできなかったわ。それなりの理由があることと思うけど、その辺りことをハッキリしていただけるかしら。
- K氏：静電場の場合、この自己力は0になるんだ。もし、自己力が0でないとすると、外部の電場 E_1 がないときでも自分自身に自己力が作用して勝手に動き出すという奇妙なことになるね。理論的には、帯電体のつくる静電場は

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \rho_0(\mathbf{x}')
 \tag{4.21}$$

x' は帯電体内部の座標だね。これを (4.20) に入れると

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}
 \tag{4.22}$$

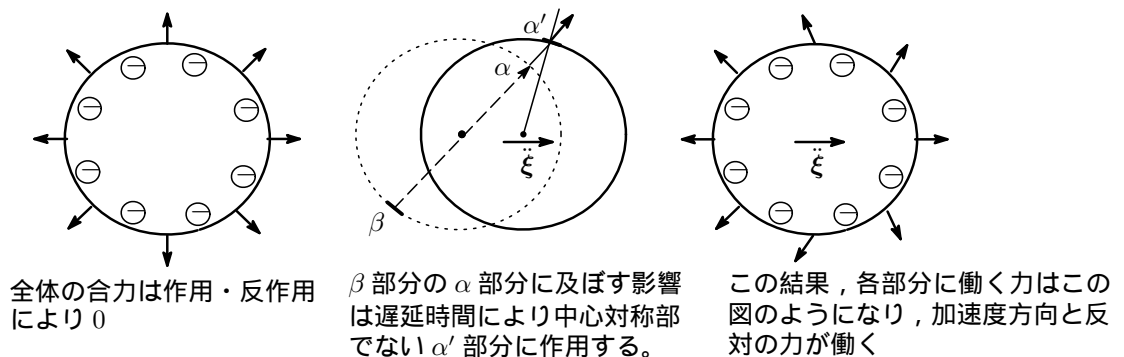
ここで積分変数 x と x' を入れ替えると積分値の大きさは同じで負号が変わり、 $F_0 = -F_0$ となるので $F_0 = 0$ でなければならない。静電場では自己力は0ということになる。

- アリス：なるほど。いま，電荷分布 ρ_0 を持つ帯電体を考えたけど，点電荷の場合は $x' = 0$ とすればいいわけね。そうすると自己力の大きさは

$$f_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int dV \frac{1}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \frac{1}{r^2} = \frac{e^2}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta = 0 \quad (4.23)$$

となるわけね。

- コニー：電荷が等速運動している場合，それに乗った座標系から見れば電荷は静止して見えるので自己力は0。しかし加速度運動している場合には自己力の影響が顔をだすというわけね。自己力の origin についていまいちイメージが湧かないんだけど，そのあたりのことを分かりやすく説明していただけるかしら。
- K氏：うん。いま，電子を一つの荷電された球と考えているわけだけど，この荷電球体が静止している場合，各部分の電荷は他の部分の電荷と反発しあうけど，全体としての合力は0で釣り合っているね。しかし，電子が加速されるときは電磁気的な影響が他の場所に伝わるのに時間がかかるために，全体の力の釣り合いが崩れてしまうことから自己力が顔をだしてくるんだ。具体的にこの状況を図で示すと次のようになる。



この結果，加速度運動している電子には加速度と逆向き力（反作用力）が作用するということになるというわけだね。

- コニー：そうなんだ。このブレーキ力が減衰力の Origin か。。。。
- K氏：うん。さて，話を戻して，(4.18) で2つに分けた電磁場はそれぞれ Maxwell の方程式を満たすので

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \left\{ \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

および

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i \neq 0} \rho_i(\mathbf{x}, t) \\
\nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \left\{ \sum_{i \neq 0} \mathbf{J}_i(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right\} \\
\nabla \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) &= 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

となる。そして電子の運動方程式は

$$m \ddot{\xi}_0(t) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0 \tag{4.26}$$

と表せる。 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_0$ はそれぞれ

$$\mathbf{F}_1 = \int d\mathbf{x} \{ \rho_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) \} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{F}_0 = \int d\mathbf{x} \{ \rho_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) \} \tag{4.28}$$

\mathbf{F}_1 は、他の粒子により発生した電磁場がいま注目している電子に働く力を表わし、 \mathbf{F}_0 は自己力だったね。今まで顕には言わなかったが、Lorentz 力はこのような自己力を取り入れたもので、それではじめて全系のエネルギーや運動量保存則が成立することに注意しておこう。

さて、(4.24) を形式的に解くと、電磁ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
A_0(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

で表される。ここで電磁ポテンシャルの初期項 A^0, A_0^0 は省略した。 t' は、

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \tag{4.30}$$

である。(4.29) を (4.28) に入れると自己力の作用の下での電子の運動方程式が得られる。いま、電子の速度は光速に比べて十分小さいものとする、速度 $\dot{\xi}_0(t)$ の 1 次の項だけを考えればよい。 \mathbf{J}_0 は $\dot{\xi}$ に比例し、また $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ より $|\dot{\xi} \times \mathbf{B}| \sim \beta |\mathbf{E}| \doteq 0$ となるので、磁場による力は無視できる。したがって、運動方程式は次のようになる⁸。

$$\begin{aligned}
m \ddot{\xi}_0(t) &= \mathbf{F}_1 + \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) \\
&= \mathbf{F}_1 - \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}, t) \left(\nabla A_0(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \\
&= \mathbf{F}_1 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\mathbf{x} \rho_0(\mathbf{x}, t) \left\{ \nabla \int d\mathbf{x}' \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right\}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

⁸ 以下の議論は砂川重信「理論電磁気学」(第3版)、J.D.Jackson「Classical Electrodynamics」2ndEdition を参照。

ここで右辺の空間積分は半径 a の電子の球の内部にわたるものであることに注意しよう。
発信時刻 t' は

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \sim t - \frac{a}{c} \quad (4.32)$$

の程度で、 t' は $\sim (a/c)$ 程度だけ t と異なる。この時間間隔は非常に短く、この間での電子の運動状態の変化は極めてわずかであると考えられるので、 $t' = t$ の周りで Taylor 展開しても問題ない。遅延時刻 $t' = t - (R/c)$ での値を [] をつけて表すと

$$[] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [], \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.33)$$

したがって電荷密度や電流密度は

$$[\rho_0] = \rho_0(\mathbf{x}', t - R/c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \rho_0(\mathbf{x}', t) \quad (4.34)$$

$$[\mathbf{J}_0] = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t - R/c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) \quad (4.35)$$

これを (4.31) に入れ、微分演算子 ∇ は \mathbf{x} に作用することに留意して整理すると

$$m\ddot{\xi}_0(t) = \mathbf{F}_1 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ \rho_0(\mathbf{x}', t) \nabla R^{n-1} + \frac{R^{n-1}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \right\} \quad (4.36)$$

となる。右辺第2項のスカラーポテンシャル A_0 からくる項のうち、 $n = 0$ の項は、

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}', t) \nabla \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

で、これは \mathbf{x} と \mathbf{x}' に関して反対称であるから消える⁹。次に $n = 1$ 項は ∇R^0 となるので恒等的に 0 となる。

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_0(\mathbf{x}', t) \nabla R^0 = 0$$

そこで (4.36) の右辺第2項の自己力のうち、スカラーポテンシャルからくる項では $n \rightarrow n + 2$ と置き換え、整理すると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \{ \} \\ \{ \} &= \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) + \frac{\partial \rho_0(\mathbf{x}', t)}{\partial t} \frac{\nabla R^{n+1}}{(n+2)(n+1)R^{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

となる。 $\{ \}$ の式に電荷保存則 (連続の式) を使うと

$$\begin{aligned} \{ \} &= \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) - \nabla' \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) \frac{(n+1)R^n \nabla R}{(n+2)(n+1)R^{n-1}} \\ &= \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) - \nabla' \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{R}}{n+2} \end{aligned}$$

⁹ これは静電自己力で、球対称の電荷分布の場合には 0 になる。

x' に関する積分はしたがって

$$\int d\mathbf{x}' \left\{ R^{n-1} \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) - \frac{1}{n+2} (\nabla' \cdot \mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t)) (R^{n-1} \mathbf{R}) \right\} \quad (4.38)$$

ここで次の展開式

$$\nabla' \cdot (\mathbf{J}_0 R^{n-1} \mathbf{R}) = (\nabla' \cdot \mathbf{J}_0) R^{n-1} \mathbf{R} + \mathbf{J}_0 \nabla' \cdot (R^{n-1} \mathbf{R})$$

を使って左辺を表面積分に直して落とすと

$$(\nabla' \cdot \mathbf{J}_0) R^{n-1} \mathbf{R} = -\mathbf{J}_0 \nabla' \cdot (R^{n-1} \mathbf{R})$$

したがって (4.38) は

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{x}' \left\{ R^{n-1} \mathbf{J}_0 + \frac{1}{n+2} R^{n-1} (\mathbf{J}_0 \cdot \nabla') (R^{n-1} \mathbf{R}) \right\} \\ &= \int d\mathbf{x}' \left\{ R^{n-1} \mathbf{J}_0 - \frac{1}{n+2} R^{n-1} \left(\mathbf{J}_0 + (n-1) \frac{(\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} \right) \right\} \\ &= \int d\mathbf{x}' R^{n-1} \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \mathbf{J}_0 - \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \frac{(\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。いま，電子は微小な剛体球としているので \mathbf{J}_0 は

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{x}', t) = \dot{\xi}_0(t) \rho_0(\mathbf{x}', t) \quad (4.40)$$

と表せる。そこで (4.39) を成分表示で書くと

$$(4.39) = \sum_j \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}', t) R^{n-1} \dot{\xi}_j(t) \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \delta_{ij} - \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \frac{R_i R_j}{R^2} \right\} \quad (4.41)$$

となる。これを (4.37) に入れたとき， \mathbf{x} と \mathbf{x}' について対称であるから

$$R_i R_j = \frac{1}{3} R^2 \delta_{ij} \quad (4.42)$$

とおくことができる。結局 (4.39) は

$$(4.39) = \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}', t) R^{n-1} \dot{\xi}_0(t) \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+2} \right) \right\} = \frac{2}{3} \dot{\xi}_0(t) \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}', t) R^{n-1}$$

となり，これを (4.37) に代入すると

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2}{c^{n+2}} \frac{2}{3} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}} (\xi_0(t) \rho_0(\mathbf{x}', t)) \quad (4.43)$$

が得られる。 ρ_0 を時間微分すると電荷保存則より \mathbf{J}_0 が現れ，(4.40) より $\dot{\xi}_0$ の 2 次以上の項がでてくるが，電子の速度 $\dot{\xi}_0$ とその時間微分に関する非線形項を無視する¹⁰と

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (\dot{\xi}_0(t) \rho_0(\mathbf{x}', t)) \rightarrow \rho_0(\mathbf{x}', t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \dot{\xi}_0(t) \quad (4.44)$$

とおけるので，自己力 (4.43) は次のように表せる。

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2}{c^{n+2}} \frac{2}{3} \frac{d^{n+2} \xi_0(t)}{dt^{n+2}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \rho_0(\mathbf{x}', t) \quad (4.45)$$

¹⁰ $\dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0, \dots$ がそれらの 2 乗を無視できるほど小さいと仮定する

ごたごたした計算が続いてなんだったど、自己力を定式化することができた。最初の数項を調べてみよう。

$$\cdot n = 0 : \mathbf{F}_0^{(0)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \ddot{\xi}_0(t) \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho_0(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}', t)}{R} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{4}{3c^2} \ddot{\xi}_0(t)$$

この項は自己エネルギーと関係し、(4.15) で求めた自己エネルギーを W とす

$$\text{ると } \mathbf{F}_0^{(0)} = -\frac{4}{3c^2} W \ddot{\xi}_0(t)$$

$$\cdot n = 1 : \mathbf{F}_0^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \frac{2}{3} \dddot{\xi}_0(t) \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho_0(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}', t) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}_0(t)$$

これは (4.4) で求めた減衰力だ！

$$\cdot n \geq 2 : \mathbf{F}_0^{(n)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2}{c^{n+2}} a_n \xi^{(n+2)}(t)$$

$$\text{ただし } a_n = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}, t) R^{n-1} \rho(\mathbf{x}', t)$$

a_n は剛体球電子モデルの内部構造に関係した量である。

(4.46)

これらのことから、自己力の作用下における電子の運動方程式は

$$m \ddot{\xi}_0(t) = \mathbf{F}_1 - \frac{e^2}{3c^2} W \ddot{\xi}_0(t) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}_0(t) + \dots \quad (4.47)$$

となる。右辺の第 2 項は加速度に比例する項で、その係数を m_e として左辺に移項すると

$$(m + m_e) \ddot{\xi}_0(t) = \mathbf{F}_1 + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}_0(t) + \dots \quad (4.48)$$

$$m_e = \frac{4}{3c^2} W = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e c^2} \quad (4.49)$$

となり、電子の質量が増えたような効果としてあらわれる。 m を力学的質量とするなら、 m_e は電子が自分の周りに静電場を作ることにもとづく電磁的質量であると解釈でき、われわれが観測する電子の質量は $m^* = m + m_e$ であると考えることができる。(4.48) が、電子の非周期運動に対しても成り立つ一般的な運動方程式である。

ところでこの方程式の右辺には時間の 3 階微分が含まれているので、(4.7) の不可解な解が顔をだすが、(4.48) の方程式は、速度や加速度の線形項だけを採用した、つまり $\dot{\xi}, \ddot{\xi}, \dots$ がそれらの 2 乗を無視できるほど小さいという前提で成り立つもので、(4.7) の解はこれを満たさない。だから、この解は許されないことになる。

- コニー：得られた一般的な運動方程式と (4.5) の点電荷の運動方程式を並べて書くと

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + m_e) \ddot{\xi}_0(t) = \mathbf{F}_1(t) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}_0(t) \\ \times \quad m \ddot{\xi}(t) = \mathbf{F}(t) + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dddot{\xi}(t) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

非常によく似ているけど、本質的に異なるのね。 の運動方程式は自己力の作用を取り込んだ電子の一般的な運動方程式で、これは $\dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t), \dddot{\xi}(t), \dots$ の 2 乗は無視できるほど小さいと仮定して導出された。それ故、3 階微分に起因する奇妙な解は存在しないことになるわけね。

ところで、電磁質量に関してだけど、 m_e は発散積分を a_0 で切断し、無理に $a_0 = r_e$ とおいた結果でてきたもの、つまり、非常に恣意的にやったものだからこの値を観測できる値と考えることは無理があると思うのだけど。また、 $a_0 \rightarrow 0$ では発散してしまうわね。

- K氏：そうなんだ。はじめにあった質量 m と m_e との和が有限となり，これが実際に観測される電子の質量であると考えたと事実上は無敵大がでなくなる。このような考え方がくりこみ理論の精神なんだね。ちなみに，素粒子論の方では， m^* を着物を着た質量， m を裸の質量， m_e を着物の質量といったりもしている。さて，(4.48) は

$$m_{obs}\ddot{\xi}(t) = F_1 + \frac{m_{obs}}{\omega_D}\dddot{\xi}(t) + \dots \quad (4.51)$$

$$m_{obs} = m + \frac{4}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e c^2} = m + \frac{4}{3}m, \quad \frac{1}{\omega_D} \equiv \frac{e^2}{6\pi m_{obs}\epsilon_0 c^3}$$

と表すこともできる¹¹。(4.51)の第2項は電子の運動を減衰させる働きをもち，減衰項と呼ばれる。 $1/\omega_D$ は時間の次元をもち，電子の場合 10^{-23}sec のオーダー。

それでは一般的な運動方程式を使って，電荷を持つ調和振動子の運動を考えてみよう。点電荷 e が $F = -m\omega_0^2\xi(t)$ の弾性力を受け， $t = 0$ で振動子の振幅は ξ_0 とする。電子の運動方程式は

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = \frac{1}{\omega_D}\dddot{\xi}(t) \quad (4.52)$$

減衰力のため，運動エネルギーは放射エネルギーに変換されて振幅は次第に小さくなっていくが，いま減衰力は弾性力に比べて十分小さいとして

$$\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2} = \xi_0 e^{(i\omega_0 - \gamma/2)t} \quad (4.53)$$

の形の解を求める。

- ユナ：え～っと，なぜそのような形の解になるのかしら。少しそのあたりの事情を説明していただける。
- K氏：そうだね。減衰力が働かない場合，調和振動子の解は $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega_0 t}$ だね。これから $\ddot{\xi}(t) = -\omega_0^2\xi(t)$ が得られる。したがって，減衰力が十分小さい場合，これを使って $(1/\omega_D)\dddot{\xi}(t) \simeq -(\omega_0^2/\omega_D)\dot{\xi}(t)$ と近似できるね。そうすると(4.52)は

$$\ddot{\xi}(t) + \gamma\dot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = 0, \quad \gamma = \frac{\omega_0^2}{\omega_D} \quad (4.54)$$

となる。 $\gamma \ll \omega_0$ とすると(4.53)は(4.54)を近似的に満たすことが分かる。このことは具体的に計算して確認しておいて頂戴。ということで，先に進もうか。

$\dot{\xi}(t) = (i\omega_0 - \gamma/2)\xi(t)$, $\ddot{\xi}(t) = (i\omega_0 - \gamma/2)^2\xi(t)$, $\dddot{\xi}(t) = (i\omega_0 - \gamma/2)^3\xi(t)$ で，(4.52)の左辺は $\omega_0 \gg \gamma$ と仮定して γ について1次の量だけをとると

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) = (i\omega_0 - \gamma/2)^2\xi(t) + \omega_0^2\xi(t) \simeq -i\gamma\omega_0\xi(t) \quad (4.55)$$

一方，右辺は

$$\frac{1}{\omega_D}\dddot{\xi}(t) \simeq -i\left(\omega_0^3 + \frac{3}{2}\gamma\omega_0^2\right)\frac{1}{\omega_D}\xi(t) \simeq -i\frac{\omega_0^3}{\omega_D}\xi(t) \quad (4.56)$$

とすると，これから

$$\gamma = \frac{\omega_0^2}{\omega_D} \quad (4.57)$$

が得られる。このとき， $\omega_0 \gg \gamma$ の条件は

$$\omega_0 \gg \frac{\omega_0^2}{\omega_D} \longrightarrow \omega_0 \ll \omega_D \sim 10^{23}\text{sec}^{-1} \quad (4.58)$$

¹¹ (4.16) : $mc^2 = e^2/4\pi\epsilon_0 r_e$

となり, 10^{23}sec^{-1} の角振動数はガンマ線の角振動数であるから, $\omega_0 \gg \gamma$ の条件は十分満たされている。

- キャサリン：ちょっと待って、左辺は γ の 1 次の項を残したけど、右辺は γ の 1 次の項を落としているわね。どういうことかしら？
- K 氏：う～ん、よく見てるね。実は, $\omega_0 \gg \gamma$ の仮定から $\omega_0^3 \gg \gamma \omega_0^2$ となるだろう。だから negligible small ということで落としても問題ないんだね。
- キャサリン：なるほど、そういうことね。
- K 氏：さて、減衰振動している電荷から放射される電磁波を調べてみよう。電荷が単振動しているときには、放射される電磁波は点電荷の角振動数 ω_0 に等しい単色波になるが、(4.53) のような減衰振動している点電荷から放射される電磁波はいろいろな角振動数を含む電磁波となる。点電荷の単位時間に放射するエネルギーは Lamor の公式より

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\xi}(t)^2$$

で、これの時間平均をとると¹²

$$\overline{\frac{dW(t)}{dt}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2} |\ddot{\xi}(t)|^2 = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\xi}(t)|^2 \quad (4.59)$$

したがって、全時間にわたって点電荷が放射する平均エネルギー \overline{W} は

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \overline{\frac{dW(t)}{dt}} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt |\ddot{\xi}(t)|^2 \quad (4.60)$$

で与えられる。次に、平均エネルギー \overline{W} の振動数分布を求めるために、

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{a}(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.61)$$

と Fourier 変換してやる。この逆変換は

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \xi(t) e^{-i\omega t} \quad (4.62)$$

(4.61) より

$$\ddot{\xi}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \mathbf{a}(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.63)$$

となるので、平均エネルギーと角振動数の関係は

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega'^2 \omega^2 \mathbf{a}^*(\omega') \cdot \mathbf{a}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \\ &= 2\pi \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega'^2 \omega^2 \mathbf{a}^*(\omega') \cdot \mathbf{a}(\omega) \delta(\omega - \omega') \\ &= \frac{e^2}{6\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^4 \mathbf{a}^*(\omega) \cdot \mathbf{a}(\omega) = \frac{e^2}{6\epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^4 |\mathbf{a}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

となる。それぞれの角振動数に対する放射電磁波の強度を $I(\omega)$ とすると

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega)$$

¹² ξ の複素表現をとる。詳しいことは次のセクションで。

と表わせるので、強度 $I(\omega)$ は

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega^4}{6\epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}(\omega)|^2 \quad (4.65)$$

で与えられる。点電荷は $t \leq 0$ では原点に静止して、 $t > 0$ のときから減衰振動を始めるとする。そうすると (4.62) より

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\omega) &= \frac{\boldsymbol{\xi}_0}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{i(\omega_0 - \gamma/2)t} e^{-i\omega t} = \frac{\boldsymbol{\xi}_0}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{i(\omega_0 - \omega)t - (\gamma/2)t} \\ &= \frac{\boldsymbol{\xi}_0}{2\pi} \frac{-1}{i(\omega_0 - \omega) - (\gamma/2)} \\ \therefore |\mathbf{a}(\omega)|^2 &= \frac{|\boldsymbol{\xi}_0|^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \end{aligned} \quad (4.66)$$

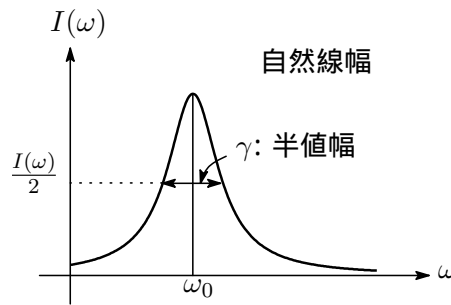
となって、求める放射強度の角振動数分布は

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega^4}{6(2\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\boldsymbol{\xi}_0|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (4.67)$$

と得られる¹³。 $I(\omega)$ は $\omega = \omega_0$ 付近だけで大きな値を持つから (4.67) の右辺分母の $(\omega_0 - \omega)^2$ 以外の ω は ω_0 に置き換えてよい。このとき (4.67) は

$$I(\omega) = \frac{e^2 \omega_0^4}{6(2\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{|\boldsymbol{\xi}_0|^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (4.68)$$

と表わされる。



放射される電磁波の強度は $\omega = \omega_0$ のとき最大で、その周りでは急激に減少するね。 $\omega_0 - \omega = \gamma/2$ のところで最大値の半分になるので γ を半値幅という。また、点電荷が放射する電磁波の角振動数は ω_0 のまわりに広がり、この広がりを自然線幅と呼んでいる。

4.9.2 電磁波の散乱

(1) 点電荷による電磁波の散乱

- K氏：外部から電磁波が入射し、点粒子を同じ振動数で揺すって同じ振動数の2次的な電磁波がでる現象を電磁波の散乱という。外力 F の作用の元にある点電荷に、電磁波が入射したときの電荷の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, t) + e\mathbf{E}_{in}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (4.69)$$

¹³ いわゆる Lorentz 型の分布。

で与えられる。ただし，入射電磁波と速度の遅い荷電粒子との相互作用では Lorentz 力の磁場の項は v/c のオーダーなので無視した。散乱問題では入射波を複素数で表現しておく
と便利¹⁴なので，少しそれについて触れておこう。入射波を $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ と書くと

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{-i\omega t} &= (\mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I)(\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (\mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t) + i(\mathbf{E}_I \cos \omega t - \mathbf{E}_R \sin \omega t)\end{aligned}\quad (4.70)$$

\mathbf{E}_R と \mathbf{E}_I はそれぞれ \mathbf{E} の実部と虚部である。この実部の 2 乗は

$$(\mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t)^2 = \mathbf{E}_R^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_I^2 \sin^2 \omega t + 2(\mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_I) \sin \omega t \cos \omega t \quad (4.71)$$

で，右辺第 3 項は実部と虚部の干渉を示す。これを 1 周期にわたっての時間平均をとると

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \begin{Bmatrix} \cos^2 \omega t \\ \sin^2 \omega t \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \\ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin \omega t \cos \omega t &= 0\end{aligned}$$

なので，(4.71) の干渉項は消える。したがって，時間平均をバーで表すと，

$$\overline{(\mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t)^2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_R^2 + \mathbf{E}_I^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}e^{-i\omega t}) \cdot (\mathbf{E}e^{-i\omega t})^* \quad (4.72)$$

となる。右辺にはバーをつけなくてもよいことに注意されたい。つまり，電磁場に対して複素表示 (4.70) をとり，そのまま計算を進めると，結果として，実数表示の計算の時間的な平均の 2 倍が得られる。このことを利用すれば，散乱の計算のように，主に，電磁場の量の 2 乗の時間的な平均を知りたいときには，複素表現を用いる方が手間がかからない。例えば，入射波が (4.70) の実部で与えられているとすると，その Poynting ベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{in} &= \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (\because \mathbf{B} = (1/c)\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 (\mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t) \cdot (\mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} c \mathbf{n}_0 \{ \mathbf{E}_R^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_I^2 \sin^2 \omega t + 2(\mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_I) \sin \omega t \cos \omega t \}\end{aligned}\quad (4.73)$$

ただし， \mathbf{n}_0 は入射波の入射方向の単位ベクトルである。したがってその時間平均は

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}_{in}} &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{E}_R^2 + \mathbf{E}_I^2) = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 \frac{1}{2}(\mathbf{E}e^{-i\omega t}) \cdot (\mathbf{E}e^{-i\omega t})^* \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^* = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{n}_0 \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2\end{aligned}\quad (4.74)$$

となる。

- キャサリン：なるほど，電磁場の量の 2 乗の時間的な平均をとる場合，複素表示というのは便利ね。ところで，点電荷による電磁波の散乱現象というのは，入射電磁波により点電荷に Lorentz 力が働き，その相互作用で生じる加速度で電磁波を放出するというイメージで捉えればいいのね。

¹⁴ 意味があるのは実部のみに注意。

(2) 微分断面積

- K氏：そうだね。さて，荷電粒子が入射波によって揺すられて発射する電磁波の単位時間に放射するエネルギー¹⁵は，

$$R(t) = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int d\Omega [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 \quad (4.75)$$

単位立体角あたりでは

$$\frac{dR}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 \quad (4.76)$$

したがって，時間平均は

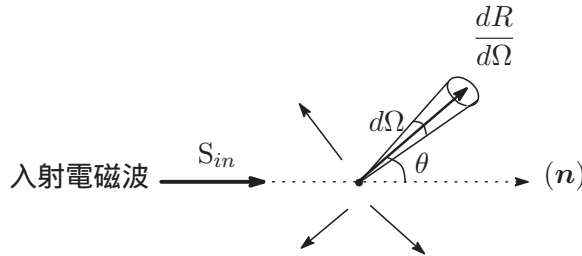
$$\overline{\frac{dR}{d\Omega}} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{1}{2} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 \quad (4.77)$$

入射波のエネルギー流れの密度は S_{in} で，ある方向への単位立体角あたりのエネルギーの流れ $dR/d\Omega$ の比を取り，その時間平均をとったものを $d\sigma/d\Omega$ とすると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{dR/d\Omega}}{|\overline{S_{in}}|} \quad (4.78)$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} |\mathbf{E}|^2 |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t))|^2 \quad (4.79)$$

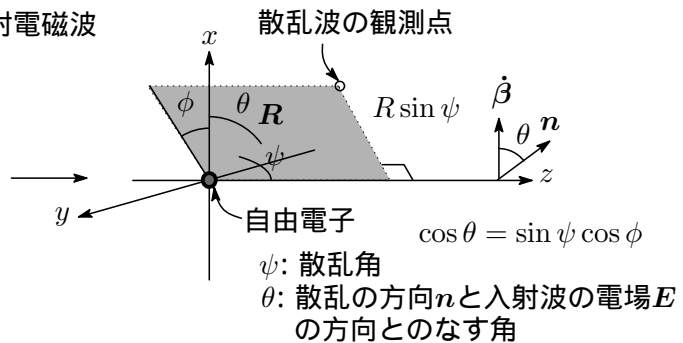
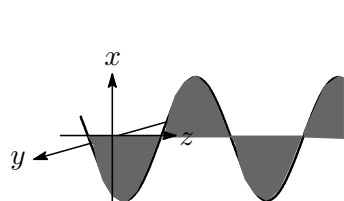
これは¹⁶，ある方向への単位立体角あたりの散乱波の相対的な強度を示す指標となる。 $d\sigma/d\Omega$ は面積の次元を持つので，散乱の微分断面積と呼んでいる。



(3) Thomson 散乱

- K氏：自由電子による電磁波の散乱を考えよう。単色平面波の電磁波が質量 m の自由電子に入射すると電子は加速されて電磁波を放射する。簡単のため入射電磁波は z 軸に沿って入射する平面波とし，電場の振動方向は x 方向とする。また，放射の反作用は考えない。

電場が x 軸方向に偏極した入射電磁波



¹⁵ 4-(3) の (4.54) 参照。

¹⁶ 2 乗の時間平均に掛かる 1/2 の因子は分子分母で消しあう。

電子の位置での電場を $\mathbf{E} = E_0 e^{-i\omega t}$ ($E_0 = (E_0, 0, 0)$) とすると, 質量 m , 電荷 e の電子の運動方程式は

$$m\ddot{\xi}_x(t) = e\mathbf{E}_x = eE_0 e^{-i\omega t} \quad (4.80)$$

となるので, 電子は x 軸方向に

$$\ddot{\xi}_x(t) = \frac{e}{m}\mathbf{E}_x = \frac{e}{m}E_0 e^{-i\omega t} \quad (4.81)$$

の加速度を受ける¹⁷。

$$\xi_x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t} \quad (4.82)$$

で, 電子は入射電磁波と同じ振動数で振動する。加速する電子から放射される単位時間当たり, 単位立体角あたりの平均エネルギーは (4.76) より

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{R}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} |\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2| \\ &= \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} |E_0|^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} |E_0|^2 (1 - \sin^2 \psi \cos^2 \phi) \end{aligned} \quad (4.83)$$

となる。ただし, $\cos \theta = \sin \psi \cos \phi$ となる関係を使った。

- コニー: 散乱された電磁波は入射波と同じ振動数, つまり単色波ということね。
- K氏: そうだね。ところで, (4.83) で放射の角度分布が $\cos \phi$ に依存しているのは, 入射波が直線偏光だからで, 入射波の偏りが全くない自然光ときには, E_0 のあらゆる方向についての平均をとればよい。それは ϕ のあらゆる方向についての平均をとることと結果的に同じだ。 $\cos^2 \phi$ の平均は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi = \frac{1}{2}$$

なので, 入射波が自然光の場合, (4.83) は

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{R}}{d\Omega} &= \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} |E_0|^2 (1 - \sin^2 \psi \cos^2 \phi) \\ &= \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2} |E_0|^2 \frac{1 + \cos^2 \psi}{2} \end{aligned} \quad (4.84)$$

となる。したがって, 微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\overline{R}}{d\Omega} / |\mathbf{S}_{in}| \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 \psi}{2} = \frac{r_e^2 (1 + \cos^2 \psi)}{2} \end{aligned} \quad (4.85)$$

で与えられる。 r_e は電子の古典半径¹⁸。(4.85) を Thomson 散乱の微分断面積の公式という。全断面積 σ_T は (4.85) を全立体角にわたって積分して¹⁹

$$\sigma_T = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \int_0^\pi d\psi (1 + \cos^2 \psi) 2\pi \sin \psi = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (4.86)$$

¹⁷ 自由電子が入射波の作用で得る速度は光速に比べて十分小さく, 磁場による力は無視できる。双極子能率は

¹⁸ $r_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m c^2 = 2.82 \times 10^{-13} [\text{cm}]$

¹⁹ $d\Omega = 2\pi \sin \psi d\psi, 0 \leq \psi \leq \pi$

が得られる。これを Thomson 散乱の全断面積という²⁰。自由電子による散乱の断面積は入射波の振動数には無関係の常数となる。 $\sigma_T \sim \pi r_e^2$ と近似すると、これは古典的電子の幾何学的断面積だ。したがって、全断面積は単位面積を通して入射した電磁波が電子的に衝突する割合を表わしている。

- コニー：入射波が直線偏光と自然光の場合を調べたわけだけど、入射波が楕円偏光の場合はどうなるのかしら。
- K氏：うん、楕円偏光の場合、入射波の電場は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A \cos \omega t + \mathbf{E}_B \sin \omega t \quad (4.87)$$

で表わされる。 \mathbf{E}_A と \mathbf{E}_B は互いに直交しているベクトルだね。電子の運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) = e\mathbf{E}$$

でこれから

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t) = c\dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \frac{e}{m}(\mathbf{E}_A \cos \omega t + \mathbf{E}_B \sin \omega t) \quad (4.88)$$

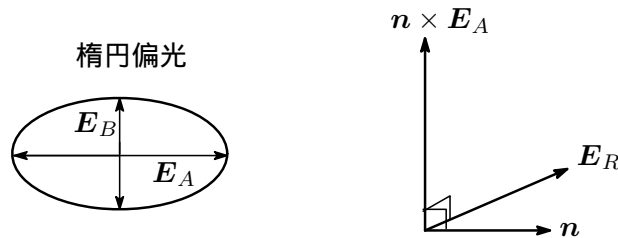
(4.76)の右辺は電場の周期 $2\pi/\omega$ で時間平均したものだから

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dR}{d\Omega}} &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \overline{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 m^2} \overline{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A) \cos \omega t + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_B) \sin \omega t|^2} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 m^2} \frac{1}{2} (|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A)|^2 + |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_B)|^2) \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 m^2} \frac{1}{2} \{|\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_B|^2\} \end{aligned} \quad (4.89)$$

となる。ここで

$$|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A)| = |\mathbf{n}| |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A| \sin \varphi = |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A| \quad (\because \varphi = \pi/2)$$

を使った。



一方、入射波の時間平均あたりのエネルギーは

$$\overline{\mathbf{S}}_{in} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{1}{2} (|\mathbf{E}_A|^2 + |\mathbf{E}_B|^2) \quad (4.90)$$

²⁰ $\sigma_T = 0.665 \times 10^{-24} \text{cm}^2$

となるので

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\overline{dR}}{d\Omega} / |\overline{\mathbf{S}}_{in}| \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{E}_A|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_B|^2}{|\mathbf{E}_A|^2 + |\mathbf{E}_B|^2} \end{aligned} \quad (4.91)$$

という公式が得られる。

Thomson 散乱の公式は入射電磁波の波長が長い場合に適用できるけど、X線や γ 線などの短波長では散乱波は入射波と異なった振動数をもつ Compton 散乱が起きてしまうので、この場合は Thomson の散乱公式は使えず、Compton 散乱に対する Klein-Nishina の公式を使う必要がある。Klein-Nishina の公式も長波長の極限を取ると Thomson の公式に一致するんだ。

- エミリー：有名な Klein-Nishina の公式ね。仁科博士は Dirac 方程式を使ってこの公式を導出するまで、2人の計算結果がなかなか合わずに大変苦労したというお話を何かで読んだことがあるわ。
- ユナ：ところで、今の議論で放射の反作用を考慮すればどうなるのかしら。
- K氏：そうだね、その場合の方程式は(4.51)より

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{\omega_D} \frac{d^3}{dt^3} \right) \xi_x(t) = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \quad \frac{1}{\omega_D} \equiv \frac{e^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3} \quad (4.92)$$

と書ける。この解を $\xi_x(t) = \xi_0(t)e^{-i\omega t}$ とおいてやると $\dot{\xi}_x(t) = -i\omega \xi_0 e^{-i\omega t}$, $\ddot{\xi}_x(t) = -\omega^2 \xi_0 e^{-i\omega t}$, $\dddot{\xi}_x(t) = i\omega^3 \xi_0 e^{-i\omega t}$ なので、これを上の方程式に入れて整理すると

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_x(t) = \frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t} \frac{1}{1 + i\tau_0\omega}, & \tau_0 = 1/\omega_D \\ \xi_x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{1 + i\tau_0\omega} \end{cases} \quad (4.93)$$

が得られる²¹。あとは上でやったと同様に計算すれば微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{r_e^2 (1 + \cos^2 \psi)}{1 + \tau_0^2 \omega^2} \quad (4.94)$$

と得られる。電子が放出する電磁波が可視光であれば、 $\omega \sim 10^{14} \sim 10^{15} \text{ Hz}$ 程度²²で、 $\omega\tau_0 \simeq 10^{-9}$ となり、反作用の効果は無視できるというわけだ。

(4) Rayleigh 散乱

- K氏：次に電子が原子核の中心に引っ張られる力で束縛されている場合を考えよう。具体的には速度に比例した減衰力 $\gamma \dot{\xi}(t)$ 、これは放射の反作用による減衰力とは別物だけど、それを受けながら角振動数 ω_0 で振動しているケースを取り上げよう²³。入射波が電子に当たったときの運動方程式は、電場の複素表現を使って

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \xi(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E} e^{-i\omega t} \quad (4.95)$$

²¹ 上の式で意味のあるのは実部であることに注意。

²² $\lambda = 0.38 \sim 0.78 \mu\text{m}$, $\omega = (2\pi/\lambda)c$

²³ 反作用力が十分小さい場合、これに相当することを以前やった。

と表わせる。 γ は比例常数。この式の解を $\xi(t) = \xi_0 e^{-i\omega t}$ とおいて (4.95) に入れて整理すれば

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= -i\omega \xi_0 e^{-i\omega t}, \quad \ddot{\xi}(t) = -\omega^2 \xi_0 e^{-i\omega t} \\ (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)\xi_0 &= \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad \xi_0 = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \\ \therefore \xi(t) &= \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (4.96)$$

が得られる。 $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ の実部は

$$\text{Re}(\mathbf{E}e^{-i\omega t}) = \mathbf{E}_R \cos \omega t + \mathbf{E}_I \sin \omega t$$

であることに留意。微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{E}_R|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_I|^2}{|\mathbf{E}_R|^2 + |\mathbf{E}_I|^2} \quad (4.97)$$

となる。これは Rayleigh 散乱の微分断面積の公式と呼ばれる。入射波の角振動数が ω_0 に等しいとき、断面積は最大になる（共鳴散乱）。この式で $\omega_0 = 0$ とおくと、自由電子による微分断面積が得られ、さらに $\gamma = 0$ とおけば Thomson 散乱の微分断面積になるね。

Rayleigh 散乱の特長を見るために $\gamma = 0$ の場合を考えると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

で、 $\omega_0 \gg \omega$ のときには

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \quad (4.98)$$

となり、散乱断面積は入射波の波長の 4 乗に逆比例することがわかる。

- キャサリン：太陽光が大気で散乱されて、空が青くみえるのはレイリー散乱によるといわれるけど、短波長の光ほど散乱断面積は大きくなる、つまり青い光が観測者の方に散乱されることによりということね。
- ユナ：ところで輻射の反作用による減衰項 ($\ddot{\xi}(t)$) を考慮した場合はどうなるのかしら。方程式は (4.51) より

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{\omega_D} \frac{d^3}{dt^3} + \omega_0^2 \right) \xi(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E} e^{-i\omega t} \quad (4.99)$$

となるわね。この式の解を $\xi(t) = \xi_0 e^{-i\omega t}$ とおいて (4.99) に入れて整理すれば

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= -i\omega \xi_0 e^{-i\omega t}, \quad \ddot{\xi}(t) = -\omega^2 \xi_0 e^{-i\omega t}, \quad \dddot{\xi}(t) = i\omega^3 \xi_0 e^{-i\omega t} \\ (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^3/\omega_D)\xi_0 &= \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad \xi_0 = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_D)} \\ \therefore \xi(t) &= \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\tau_0\omega^3} e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (4.100)$$

が得られる。ここまでくると上と同様の計算により、Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau_0^2 \omega^6} \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{E}_R|^2 + |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_I|^2}{|\mathbf{E}_R|^2 + |\mathbf{E}_I|^2} \quad (4.101)$$

$$= r_e^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \psi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau_0^2 \omega^6} \quad (4.102)$$

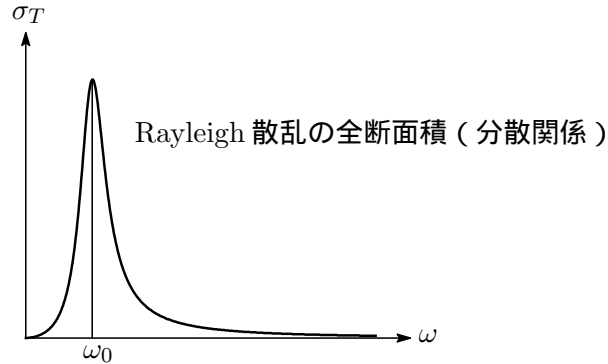
となるわ。したがって、全断面積は

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau_0^2 \omega^6} \int_0^\pi d\psi \sin^3 \psi \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \tau_0^2 \omega^6}\end{aligned}\quad (4.103)$$

- K氏：そうだね。 $\omega_0 \rightarrow 0$ および $\tau_0 \omega \ll 1$ とすると (4.103) より自由電子による Thomson 散乱の全断面積を得る。また、 $\omega \doteq \omega_0$ では全断面積は非常に大きくなり、共鳴散乱の場合となる。このときは、 $\omega \sim \omega_0$ とおけるので $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega_0$ となることを考慮すると

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{\{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)\}^2 + \tau_0^2 \omega^6} \simeq \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{4\omega^2(\omega_0 - \omega)^2 + \tau_0^2 \omega^6} \\ &= \frac{2\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \tau_0^2 \omega^4/4} \\ &= \frac{2\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \quad (\text{ただし } \gamma = \tau_0 \omega^2)\end{aligned}\quad (4.104)$$

となる。これは Rayleigh 散乱の分散式と呼ばれるものだ。



放射の反作用の効果は、 ω が ω_0 のごく近傍を除いて $\tau_0 \omega \ll 1$ であれば無視できる。 $\tau_0 \sim 10^{-24}$ 秒のオーダーなので、入射電磁波の周期 $T (= 2\pi/\omega)$ が十分長ければ無視できるということだね。先ほども言ったけど、電子が放出する電磁波が可視光であれば、 $\omega \sim 10^{14\sim 15}$ Hz 程度²⁴で、 $\omega \tau_0 \simeq 10^{-9}$ となり反作用の効果は無視できる。一方、電子が X 線やガンマ線を放射するような場合には、放射の反作用の効果は重要になってくる。しかし、そのようなケースは古典論で記述することが困難で、量子論での記述が必要になってくるんだ。

4.9.3 物質の中の電磁場

(1) 電気感受率

- K氏：物質に比較的弱い電磁場がかかっており、物質中の荷電粒子の運動方程式は (4.95) で記述できるとしよう。荷電粒子の振る舞いを、自由な荷電粒子、電気双極子能率密度 $P(x)$ 、磁気双極子能率密度 $M(x)$ で代表させようとするわけだが、物質中の電荷の変位による分極電荷密度を $\rho_{\text{分極}}$ 、それに伴う分極電流密度を $J_{\text{分極}}$ 、また磁化された物質中の電流を

²⁴ $\lambda = 0.38 \sim 0.78 \mu\text{m}$, $\omega = (2\pi/\lambda)c$

$J_{\text{磁化}}$ とすると、全電荷密度と全電流密度は

$$\begin{cases} \rho(x) = \rho_F + \rho_{\text{分極}} \\ \mathbf{J}(x) = \mathbf{J}_F + \mathbf{J}_{\text{分極}} + \mathbf{J}_{\text{磁化}} \end{cases} \quad (4.105)$$

と表わされる。 ρ_F, \mathbf{J}_F は分極や磁化による以外のもの、つまり自由電荷によるものだ。物質中に一様でない分極がある場合には、 $\rho_{\text{分極}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}(x)$ の電荷密度が現れ、分極電流密度は $\mathbf{J}_{\text{分極}} = \dot{\mathbf{P}}(x)$ 、また磁化に伴う磁化電流密度は $\mathbf{J}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}(x)$ と表わされる²⁵ ことに注意すると (4.105) は

$$\rho(x) = \rho_F(x) - \nabla \cdot \mathbf{P}(x) \quad (4.106)$$

$$\mathbf{J}(x) = \mathbf{J}_F(x) + \dot{\mathbf{P}}(x) + \nabla \times \mathbf{M}(x) \quad (4.107)$$

と書ける。 $\rho(x), \mathbf{J}(x)$ は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \left(\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_F \right) - \left(\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{P}}(x) - \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) \right) = 0$$

で連続の方程式を満たす。(4.106),(4.108) を Maxwell の方程式に代入して整理すると

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E}(x) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P}(x) \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_F(x) \quad (4.108)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.109)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}(x) - \mu_0 \mathbf{M}(x)) = \mu_0 \left\{ \mathbf{J}_F(x) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E}(x) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P}(x) \right) \right\} \quad (4.110)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.111)$$

と表わされる。ここで

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}(x) + \mathbf{P}(x) \equiv \mathbf{D}(x) \quad (4.112)$$

$$\mathbf{B}(x) - \mu_0 \mathbf{M}(x) \equiv \mu_0 \mathbf{H}(x) \quad (4.113)$$

を定義し、物質中の電磁場を取り扱う出発点となる Maxwell 方程式を次のように書くことにする。

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(x) = \rho_F(x) \quad (4.114)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.115)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(x) = \mathbf{J}_F(x) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(x) \quad (4.116)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.117)$$

もし、電磁場が弱くてしかも物質が均一なときには、(4.112),(4.113) の量はそれぞれ $\mathbf{E}(x)$ と $\mathbf{B}(x)$ に比例し、

$$\mathbf{D}(x) = \varepsilon \mathbf{E}(x) \quad (4.118)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mu \mathbf{H}(x) \quad (4.119)$$

と書くことができる²⁶。 ε, μ は物質に固有の定数で、それぞれ物質のもつ誘電率、透磁率という。ところで、物質中の電磁場を求めるには、(4.114) ~ (4.117) の Maxwell 方程式だけ

²⁵ 詳しいことはファインマン物理学 III, IV 等を参照されたい。

²⁶ \mathbf{P} が \mathbf{E} に比例する場合 (線形応答)、 $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$ と書き、定数 χ を誘電体の分極率と呼んでいる。

では求めることができないので、 D と E 、 B と H の関係を与える (4.118), (4.119) の関係式と連立させて解くことになるわけだね。

線形関係式 (4.118), (4.119) は、物質が均一でなかったり、入射電磁波の角振動数に依存したりして、一般的にはもっと複雑で、場合によっては非線形関係になることもあるけど、物質中の電荷が方程式 (4.95) を満たしているとすれば、線形関係は近似的に成立することを見ておこう。方程式の解は (4.96) で与えられたので、物質中の i 番目の荷電粒子の電気双極子能率は

$$\mathbf{p}_i(t) \equiv e\xi_i(t) = \frac{e^2}{m\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} \mathbf{E}e^{-i\omega t} \quad (4.120)$$

巨視的には無限小だが、微視的には大きい体積 v の中にこのような電気双極子能率を持つ粒子が n_i 個あるとすると、点 x にある微視的な体積 v の全分極密度は

$$\mathbf{P}(x) = \sum_i \frac{n_i}{v} \mathbf{p}_i(t) \quad (4.121)$$

となり、右辺は電場に比例するので、結局 (4.118) の線形関係が成立することがわかる。

上式の右辺は各振動数 ω の電場に比例しているので

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (4.122)$$

と書き、 $\chi(\omega)$ を電気感受率 (electric susceptibility) といい²⁷、分極の強さを表わす。電気感受率は

$$\chi(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \sum_i \frac{n_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \sum_i \frac{n_i(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2} \quad (4.123)$$

$$= \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \sum_i \left(\frac{n_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2} + i \frac{n_i\omega\gamma_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2} \right) \quad (4.124)$$

という複素数で表わされるが、両辺の実部を取り出して解釈する。通常は、実部と虚部とを分けて

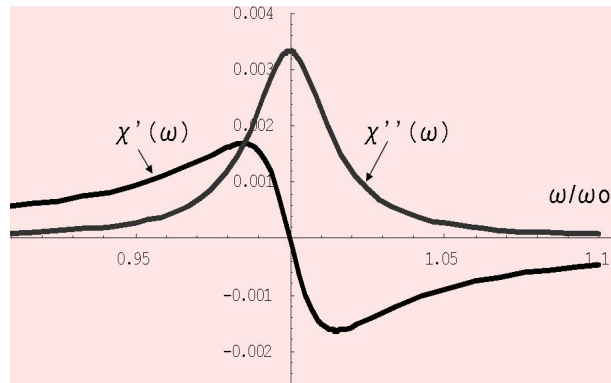
$$\begin{cases} \chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \\ \chi'(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \sum_i \frac{n_i(\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2} \\ \chi''(\omega) = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \sum_i \frac{n_i\omega\gamma_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_i^2} \end{cases} \quad (4.125)$$

と書かれる。 ω_i が特別の ω_i 、たとえば ω_0 に近いときに、これらは大きな値をとる。減衰項は ω_i に比べて小さいので

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \frac{n_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma_0^2} = \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \frac{n_0(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)\}^2 + \omega^2\gamma_0^2} \\ &\approx \frac{e^2}{m\varepsilon_0 v} \frac{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}{4\omega_0^2 \left\{ (\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2 \right\}} = \frac{e^2}{2m\varepsilon_0 v} \frac{n_0(1 - \omega/\omega_0)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2} \\ \chi''(\omega) &\approx \frac{e^2}{4m\varepsilon_0 v} \frac{n_0\gamma_0/\omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2} \end{aligned} \quad (4.126)$$

²⁷ 複素電気感受率とか分極率ともいわれる。いずれにしても誘電分極の起こりやすさを示す物性値

と近似される。実部 χ' の方は、電磁波の物質中での屈折率に関係しており、虚部 χ'' の方は、物質によって電磁波がどれだけ吸収されるかを示す²⁸。ひとつの i について図示すると下図のようになるね。



- コニー：物質の屈折率や吸収係数は複素電気感受率から求められるということね。
- K氏：そうなんだ。ここではこれ以上踏み込まないので、興味があれば適当な参考書を紐解いてみてください。

(2) 金属の導電性

- K氏：金属の内部ではいわゆる Ohm の法則が成り立っていることはご存知の通りだ。Ohm の法則は、物質中で自由に流れうる電荷による電流が電場 $E(x)$ に比例するというもので

$$\mathbf{J}_F = \sigma \mathbf{E}(x) \quad (4.127)$$

と表わされる。 σ は電気伝導率という物質に固有な量で、電気感受率と同様に電場の角振動数に関係したり、場が強くなると (4.127) の線形性からずれてくることもあるけど、以下では、場が弱く、線形関係が成り立つ範囲での議論を進める。

金属の内部での Maxwell 方程式は

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}(x) = \rho_F(x) \quad (4.128)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(x) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.129)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(x) = \mu \sigma \mathbf{E}(x) + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x) \quad (4.130)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x) = 0 \quad (4.131)$$

電流・電荷の保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_F(x) + \nabla \cdot \mathbf{J}_F(x) = \frac{\partial}{\partial t} \rho_F(x) + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}(x) = 0 \quad (4.132)$$

で、これと (4.128) より、金属内の電荷密度に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_F(x) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_F(x) &= 0 \\ \therefore \rho_F(x) &= \rho_F(x) \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) \end{aligned} \quad (4.133)$$

²⁸ $n = (1 + \chi'/2\varepsilon_0)$, α (吸収係数) $\approx \omega \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \chi''$

が得られる。ここで x は $x = (x, t)$ と位置と時間の関数であることに注意してください。電場が印加されたとき、金属内の自由電子による電荷は時間とともに指数関数的に減少する。たとえば銅では常温で $\sigma/\varepsilon = 6.5 \times 10^{18} \text{sec}^{-1}$ で、異常に短い時間の間に、電荷は金属内の各点で初期値の e^{-1} に減る、つまり、ほとんど瞬間的に電荷は消えてしまう。他の金属でもだいたい同じオーダーなので、金属中の電磁場を取り扱うときには、(4.128) の右辺をはじめからゼロとおいてかまわない。そうすると、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ となることを使って Maxwell 方程式を整理すると

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{E}(x) + \mu\sigma \dot{\mathbf{E}}(x) + \varepsilon\mu \ddot{\mathbf{E}}(x) = 0 \\ -\nabla^2 \mathbf{B}(x) + \mu\sigma \dot{\mathbf{B}}(x) + \varepsilon\mu \ddot{\mathbf{B}}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.134)$$

が得られる。これが金属の中の電磁場を記述する Maxwell 方程式となる。ちなみに、自由空間での Maxwell の方程式は

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}(x) - \varepsilon_0\mu_0 \ddot{\mathbf{E}}(x) = \mu_0 \dot{\mathbf{J}}(x) \\ \nabla^2 \mathbf{B}(x) - \varepsilon_0\mu_0 \ddot{\mathbf{B}}(x) = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}(x) \end{cases} \quad (4.135)$$

(4.134) は電信方程式と呼ばれる。特に $\sigma = 0$ の場合は

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}(x) - \varepsilon\mu \ddot{\mathbf{E}}(x) = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B}(x) - \varepsilon\mu \ddot{\mathbf{B}}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.136)$$

で、同次の d'Alembert 方程式となる。詳細は省略するが、これを解くと静的な電磁場と平面波 (横波) を重ね合わせた解が得られる。したがって、導体や半導体以外の $\sigma = 0$ の物質では、電場がかかっても電流は起きず、 ρ_F は動かない。まわりに電場を生じるだけであるが、単なる Coulomb 場ではないことに注意しよう。

- アリス：先ほどの Ohm の法則だけど、物質中の電子が速度に比例した抵抗力 $k\dot{\xi}$ を受けるとして導出されるわ。単位体積に n 個の質量 m 、電荷 e の荷電粒子があり、速度 $\dot{\xi}$ で流れているとすると、運動方程式は

$$nm\ddot{\xi} = ne\mathbf{E} - nk\dot{\xi}$$

これから

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + \frac{e}{k}\mathbf{E}$$

が得られて、 $t \rightarrow \infty$ とすると、終端速度は $\dot{\xi}_\infty = (e/k)\mathbf{E}$ となる。電流密度は $\mathbf{J} = ne\dot{\xi}_\infty$ なので

$$\mathbf{J} = ne\dot{\xi}_\infty = \frac{ne^2}{k}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}, \quad \sigma = \frac{ne^2}{k} \quad (4.137)$$

となるわね。荷電粒子が抵抗を受けない場合は

$$\ddot{\xi} = (e/m)\mathbf{E} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J} = ne\ddot{\xi} = (ne^2/m)\mathbf{E} \quad (4.138)$$

となるわ。

- K 氏：そうだね。ところでアリスが導いた (4.138) と Maxwell の方程式を組み合わせると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E} &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{J} = \frac{ne^2}{m}\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{ne^2}{m}\dot{\mathbf{B}} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{J} + \frac{ne^2}{m}\mathbf{B}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.139)$$

が得られる。

$$\nabla \times \mathbf{J} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B} = 0, \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}} \quad (4.140)$$

を London の方程式という。この式は超伝導の特徴の1つであるマイスナー効果²⁹を理論的に説明する方程式として知られているね。Maxwell の方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = \square^2 \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

に London の方程式 (4.140) を入れると

$$\square^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} \quad (4.141)$$

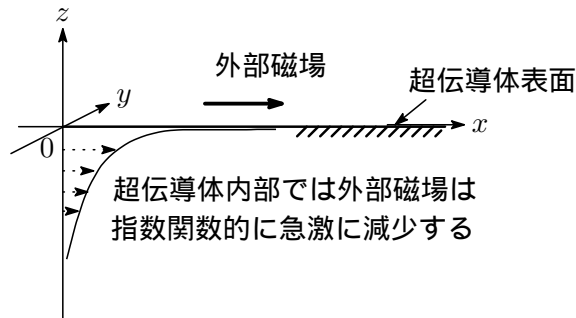
が得られる。 $z = 0$ に超伝導体の表面があり、 z 軸方向は表面から外部に向かっていよう。外部磁場が表面に平行 ($B // x$) に一様に印加されたとき、超伝導体の内部では磁場は外場と同じ方向に作られる。磁場は x, y 方向には一様としているので $\frac{dB_x}{dx} = \frac{dB_y}{dy} = 0$ が成り立ち、 B_x に対する方程式は、(4.141) より

$$\frac{d^2}{dz^2} B_x = \frac{1}{\lambda_L^2} B_x \quad (4.142)$$

となる。境界条件を $B_x(z=0) = B_0$, $B_x(z \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ としてこれを解いて

$$B_x(z) = B_0 e^{-z/\lambda_L} \quad (z > 0) \quad (4.143)$$

を得る。これから、磁場は超伝導体内部で指数関数的に減少することが分かるね。 λ_L を London の侵入距離³⁰とっている。 λ_L は 10 ~ 100 nm のオーダーで、 λ_L の数倍深い場所では磁場は完全にゼロになり、これを Meissner-Ochsenfeld 効果と呼んでいる。



アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ より

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_x}{dz} \mathbf{j} \quad (\mathbf{j}: y \text{ 軸方向の単位ベクトル}) \\ \therefore J_y(z) &= -\frac{B_0}{\mu_0 \lambda_L} e^{-z/\lambda_L} \end{aligned} \quad (4.144)$$

を得る。これから、磁場が x 方向を向いているとき、電流は y 方向に侵入距離の幅の表面付近のみしか流れないことが分かる。

²⁹ 超伝導体内部への外部磁場の侵入を完全に排除して内部磁場をゼロにする。

³⁰ 数 10 nm のオーダー

- エミリー：London の方程式を上の場合に当てはめて書くと

$$\nabla \times \mathbf{J} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \mathbf{B} \longrightarrow -\frac{\partial J_y}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} B_x = 0 \quad (4.145)$$

となるので，超伝導体の内部磁場がゼロになるということは，流れる電流が作る磁場で打ち消されるというイメージね。

- K氏：そうだね。ここではこれ以上深入りしないけど，興味があれば超伝導の適当な参考書で勉強してください。とりあえず第4章はこれにて終了することにします。お疲れ様でした。

*GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !*

by *KENZO*