

電磁気学で現れるベクトル解析の公式 ()

2003・10・13 by KENZOU

【序】

電磁気学を勉強し始めると、微分積分はともかくベクトル解析の式がわっとでてきますね。物理的内容の勉強はおろか、でてくる数式に圧倒されてしばしばオロオロします。これは電磁気を勉強された方は一度ならず経験されたことがあるのではないのでしょうか。

このノートは初心者(中級者も同じか?)が陥りやすいこのオロオロ(笑い)を少しでもミニマイズし、恐れることなく電磁気の勉強を進めていけるようにベクトル解析の公式を取りまとめたものです。

まず最初に一般的なベクトル解析の公式を「ベクトル恒等式」としてまとめ、続いて実践的にこれらがどのように使われているのか、丸善物理学基礎コース・大田浩一著「電磁気学」から該当するものをピックアップし、「電磁気学で現れるベクトル解析の公式」としてまとめてみました。従って、あらかじめこれらの公式に慣れておけば、大抵の電磁気学のテキストは少なくとも数式の展開のところであまり悩まなくて済む筈です。(保証の限りではないが、、、)しかし、実践的に使われるベクトル解析の公式の数があまりにも少ないのに驚かれるだろう。式の変形なんか、よく見ると普通のベクトル解析の公式を敷衍してあるだけ。したがって**何も恐れることはない**のである。がんばってどんどんいきましょう!!

§ 1. 点電荷

半径 a の一様帯電球を考える。この球の半径を限りなく小さくしていく。球の電荷は $e=rV$ で与えられるから $V \rightarrow 0$ の極限で電荷密度 $r = e/V$ は無限大になる。つまり、広がりのない領域に有限の電荷が存在するから電荷密度はその点で無限大になっていなければならない。点電荷というのは、空間の広がりのない1点に電荷が集中していると考え。時刻 t において全電荷 e をもつ点電荷の位置が $r(t)$ であるとき、その電荷密度と電流密度はそれぞれ次ぎのように表現される。

$$(1) \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = e \mathbf{d}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$

$$(2) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = e \dot{\mathbf{r}}(t) \mathbf{d}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$

§ 2 . ベクトル恒等式 (by Ver1.2:HONDA Mitsuru氏 2002.10.23)

A, B, C, D はベクトル、 f, g をスカラーとすると以下のベクトル恒等式が成り立つ。

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$(3) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$(4) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(5) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} = 0$$

$$(6) \quad \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

- (7) $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- (8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- (9) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f \nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$
- (10) $\nabla \times \nabla f = 0$
- (11) $\nabla \times (f \nabla f) = 0$
- (12) $\nabla \times (f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$
- (13) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$
- (14) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$
- (15) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$
- (16) $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$
- (17) $\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ (\mathbf{A}, \mathbf{B} はダイアド)
- (18) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- (19) $\nabla(fg) = \nabla(gf) = f \nabla g + g \nabla f$
- (20) $\mathbf{D}f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$
- (21) $\mathbf{D}\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

§ 3. 電磁気学で現れるベクトル解析の公式

ガウスの発散定理

閉曲面 S で囲まれた領域 V 上のベクトル場 \mathbf{F} およびスカラー場 f に対して、 \mathbf{n} を S の単位法線ベクトルとし S の外側に向かうとすると

$$(1) \quad \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \int_S dS \cdot \mathbf{F}$$

$$(2) \quad \int_V dV \nabla f = \int_S dS \mathbf{n} f = \int_S dS f$$

$$(3) \quad \int_V dV \nabla \times \mathbf{F} = \int_S dS \mathbf{n} \times \mathbf{F} = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F} = - \int_S \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

ストークスの定理

$$(4) \quad \int_S dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \int_S dS \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \int_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$$

$$(5) \quad \int_S dS (\mathbf{n} \times \nabla) f = \int_C d\mathbf{x} f$$

$$(6) \quad \int_S dS (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \int_C d\mathbf{x} \times \mathbf{F}$$

直交曲線座標

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \quad (\text{法線微分演算子})$$

$$(8) \quad \nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} = \nabla - \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \nabla \quad (\text{曲面微分演算子})$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} = 0, \quad \mathbf{n} \times \nabla_{\perp} = \mathbf{n} \times \nabla$$

その他

恒等式

$$(9) \quad \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \nabla E^2 + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{P} = -\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \mathbf{x})$$

$$(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{x} = (P_x \partial_x + P_y \partial_y + P_z \partial_z) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{P}$$

微分演算いろいろ

$$(10) \quad \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} = 0, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{x}}{r^3}$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mathbf{y}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{z}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$(12) \quad \nabla \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 0$$

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\mathbf{d}_{ij}}{r^3} - \frac{4\mathbf{p}}{3} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}(\mathbf{x})$$

$$(14) \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \dots = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \mathbf{q})$$

\mathbf{q} は \mathbf{x} と \mathbf{x}' のなす角。 P_l は Legendre の多項式で $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$$(15) \quad \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\mathbf{x}}{r} - \frac{\mathbf{x}'}{r'} + 3 \frac{\mathbf{x}}{r^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') + \dots \right]$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (|\mathbf{x}| \equiv r > |\mathbf{x}'| \equiv r')$$

(16) 無限遠で消える任意のベクトル \mathbf{J} に対し

$$\int dV \mathbf{J} = -\int dV \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

[おまけ]

ダイアド

任意のベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} から作られる積として内積、外積があるが、これらの積のほかに \mathbf{AB} (不定積) を考え、これをダイアドという (J.W.Gibbs)。

(1) ダイアド $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ とベクトル \mathbf{C} のドット積

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{C} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{AB} \equiv (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ は \mathbf{A} と \mathbf{BC} との積とみなしてもよいので煩わしいスカラー積の括弧をはずしておく。

(2) ダイアド $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ とベクトル \mathbf{C} のクロス積

$$\mathbf{D} \times \mathbf{C} = \mathbf{AB} \times \mathbf{C} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = \mathbf{C} \times \mathbf{AB} \equiv (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\mathbf{B}$$

(3) ダイアドの成分表示

単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ から作ったダイアドを用いて次ぎのように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & A_x B_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + A_x B_y \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + A_x B_z \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \\ & + A_y B_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x + A_y B_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + A_y B_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \\ & + A_z B_x \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + A_z B_y \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + A_z B_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

ダイアドの線形結合をダイアドティックと呼ぶ。

(END)