＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Lienard -Wiechert Potential

03.09.21　b y KENZOU

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

http://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/

§1.　*Lienard-Wiechert Potential*　（リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルと読む）

電荷 e を持った点電荷の運動の軌跡が $\boldsymbol{x}(t)$ で与えられているとき、電荷密度 r 、電流密度 $\boldsymbol{J}$ は

$$r(\boldsymbol{r},t)=ed(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=e\boldsymbol{v}(t)d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t)) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{3}$$

となる。時間に依存するポテンシャルの解は

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4pe_0}\int\frac{r(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{m_0}{4p}\int\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{5}$$

で表わされる。

＜ポテンシャルの物理的意味合いについて＞

原点に荷電粒子 e があるとする。その速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする。観測 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(\equiv|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ では、もし荷電粒子が止まっていれば

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4pe_0}\frac{e}{r} \tag{6}$$

となる。荷電粒子が動いているとすると、その影響が伝わるのに r/c の時間がかかる。その間に電荷と観測点の距離はだいたい

$$r-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c} \tag{7}$$

となるであろう。従ってポテンシャルは

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4pe_0}\frac{1}{r}\frac{e}{1-\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{rc}} \tag{8}$$

となることが期待される。同様に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{m_0}{4p}\frac{1}{r}\frac{e\boldsymbol{v}}{1-\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{rc}} \tag{9}$$

となることが期待される。これが概略 Lienard-Wiechert Potential の中身ということです。

§2. *Lienard-Wiechert Potential* を求める

Lienard-Wichert ポテンシャルを具体的に求めてみる。

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4pe_0}\int\frac{r\left(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \tag{4}$$

空間座標の積分を先に実行すると

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int\frac{r(\boldsymbol{r}',t')d\left(t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \\ &=\frac{e}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int\frac{ed\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{x}(t')\right)d\left(t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d^3\boldsymbol{r}' \\ &=\frac{e}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\frac{d\left(t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|} \end{aligned} \tag{10}$$

ここでδ関数の性質

$$d\left(f(t')\right)=\frac{1}{|f'\left(t_0\right)|}d\left(t'-t_0\right) \tag{11}$$

を利用する。ただし t_0 とは

$$f(x)=0 \tag{12}$$

の根である。いまの場合

$$f(t')=t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c \tag{13}$$

$$\frac{df}{dt}=1-\frac{\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t')}{c}=1-\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{b}(t') \tag{14}$$

ただし、

$$\boldsymbol{n}(t')\equiv\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|},\quad \boldsymbol{b}(t')\equiv\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{x}}(t') \tag{15}$$

とした。

$$b_R(t')\equiv\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{b}(t') \tag{16}$$

は荷電粒子が時刻 t' において $\boldsymbol{r}$ 方向に向かって進んでくる速さを光速度 c で割ったのもであり、1より

はるかに小さい。(13)の $f(t')=0$ の根を t_0 とすると、

$$dt'd\left(t-t'-\frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|\right)=\frac{1}{1-b_R(t_0)}d(t'-t_0)dt' \tag{17}$$

だから、結局

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{r},t)&=\frac{e}{4pe_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\frac{d(t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t')|}\\&=\frac{e}{4pe_0}\frac{1}{1-b_R(t_0)}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)|}\end{aligned} \tag{18}$$

これはまさに ⑻ 式の厳密な表記である。

電場、磁場の計算を見通しよくするために(18)を次ぎの形に整理しておく。

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4pe_0}\frac{1}{s(t_0)} \tag{19}$$

ここで

$$s(t_0)=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)|(1-b_R(t_0))=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)|-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0))\cdot\boldsymbol{b}(t_0) \tag{20}$$

全く同様にベクトルポテンシャルを計算(上の計算で $e\rightarrow e\dot{\boldsymbol{x}}$ とおきかえればよい)すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{em_0}{4p}\frac{1}{1-b_R(t_0)}\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)|}\\&=\frac{em_0}{4p}\frac{\boldsymbol{v}(t_0)}{s(t_0)}\end{aligned} \tag{21}$$

このポテンシャルをリエナール・ヴィーヘルトポテンシャルと呼んでいる。ここで t_0 は

$$t_0=t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)| \tag{22}$$

を満たす。この式は、時刻 t_0 に粒子をでた光が時刻 t に観測点に到達するということを表わしている。

■運動する荷電粒子の作る電場と磁場を計算する

《計算の準備》

t_0 は t と $\boldsymbol{r}$ の関数となるから、微分して電場や磁場の計算をする時には注意が必要である。つまり

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t_0}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_0} \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^* + \frac{\partial t_0}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t_0} \tag{24}$$

【独り言】
この魚信、もとい、このあたりが以下の計算で非常に神経を使わなければならない元凶である。つまり遅延時間が $\boldsymbol{r}$ と t の関数であることからきているのだが、最初は大抵この計算に戸惑い嫌になること請け合いである（笑い）。

(24)の右辺第1項は陽に含まれる x^k に対する偏微分をあらわす。(22)の両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t_0}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right|\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 + \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right|}\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)\frac{\partial t_0}{\partial t}$$
$$= 1 + \boldsymbol{n}(t_0)\cdot\boldsymbol{b}(t_0)\frac{\partial t_0}{\partial t} \tag{25}$$

これから

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1-b_R} \tag{26}$$

次ぎに(22)を x^k で微分すると

$$t_0 = t - \frac{1}{c}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right| \tag{22}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial x^k}t_0 = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^* + \frac{\partial t_0}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t_0}\right\}t_0$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^k}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right| + \frac{\partial t_0}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t_0}\left(t - \frac{1}{c}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right|\right)$$

$$= -\frac{n^k}{c} + \frac{\partial t_0}{\partial x^k}\frac{1}{c}\frac{\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right)\dfrac{\partial \boldsymbol{x}(t_0)}{\partial t_0}}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}(t_0)\right|}$$

$$= -\frac{n^k}{c} + \boldsymbol{n}(t_0)\cdot\boldsymbol{b}(t_0)\frac{\partial t_0}{\partial x^k} \tag{23}$$

これから

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^k} = -\frac{n^k}{c(1-b_R)} \tag{24}$$

ここでn^k はx^k 方向の単位ベクトルである。

《電場の計算》

$$\boldsymbol{E} = -\nabla f - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{25}$$

[1] Ñ*f* の計算

(24)の関係式を使って

$$\nabla f = \frac{e}{4pe_0}\left(\nabla^* \frac{1}{s} - \frac{\boldsymbol{n}}{c(1-b_R)}\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s}\right) \tag{26}$$

$$\nabla^* \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}\nabla^* s = -\frac{1}{s^2}\nabla^*\left(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t_0)| - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t_0))\cdot\boldsymbol{b}(t_0)\right) = -\frac{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{b}}{s^2} \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\right)\frac{\partial s}{\partial t_0} = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t_0)|\left(1 - b_R(t_0)\right)\right\} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}(t_0)|\left(1 - b_R(t_0)\right)\right\} &= -\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|} + \dot{\boldsymbol{x}}\, b_R - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|\dot{\boldsymbol{b}} \\ &= -cb_R + c\boldsymbol{b}^2 - \frac{s}{1-b_R}\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}\end{aligned} \tag{29}$$

(29)を(28)に代入して

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s} = c\left(\frac{b_R - \boldsymbol{b}^2}{s^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{n}}{s(1-b_R)}\right) \tag{30}$$

[2] $\frac{¶A}{¶t}$ の計算

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial t_0}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_0} = \frac{1}{1-b_R}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_0} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_0}=\frac{em_0}{4p}\frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\boldsymbol{v}(t_0)}{s(t_0)}\right)=\frac{em_0}{4p}\left(\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{s}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s}\right) \tag{32}$$

よって

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{em_0 c}{4p}\left(\frac{1}{1-b_R}\right)\left(\frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{s}+\boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s}\right) \tag{33}$$

[3] 電場の計算

以上の結果を (25) 式に代入すると

$$\boldsymbol{E}=-\frac{e}{4pe_0}\left\{\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{n})(1-\boldsymbol{b}^2)}{s^2(1-b_R)}+\frac{1}{cs(1-b_R)^2}\left(((1-b_R)\dot{\boldsymbol{b}})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{n})(\dot{\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{n})\right)\right\} \tag{34}$$

ここで $1-b_R=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}$ という関係とベクトル解析の公式を使うと

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{e}{4pe_0}\left\{\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{n})(1-\boldsymbol{b}^2)}{s^2(1-b_R)}+\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{n})-\dot{\boldsymbol{b}}]}{cs(1-b_R)^2}\right\} \tag{35}$$

となる。

[4]磁場の計算

[公式] $\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla^*\times\boldsymbol{V}+(\nabla t')\times\frac{\partial V}{\partial t'}$ **,** $rot(f\boldsymbol{F})=(\nabla f)\times\boldsymbol{F}+f(rot\boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

(24)を使って

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla^*\times\boldsymbol{A}-\frac{1}{c(1-b_R)}\boldsymbol{n}\times\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_0} \tag{36}$$

$$\nabla^*\boldsymbol{A}=\frac{em_0}{4p}\nabla^*\left(\frac{\boldsymbol{v}(t_0)}{s(t_0)}\right)=-\frac{em_0\boldsymbol{v}}{4p}\times\nabla^*\frac{1}{s}=\frac{em_0c\boldsymbol{b}}{4p}\times\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{b}}{s^2}=-\frac{em_0c}{4p}\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}}{s^2} \tag{37}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t_0}=\frac{em_0 c}{4p}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{s}+\boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s}\right) \tag{33}$$

$$\boldsymbol{B}=-\frac{em_0c}{4p}\boldsymbol{n}\times\left\{\frac{\boldsymbol{b}}{s^2}+\frac{1}{(1-b_R)}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{b}}}{s}+\boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial t_0}\frac{1}{s}\right)\right\}$$

$$
= -\frac{e\mu_0 c}{4\pi}\boldsymbol{n}\times\left\{\frac{\left(1-\boldsymbol{\beta}^2\right)c\boldsymbol{\beta}}{s^2\left(1-\beta_R\right)}+\frac{\boldsymbol{n}\times\left[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{n})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{s\left(1-\beta_R\right)^2}\right\} \tag{38}
$$

となる。

[5] 電磁場の特長

(35) と (38) より、荷電粒子の運動が作る電磁場の特長として以下にまとめると

①$\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入っていない項は$\boldsymbol{x}\left(t_0\right)$からの距離の2乗に 反比例している。

②$\boldsymbol{\beta}$ の時間微分が入った項、つまり加速度に関係した項は$\boldsymbol{x}\left(t_0\right)$からの距離に 反比例している。

従って、遠方ではこの寄与が大きくなる。かつこの項は$\boldsymbol{n}\left(t_0\right)$ と直交している。

③常に

$$
c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}\left(t_0\right)\times\boldsymbol{E} \tag{39}
$$

が成り立っている。

④

$$
\boldsymbol{n}\left(t_0\right)\cdot\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\boldsymbol{\beta}^2}{s^2} \tag{40}
$$

$$
\boldsymbol{n}\left(t_0\right)\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{41}
$$

以上）

===

○エピローグ

普通このあと電磁波の放射へと進むのであるが、ここではこれ以上追求しない（笑い）。
ところで、運動する荷電粒子が作る電磁場はリエナールが1898年に、ヴィーヒェルトが1900年に計算したとのこと【太田浩一著「マクスウエル理論の基礎」】。

------------------------------ おつかれさま～ *Co ffeeB reak* ♪ ∂∇f x y d z c r p q t w D X K G