連続の式

KENZOU

2015.10.25

第1話. 連続の式の導出

■流れの状態と流体の種類

本論に入る前に，流体の流れと特性について復習しておきます。
流れには，**定常流**と**非定常流**の2種類があり，特性としては**圧縮性流体**と**非圧縮性流体**，**粘性流体**と**非粘性流体**，**完全流体**の5種類がありました。それぞれの特長を以下に挙げておきます。

流体の流れ	**定常流**	： 流速，圧力，密度などで表される流れの状態が時間的に変化しない
	非定常流	： 流れの状態が時間とともに変わる
流体の種類	**圧縮性流体**	： 気体のように圧力によって密度が変化する
	非圧縮性流体	： 液体のように密度が一定の流体（$\rho = \mathtt{const}$）
	粘性流体	： 粘性のある流体
	非粘性流体	： 粘性のない流体
	完全流体	： 粘性も圧縮性もない理想的な流体

なお，圧縮性流体のことを**縮む流体**，非圧縮性流体のことを**縮まない流体**ともいいます。

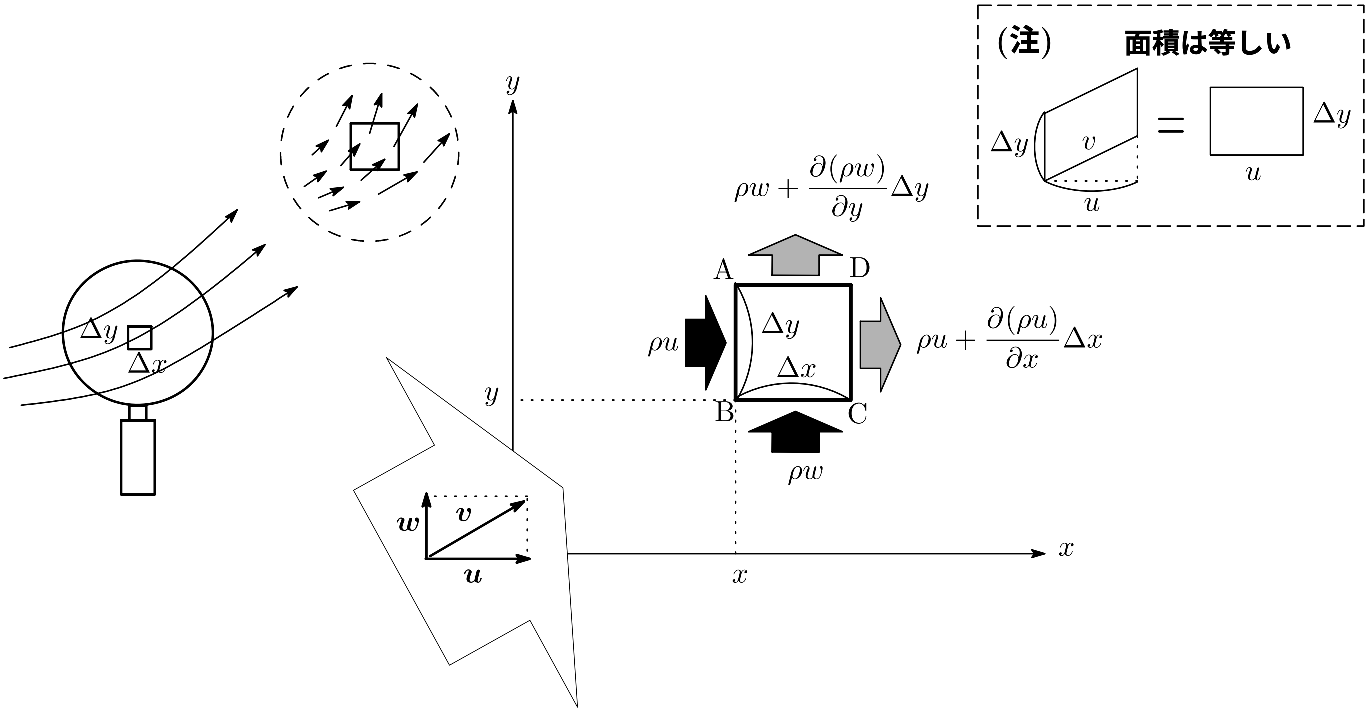
さて，連続の式は別名**質量保存則**ともいわれます。質量保存則とは流体中に適当な閉じた固定領域Sを考え，領域S内の

（単位時間当たりの）質量増加量＝流入した質量－流出した質量

が成り立つことです。連続の式は流体力学だけでなく，電磁気学や量子力学でも登場する基本的で重要な式ですので，第1話は「連続の式」について，微分形と積分形の2つの形式でわかりやすくお話をします。

■連続の式（微分形）

話を分かりやすくするため 2 次元の流れを考えます（3 次元への拡張は容易)。流れの適当な位置に，縦・横 $\Delta x, \Delta y$，奥行きが 1 の微小な立方体 ABCD を考え，この立方体への流体の出入りについて考えます。流体の密度 ρ，流速 $\boldsymbol{v}$ は時間と空間の関数としておきます。$\rho = \rho(x, y, t)$，流速 $\boldsymbol{v}$ の x, y 成分をそれぞれ $u = u(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ とします。



●流入する質量

微小立方体に Δt 時間に流入してくる流体の質量を求めます。流体は AB 面と BC 面から流入してきます。AB 面から流入してくる流体の体積は x 軸方向の速度成分 u に面積 $\Delta y \times 1$ をかけたものでになり，流入質量はこれに ρ をかけて

$$\rho u \times \Delta y \times 1 \times \Delta t = \rho u \Delta y \Delta t \tag{1.1}$$

Δt 時間に AB 面から流入する質量

同様に BC 面から流入してくる流体の質量は,

$$\rho w \times \Delta x \times 1 \times \Delta t = \rho w \Delta x \Delta t \tag{1.2}$$

Δt 時間に BC 面から流入する質量

全体ではこれらの和になるので

$$\textbf{流入する流体の質量：}\quad \rho u \Delta y \Delta t + \rho w \Delta x \Delta t = (\rho u \Delta y + \rho w \Delta x)\Delta t \tag{1.3}$$

となります。

●流出する質量

次に，対向面 CD，AD から流出する流体の質量を求めます。AB，BC 面から微小距離 Δx, Δy 離れた面での x, y 軸方向の速度成分はそれぞれ $u(x+\Delta x, t)$, $w(y+\Delta y, t)$，同様に密度は $\rho(x+\Delta x, t)$, $\rho(y+\Delta y, t)$ となります。Δx, Δy は微小距離なので，速度と密度をテイラー展開して 1 次の項までとると

$$
\begin{aligned}
\textbf{CD 面での速さ：} \quad & u(x+\Delta x, t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x \\
\text{〃} \qquad \textbf{密度：} \quad & \rho(x+\Delta x, t) = \rho(x,t) + \frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x \\
\textbf{AD 面での速さ：} \quad & w(y+\Delta y, t) = w(y,t) + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y \\
\text{〃} \qquad \textbf{密度：} \quad & \rho(y+\Delta y, t) = \rho(y,t) + \frac{\partial \rho}{\partial y}\Delta x
\end{aligned}
$$

となります。したがって CD 面から Δt 時間に流出する流体の質量は

$$
\begin{aligned}
\textbf{CD 面流出質量:} \quad & \rho(x+\Delta x, y, t)u(x+\Delta x, t) \times \Delta y \times 1 \times \Delta t \\
&= \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta t \\
&= \left(\rho u + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho}{\partial x}\rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x^2\right)\Delta y \Delta t \\
&\fallingdotseq \left(\rho u + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x + \rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta t \\
&= \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta t
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

同様に AD 面から流出する質量は

$$
\begin{aligned}
\textbf{AD 面流出質量：} \quad & \rho(x, y+\Delta y, t)w(y+\Delta y, t) \times \Delta x \times 1 \times \Delta t \\
&\fallingdotseq \left(\rho v + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta t
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

したがって，この両面から流出する総質量は

$$
\textbf{流出質量：} \quad \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta t + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta t \tag{1.6}
$$

となります。Δt 時間に微小立方体 ABCD に流入する流体と流出する流体の質量の差引勘定を ΔM(=流入質量−流出質量) とすると，これは (1.3) から (1.6) を差し引いたものですから

Δt 時間の差引勘定：

$$
\begin{aligned}
\Delta M &= (\rho u \Delta y + \rho w \Delta x)\Delta t - \left\{\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta t + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta t\right\} \\
&= -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \Delta t
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

となります。$\Delta M > 0$ なら微小立方体内の流体の質量は増加し，$\Delta M < 0$ なら微小立方体内の流体の質量は減少することになります。

●連続の式

微小立方体内の流体の質量は $\rho\Delta x\Delta y$ で与えられます[1]。Δt 時間後の密度は $\rho(t+\Delta t)$ となるので，質量は

$$\rho(t+\Delta t)\Delta x\Delta y = \rho\Delta x\Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t = \rho\Delta x\Delta y + \Delta m, \qquad \Delta m = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t \quad (1.8)$$

Δm は Δt 時間での質量変化となります。微小立方体内で湧き出し，吸い込みがない場合，(1.7) の ΔM は Δm と等しくならなければなりません。

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\Delta t = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t$$

両辺を $\Delta x\Delta y\Delta t$ で割って整理すると，次の 2 次元流れの**連続の式**が得られます。

$$\textbf{連続の式：}\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

定常流では ρ の時間変化がないので (1.9) の左辺第 1 項が 0 となり，

$$\textbf{定常流：}\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0 \quad (1.10)$$

非圧縮性流体では $\rho = \mathtt{const}$ なので，$\partial\rho/\partial t = 0$，さらに ρ で割ると連続の式は

$$\textbf{非圧縮性流体：}\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.11)$$

となります。

3 次元流体の連続の式への拡張は流速を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ として

$$\textbf{連続の式：}\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.12)$$

となります。ベクトル形式では $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を x, y, z 軸方向の単位ベクトルとすると

$$\textbf{連続の式}\begin{cases} \textbf{連続の式} & : \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \textbf{定常流} & : \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\ \textbf{非圧縮性流体} & : \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\ \textbf{完全流体} & : \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

と表されます。

[1] ここでの密度 ρ は微小立方体内の平均密度とします。

■連続の式（積分形）

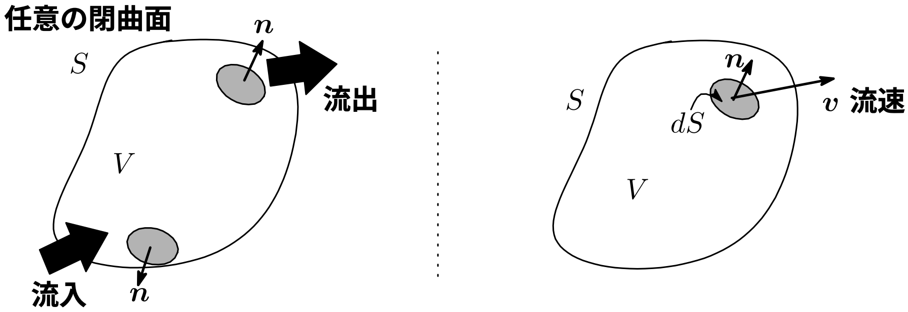
(1) では微小立方体 ABCD を考えましたが，ここでは空間に固定した任意の閉曲面 S を考え，その体積を V とします。流体は閉曲面を通して流出入します。閉曲面に含まれる質量は

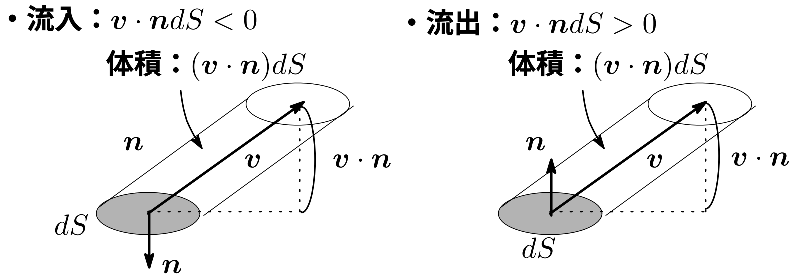
$$\textbf{閉曲面内の流体の質量：}\int \rho dV \tag{1.14}$$

で，単位時間当たりの質量変化は

$$\textbf{単位時間当たりの質量変化：}\frac{d}{dt}\int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{1.15}$$

閉曲面 S 上の任意の微小面積を dS とし，dS に垂直な外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします。





流体の流入・流出は閉曲面 S を通して出入りし，流速 $\boldsymbol{v}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積が正の場合は流出，負の場合は流入になります。

$$\textbf{流入：}\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0$$

$$\textbf{流出：}\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} > 0$$

結局，$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を閉曲面の全表面にわたって積分した $\int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS$ は，流出質量から流入質量を差し引いた量になります。

$$\textbf{流出質量－流入質量} = \int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{1.16}$$

したがって，保存式は

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{1.17}$$

ここで面積分を体積積分に変換するガウスの公式（発散定理）

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV$$

を使うと (1.16) は

$$\int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS = \int_V (\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})dV \tag{1.18}$$

となるので，(1.17) に入れて整理すると

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V (\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})dV$$

$$\therefore \quad \int_V \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}\right\} dV = 0 \tag{1.19}$$

体積 V は任意の閉曲面なので，上式が成り立つには被積分関数が恒等的に 0 でなければなりません。これから (1.13) と同じ連続の式が得られます。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.20}$$

※蛇足：

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

第 1 話終わり

流れの記述

KENZOU

2015.10.30

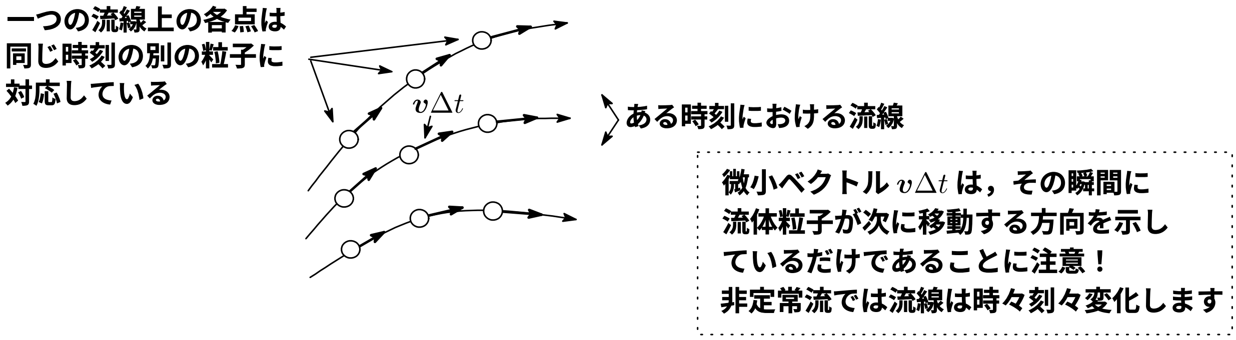
第 2 話.　流れの可視化

■流れを視覚的に表す方法

ゆく河の流れは絶えずして、しかももとの水にあらず。
淀みに浮かぶうたかたは、かつ消えかつ結びて、久しくとどまりたるためしなし。

これはどなたもよくご存じの方丈記の有名な一節です。鴨長明も河の流れをよく見ていたのでしょうか。穏やかな流れもあれば急流のような複雑な流れもあります。流れを視覚的に表すことができれば流れを理解する際に大変便利です。この方法として流線，流跡線（流跡），流線脈（流条線）というのがあります。

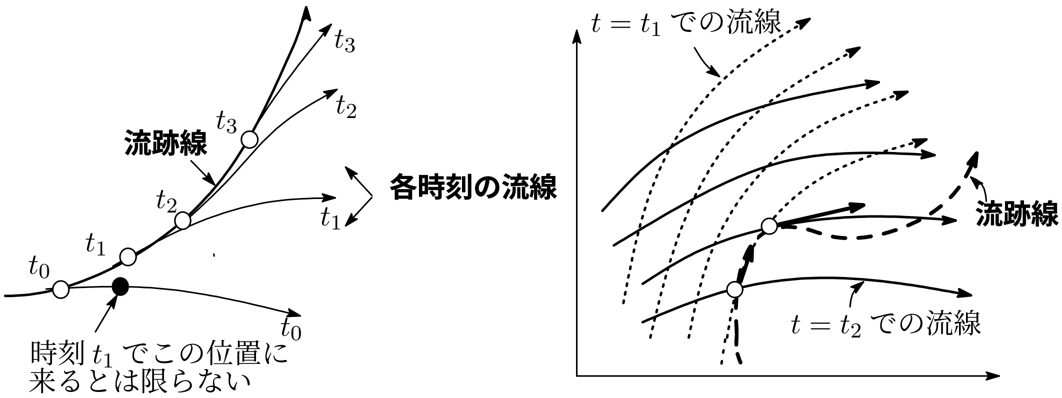
- **流線** (**Stream line**)：各瞬間ごとの各点における速度ベクトルが接線の方向となる曲線で，流線は互いに交差しない。
  流れている水の表面にアルミニュームの粉末を散布して Δt の短い露出時間で写真を撮ると，散布された粉末はそれぞれ短い線分（$ds = \boldsymbol{v}\Delta t$ という微小ベクトル）として写るので，それらの線分を連ねる曲線として無数の流線が現れます。流線が時間とともに変化しない流れを「定常流」，時々刻々と変化する流れを「非定常流」といいます。



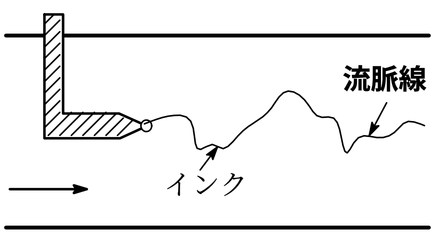
- **流跡線** (**Path line**)：1 点から出発した“ 一つの流体粒子 ”の動いた軌跡で，定常流では流線に一致する。
流れが「非定常流」の場合は、流体粒子が“ ある瞬間に描かれた流線 ”に沿って動いていくとは限りません。したがって，流体粒子が次の瞬間に動いていく流跡線は，ある瞬間の流線とは必ずしも一致しません。ただし，流線が時間的に変化しない定常流の場合には流線と流跡線は一致します。流跡線は「流れの道筋」ともいわれます。第 3 話でお話しするラグランジュの方法のところで再登場しますのでお楽しみに！

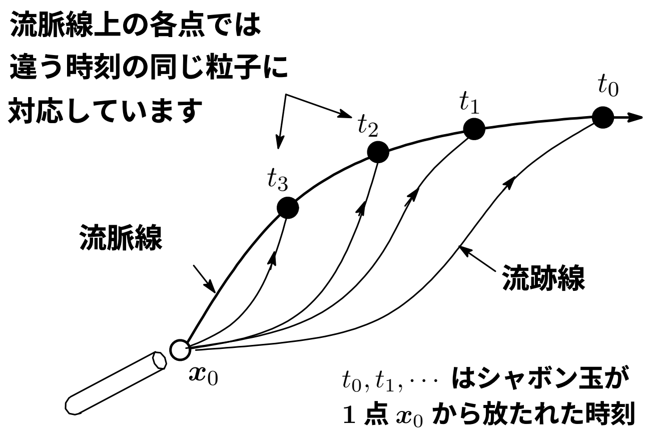
●流跡線と流線

非定常流では流線は時々刻々変化します。流体粒子は時々刻々異なる流線に乗り換えて移動していきます。流体粒子の移動の軌跡を流跡線といいます。

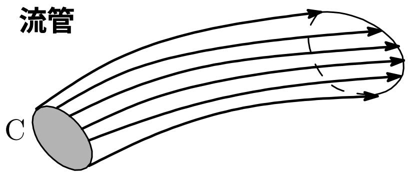


- **流脈線** (**Streak line**)：流れに中の同一点を通過した“ 複数の流体粒子 ”のある時刻 t において到達した点を結んでできる曲線。
例えば 1 点からインクなどを流し続けたときに作られる曲線や，シャボン玉を連続的に放った際の一連のシャボン玉の並びが形成する一本の線などが流脈線です。非定常流では流体粒子は流脈線上を移動していきません。ただし，定常流では流線，流跡線，流脈線はすべて一致することから，流脈線は「色つき流線」ともいわれます。





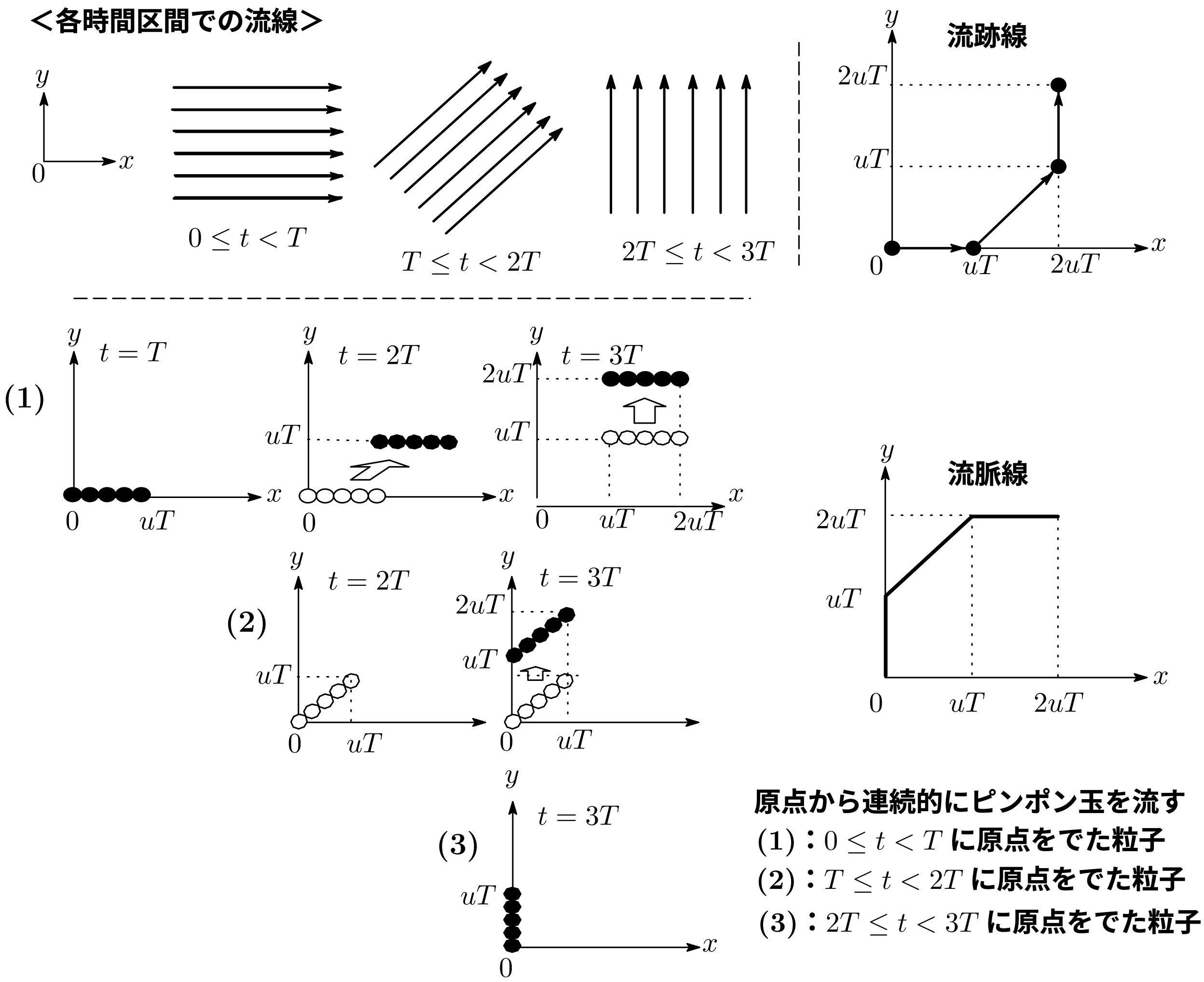
- **流管 (Stream tube)**：流体中に任意の閉曲線 C をとり，その曲線上の各点を通る流線によって作られる管。
  流管は流線の壁からなる一つの管です。定常流では流管の形は時間的に変わりませんが, 非定常流の場合は時々刻々変化します。



たとえば次のような $\boldsymbol{v}$ の速度場があるとして，流線，流跡線，流脈線を描いてみましょう。

$$0 \leqq t < T：(u,0), \quad T \leqq t < 2T：(u,u), \quad 2T \leqq t < 3T：(0,u), \quad 3T \leqq t：(0,0)$$

各区間時間での流線と流跡線, 流脈線はは下図のようになります。



■流線，流跡線の数学的な取り扱い

流線や流跡線の数学的な取り扱いのお話しです。

（1）流線の微分方程式

流線の微小線分ベクトルを $d\boldsymbol{s}$ とすると，$d\boldsymbol{s}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ と平行です。

$$d\boldsymbol{s} /\!/ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.1}$$

$d\boldsymbol{s} = (dx, dy, dz)$, $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ とし，k を適当な実数とすると

$$dx = ku(\boldsymbol{x},t), \quad dy = kv(\boldsymbol{x},t), \quad dz = kw(\boldsymbol{x},t)$$

とおけるので，**流線の微分方程式**として

$$\frac{dx}{u(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dy}{v(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dz}{w(\boldsymbol{x},t)} \tag{2.2}$$

が得られます。ある時刻 t での流線は (2.2) を t を一定として積分することで求められます[1]。

（2）流跡線の微分方程式

さて，いま一つの流体粒子が微小時間 dt の間に $d\boldsymbol{s}$ だけ動いたとすると

$$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)dt \qquad \therefore\ dx = u(\boldsymbol{x},t)dt,\ dy = v(\boldsymbol{x},t)dt,\ dz = w(\boldsymbol{x},t)dt \tag{2.3}$$

の関係が成立するので，これから

$$\frac{dx}{u(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dy}{v(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dz}{w(\boldsymbol{x},t)} = dt \tag{2.4}$$

が得られます。あるいは，これを書き換えて

$$\frac{dx}{dt} = u(\boldsymbol{x},t), \quad \frac{dy}{dt} = v(\boldsymbol{x},t), \quad \frac{dz}{dt} = w(\boldsymbol{x},t) \tag{2.5}$$

(2.4) と (2.2) は形が似ていますが実質的には異なります[2]。一般に粒子は流線に沿って移動するわけではありません。(2.4) は**流跡線**を表す微分方程式で，速度成分 u, v, w が位置と時間の関数で与えられれば，(2.5) の 3 個の常微分方程式を解くことで粒子の道筋が得られます。なお，定常流では，速度 $\boldsymbol{v}$ は t を含まず位置 $\boldsymbol{x}$ だけの関数となるので，(2.4) は (2.2) と全く同じ方程式となり，定常流では粒子は流線に沿って移動することになります。

[1]ただし，定常流では速度成分は t の関数ではありません。
[2]流線は各瞬間における流れの方向を示す曲線で，流れの道筋は流体粒子が時間の経過とともに描く軌道。

例題１. 2次元定常流れの速度成分が $u = Ax,\ v = -Ay$ で与えられるとき，流線を求めよ。
[**解答**] 流線の微分方程は

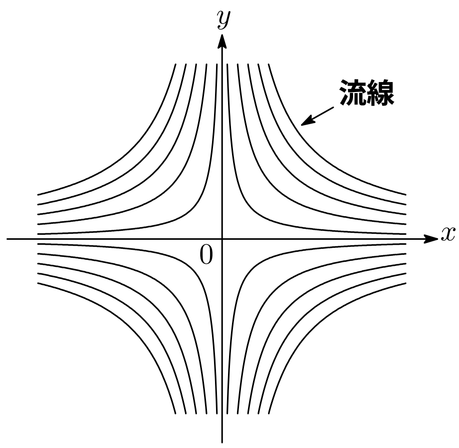
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{Ax} = -\frac{dy}{Ay}$$

これを積分して

$$\frac{1}{A}\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{A}\int \frac{1}{y}dy, \quad \therefore\ \log x = -\log y + C\ (\text{積分定数})$$

これから

$$xy = \mathtt{const}$$



流線は x, y 軸を漸近線とする双曲線となります。

例題２. 2次元流れの速度成分 u, v が次式で与えられるとき，流線と流跡線，流脈線を求めよ。

$$u = U_0, \quad v = V_0 \cos(kx - \omega t)$$

[**解答**] 流線の微分方程は

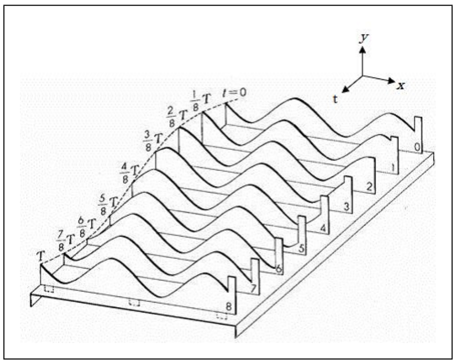
$$\frac{dx}{U_0} = \frac{dy}{V_0 \cos(kx - \omega t)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V_0}{U_0}\cos(kx - \omega t)$$

t を一定とみて x で積分すると流線の式が得られます。

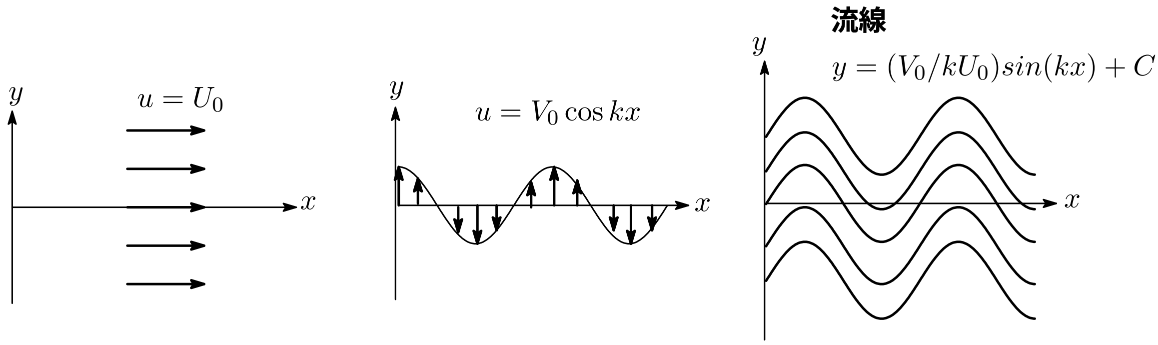
$$\int dy = \frac{V_0}{U_0}\int \cos(kx - \omega t)dx$$

$$\therefore\ \ y = \frac{V_0}{kU_0}\sin(kx - \omega t) + C \tag{2.6}$$

C は積分定数。時々刻々変化する流線のイメージは下図のようでしょうか。



$\omega = 0$ の場合（定常流）の流れの成分と流線は下図のようになります。



次に流跡線の微分方程式は

$$\frac{dx}{U_0} = \frac{dy}{V_0 \cos(kx - \omega t)} = dt \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = U_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = V_0 \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

第 1 式より

$$x = U_0 t + C_1 \tag{2.7}$$

これを第 2 式に入れて t について積分すると。

$$\frac{dy}{dt} = V_0 \cos\left[k(U_0 - \omega)t + kC_1\right]$$

$$\therefore \quad y = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin\left[(kU_0 - \omega)t + kC_1\right] + C_2 \tag{2.8}$$

が得られます。(2.7), (2.8) は時間 t をパラメーターとする流跡線の式です。この 2 式から t を消去すると

$$y = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin\left[\left(k - \frac{\omega}{U_0}\right) x + \frac{\omega}{U_0} C_1\right] + C_2 \tag{2.9}$$

が得られます。$\omega=0$ の定常流の場合は，流線 (2.6) と流跡線 (2.9) は一致します。

最後に原点 $(0,0)$ を通る流脈線を求めます。(2.9) のうち時刻 $t=\tau$ で原点（$x=y=0$）を通過する流跡線は (2.7)，(2.8) より

$$
\begin{aligned}
0 &= U_0\tau + C_1 \\
0 &= -\frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\omega\tau + C_2
\end{aligned}
$$

を満たします。これから積分定数 C_1, C_2 は

$$
C_1 = -U_0\tau, \quad , C_2 = \frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\omega\tau
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
x &= U_0(t-\tau) \\
y &= \frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\left[(kU_0-\omega)t + kC_1\right] + C_2 \\
&= \frac{V_0}{kU_0-\omega}\left\{\sin(kU_0(t-\tau)-\omega t) + \sin\omega\tau\right\}
\end{aligned}
$$

これが原点を通過する時刻 τ をパラメーターとした流脈線の式です。時刻 t における流脈線はこの両式から τ 消去すればいいので，第 1 式より

$$
\tau = t - x/U_0
$$

これを第 2 式に入れて

$$
y = \frac{V_0}{kU_0-\omega}\left\{\sin(kx-\omega t) - \sin\left[\omega\left(\frac{x}{U_0}-t\right)\right]\right\}
$$

となります。

例題 3．2 次元流れの速度成分が $u=t$, $v=1$ で与えられるとき，流線，流跡線，流脈線を求めよ。

[**解答**] 流線の微分方程式は

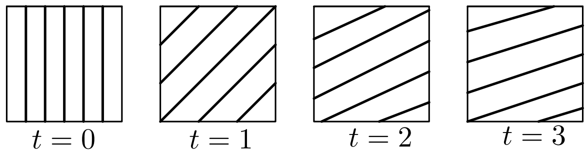
$$
\frac{dx}{t} = \frac{dy}{1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}
$$

t を一定とみて x で積分すると流線の式として

$$
y = \frac{1}{t}x + C
$$

が得られます。時間を追って流線を見ていくと，$t=0,1,2,3$ の流線は

$u=t$, $v=1$ の流線



次に流跡線の微分方程式は

$$\frac{dx}{t}=dy=dt \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dt}=t, \quad \frac{dy}{dt}=1$$

t で積分すると t をパラメーターとした流跡線の式が得られます。

$$x=\frac{1}{2}t^2+C_1, \quad y=t+C_2, \qquad (C_1, C_2\text{: 積分定数}) \tag{2.10}$$

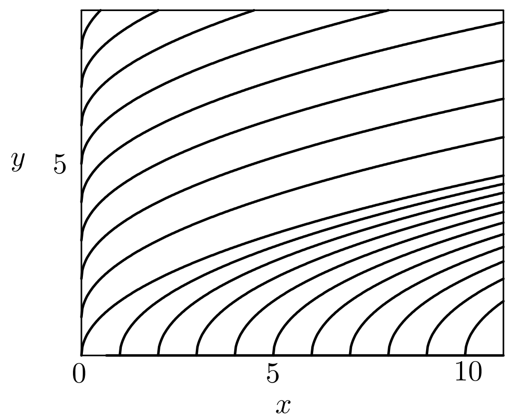
両式から t を消去すると

$$x=\frac{1}{2}(y-C_2)^2+C_1$$

これは C_1, C_2 を頂点とする放物線になります[3]。

流跡線

$t=0$ で x 軸上，y 軸上にあった流体の流跡線



最後に原点 $(0,0)$ を通る流脈線を求めます。時刻 τ で原点（$x=y=0$）を通過する流脈線の積分定数は

$$0=\frac{1}{2}\tau^2+C_1, \quad 0=\tau+C_2, \qquad \therefore\ C_1=-(1/2)\tau^2,\ C_2=-\tau$$

したがって，τ をパラメータとする流脈線の式は

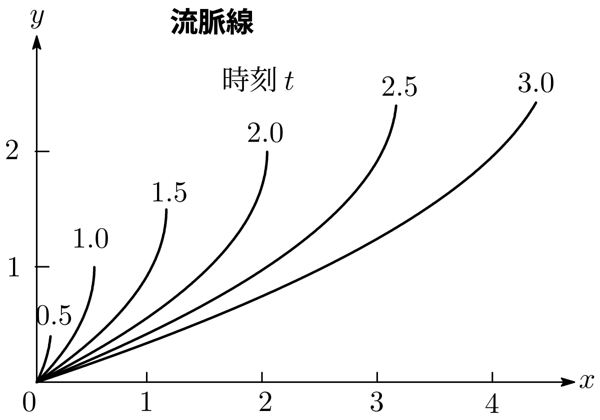
$$x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\tau^2, \quad y=t-\tau$$

[3]**蛇足**：質点の力学での斜方投射の運動とよく似ていますね。y 軸方向は等加速度運動 $v_y=at$，x 軸方向は等速運動 $v_x=\mathrm{const}$ で，質点の飛行軌跡は放物線となりました。

時刻 t における流脈線はこの両式より τ を消去して

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + ty$$

これは放物線ですね。$t = 0.5,\ 1.0,\ 1.5, \cdots$ とした場合の流脈線を下図に示します。



第 2 話終わり

ラグランジュの方法・オイラーの方法と流体の運動方程式

KENZOU

2015.11.02

第 3 話. ラグランジュの方法とオイラーの方法

日本物理学会 50 周年記念 (第 51 巻 11 号, 1996) の特集号に，今井功先生が「ある流体物理屋の軌跡」という一文を寄稿されていますので，冒頭の文章を少し引用してみましょう。

> **＝ Lagrange 的見方と Euler 的見方＝**
>
> 流体力学は水・油・空気など流体の運動とそれに関連する力学現象を対象とする。その考察の方法には，大まかにいって，Lagrange 的な見方と Euler 的な見方の二通りがある。前者は，流体をそれを構成する粒子の集団とみなし，各粒子の行う運動の総合結果として流体の運動を理解しようとする立場である。これに対して後者は，流体の運動を 4 次元空間 (x, y, z, t) の現象としてとらえる立場，すなわち，流体を一望のもとに見渡し，流体内の各点 $r(x, y, z)$ での流速が時間的にどう変化するかを追求する立場である。この Euler 的な見方は「場の理論」の原形をなすもので，数理解析の手法の適用が便利に行えるために，現在，流体力学の研究はもっぱらこの立場で行われている。

「場」というのは空間に分布している物理量であると定義できます。例えば速度が空間の各点で異なった値をとる，いいかえると速度が空間の各点の関数とみなせる場合，それを「速度場」といいます[1]。場に分布する物理量が大きさだけをもつスカラー量であればスカラー場、大きさと向きをもつベクトル量であればベクトル場などともいいます。

さて，第 3 話では流体の運動状態を表す方法として，**ラグランジュの方法**と**オイラーの方法**についてのお話をすることにします。流体の運動を考える場合一つの流体の塊（流体粒子）だけを取りだしてその運動を考えていけばよさそうですが，流体は空間全体を満たしており，

[1]速度場が時間 t に依存するものであれば，位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t の関数になります。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$

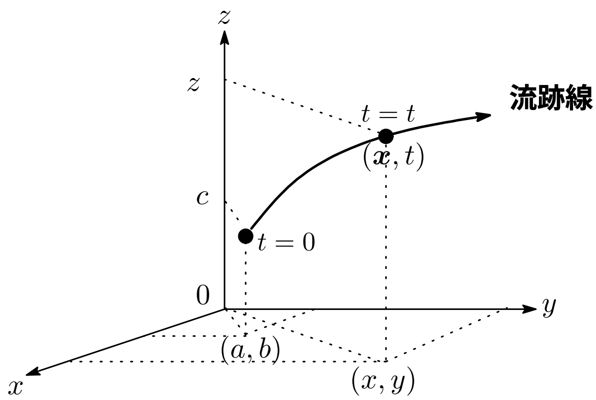
注目する流体粒子の運動とそれ作用する力はそれをとり囲むまわりの流体の運動に左右されるので，質点系の力学での取り扱いのようなわけにはいきません。ラグランジュの方法とかオイラーの方法というのは，このような連続している流体の運動を取り扱う方法です。

■ラグランジュの方法と運動方程式

（1）ラグランジュの方法

ラグランジュの方法というのは流体を微小な部分に分けて，それぞれの領域の一つ一つを流体粒子とみなし[2]，時間的に変化していく各粒子の運動を追跡することで流体の運動を調べていこうという方法です。なじみ深い質点の力学とおなじ考え方です。

ある流体粒子が時刻 t_0 で座標 $\boldsymbol{x}_0 = (a,b,c)$ の位置にあり，それが時刻 t で $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ の位置を占めたとします。流体粒子の軌跡は第 2 話でお話した流跡線ですので，$\boldsymbol{x}$ は初期位置 $\boldsymbol{x}_0$ と時間 t の関数として



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) = \boldsymbol{x}(a,b,c,t) = \begin{cases} x(a,b,c,t) \\ y(a,b,c,t) \\ z(a,b,c,t) \end{cases}$$

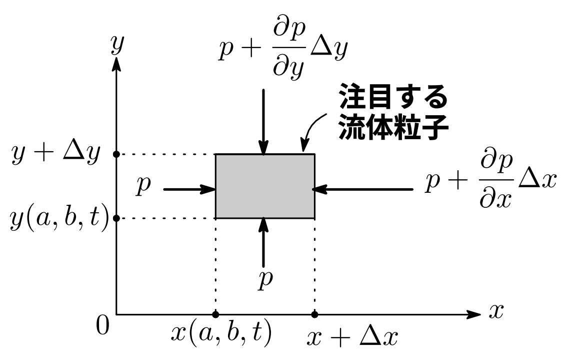
と表せます。独立変数は a,b,c と時間 t で $\boldsymbol{x}$ は従属変数となります。$t=0$ において $\boldsymbol{x}_0 = (a,b,c)$ という位置にいた流体粒子の名前を (a,b,c) と名付け，(a,b,c) を**物質座標**といいます。これは注目する粒子に付けたラベルです。一つの流体粒子にのみ注目すれば，物質座標 (a,b,c) はこの粒子に固有の値なので位置 $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ は時間 t のみの関数となります。したがって，注目する粒子の速度 $\boldsymbol{v} = (u,v,w)$ や加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{a,b,c}, \quad \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{a,b,c} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right)_{a,b,c} \tag{3.1}$$

と表すことができます。下付き添え字 a,b,c は注目する一つの流体粒子を意味します。

（2）ラグランジュの運動方程式

次にラグランジュの方法に従って粘性のない 2 次元完全流体の運動方程式を考えます。完全流体では流体粒子に働く力は，境界面に垂直な圧力 p



[2]流体は流体粒子が集まったものと考えます。

と重力などの体積力 $\boldsymbol{K}=(X,Y)$ だけですから，
運動方程式は，ρ を密度として

$$\begin{cases} \rho\Delta x\Delta y\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\rho\Delta x\Delta yX-\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \\ \rho\Delta x\Delta y\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\rho\Delta x\Delta yY-\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \end{cases}$$

と表せます。ここで左辺の偏微分の下添え字 (a,b) は省略しています。両辺を $\rho\Delta x\Delta y$ で割って

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \tag{3.2}$$

ラグランジュの方法では物質座標 a,b と時間 t を独立変数とするので，(3.2) を物質座標 a,b と時間 t を独立変数とする微分係数で書き直します。第 1，2 式にそれぞれ $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$ をかけて加え合わせ，同じように第 1，2 式にそれぞれ $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$ をかけて加え合わせると次の 2 式が得られます。

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\dfrac{\partial x}{\partial a}+\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial a}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\dfrac{\partial x}{\partial b}+\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial b}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} \end{cases} \tag{3.3}$$

これが完全流体の**ラグランジュの運動方程式**です。

4 個の未知数 x,y,p,ρ に対して方程式は 2 個なので，運動方程式を解くにはあと 2 個の方程式が必要になります。ρ が一定の「縮まない流体」の場合では，未知数が 3 個になるので (3.3) と「連続の式」より x,y,p を a,b,t の関数として表すことができます。また，ρ が変化する「縮む流体」の場合，とくに**バロトロピー流**(barotoropic flow) の場合は，(3.3) と連続の式にバロトロピーの関係式 $\rho=f(p)$ を加えて，4 個の未知数 x,y,p,ρ を a,b,t の関数として表すことができます。

ラグランジュの運動方程式は物質座標に関しては 1 階の偏微分方程式ですが，時間 t に関しては 2 階の偏微分係数を含み，しかも $(\partial^2 x/\partial t^2)\cdot(\partial x/\partial a)$ のような項まで含むので実際に解くのは難しく，このことから次に説明するオイラーの方法が用いられるのが一般的です。

[**注**] 3 次元の場合のラグランジュの運動方程式は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\dfrac{\partial x}{\partial a}+\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial a}+\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial a}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\dfrac{\partial x}{\partial b}+\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial b}+\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial b}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\dfrac{\partial x}{\partial c}+\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial c}+\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial c}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial c} \end{cases}$$

となります。まとめて書くと

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2}-K_j\right)\frac{\partial x_i}{\partial a_i}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a_i}$$

ただし，$(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c), \quad (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \quad (K_1, K_2, K_3) = (X, Y, Z)$ //

この項の最後に，バロトロピー流体で外力 $\boldsymbol{K} = (X, Y)$ が保存力である場合のラグランジュの運動方程式を取りあげておきます。ポテンシャルを $\Omega(a, b, t)$ とすると $\boldsymbol{K} = -\nabla\Omega$ より

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

また

$$X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial a}$$

$$X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial b}$$

となるので，(3.3) は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial a} = -\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial a}(P + \Omega) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial b} = -\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial b}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial b}(P + \Omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

と表せます。ただし，P は次式で定義される圧力関数と呼ばれるものです。

$$dP = \frac{dp}{\rho} \quad \longrightarrow \quad P = \int^p \frac{dp}{\rho} \tag{3.5}$$

(3.4) からは「ラグランジュの渦定理」が導かれますが，ここでは省略します。詳しい内容は今井功「流体力学（前編）」P.76 を参照ください。

■オイラーの方法と運動方程式

（1）オイラーの方法

オイラーの方法では空間の任意の位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を通過する流体粒子の運動に注目します。いわゆる「場」の立場です。ラグランジュの方法では物質座標 a, b, c と t が独立変数でしたが，オイラーの方法では位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t が独立変数となり，圧力 p や速度 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$，密度 ρ などの物理量 F は空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t の関数として $F(x, y, z, t)$ と表されます。したがって，物理量が**従属変数**となります。

さて，流体粒子のもつ物理量 F が流体の運動とともに時間的にどう変化するか，これを調べるために**流れに沿っての時間的変化を表す時間微分**を D/Dt という記号で表します。この時間微分を**ラグランジュ微分**[3]とか**物質微分**と呼んでいます。いま，1 つの物理量 F がオイラー

[3] DF/Dt は物質座標 (a, b, c) を一定にした時間微分で，ラグランジュの方法での時間微分です。

の方法で x, y, z, t の関数 $F(x, y, z, t)$ として与えられているとします。流速を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ として時刻 t で位置 x, y, z にいた流体粒子は微小時間 Δt の後には $(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$ の位置に移動しますが，その位置での物理量は

$$F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$$

と表されるので，移動前後の物理量の変化は

$$\Delta F = F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t)$$

で，単位時間当たりの平均変化率は $\Delta F/\Delta t$ となります。ここで，$\Delta t \to 0$ の極限をとったものを DF/Dt と書くと

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t) - F(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

右辺の分子をテイラー展開して Δt の 1 次の項までとると

$$\begin{aligned}\Delta F &= \left(F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}u\Delta t + \frac{\partial F}{\partial y}v\Delta t + \frac{\partial F}{\partial z}w\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\right) - F(x, y, z, t) \\ &= u\frac{\partial F}{\partial x}\Delta t + v\frac{\partial F}{\partial y}\Delta t + w\frac{\partial F}{\partial z}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)F, \qquad \nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.6}$$

と表せます。F は任意の物理量なので (3.6) の両辺から F を外すと

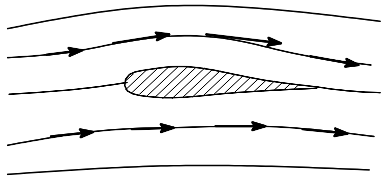
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{3.7}$$

(3.7) の右辺の第 1 項は空間の 1 点を通過する流体粒子の同じ位置での物理量の時間変化を表し，**非定常項**と呼ばれます。第 2 項は同じ流体粒子が移動することで観測される物理量の変化を表し，**移流項**とか**対流項**[4]と呼ばれます。$F = \boldsymbol{v}$ とすると (3.6) より流体粒子の加速度成分は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \tag{3.8}$$

と表されます。

[4]流れに乗っての移動を一般に対流といいます。



右辺の第１項は流速が時間的に変動することにより生じる加速度で**局所加速度**といいます。第２項以下はまとめて**移流加速度**といい，流れに速度勾配 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$ がある場合，流体粒子の速度が空間の位置によって異なることによる加速度であると解釈できます[5]。

（２）オイラーの運動方程式

ラグランジュの運動方程式のところで述べた完全流体を考えます。オイラーの運動方程式は

$$\begin{cases} \rho\Delta x\Delta y\dfrac{Du}{Dt} = \rho\Delta x\Delta y X - \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \\ \rho\Delta y\Delta y\dfrac{Dv}{Dt} = \rho\Delta x\Delta y Y - \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \end{cases}$$

整理すると

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \tag{3.9}$$

これは次のようにも書けます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{3.10}$$

ただし，$\boldsymbol{v} = (u, v)$, $\boldsymbol{K} = (X, Y)$。未知数の数と方程式の数の帳尻合わせはラグランジュの運動方程式でやったのと同じです。

［補足］ (1) F として流体の位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ をとれば，$\boldsymbol{x}$ のラグランジュ微分は流速速度 $\boldsymbol{v}$ となります。

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial x} + v\frac{\partial x}{\partial y} + w\frac{\partial x}{\partial z} = u, \quad \text{同様に}\ \frac{Dy}{Dt} = v, \quad \frac{Dz}{Dt} = w, \quad \therefore\ \frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ のラグランジュ微分は上で見たように加速度 $\boldsymbol{a}$ となります。

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

(2) ラグランジュ微分 DF/Dt は物質座標 (a, b, c) を一定にしての時間微分です。物理量 $F(x, y, z, t)$ の変数 x, y, z は物質座標 (a, b, c) と時間 t の関数となるので

$$x = x(a, b, c, t),\ y = y(a, b, c, t),\ z = z(a, b, c, t)$$

[5] $u = u(x, y, z, t)$ とすれば，$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$. これから $\frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$。$v, w$ についても同様。

と置けます。物理量 F のラグランジュ微分は合成関数の微分法より

$$\frac{D}{Dt}F(x,y,z,t) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{Dz}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

と展開できます。この式に $Dx/Dt = u$, $Dy/Dt = v$, $Dz/Dt = w$ を入れると

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)F$$

これは (3.6) にほかなりません。

(3) 2 つの関数 $f(\boldsymbol{x},t)$ と $g(\boldsymbol{x},t)$ の積についてのラグランジュ微分は普通の時間微分と同じように

$$\frac{D(fg)}{Dt} = \frac{Df}{Dt}g + f\frac{Dg}{Dt}$$

と展開できます。

$$\begin{aligned}
\frac{D(fg)}{Dt} &= \frac{\partial(fg)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(fg) \qquad \because\ \nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla f)g + f(\boldsymbol{v}\cdot\nabla g)\\
&= \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f\right)\right\}g + f\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla g\right)\right\}\\
&= \left(\frac{Df}{Dt}\right)g + f\left(\frac{Dg}{Dt}\right)
\end{aligned}$$

(4) 第 1 話で登場した連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

はラグランジュ微分を使えば

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

と表せます。

$$\because \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

(5) ラグランジュの方法とオイラーの方法の比較表

	ラグランジュの方法	**オイラーの方法**
独立変数	a, b, c, t	x, y, z, t
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \cdots$	$u, v, w, : p, \rho, T, \cdots$
$\dfrac{D}{Dt}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}$	$\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}$

ラグランジュの方法では $\partial x/\partial t$（a, b, c を一定に保っての微分）は速度の x 成分を表しますが，オイラーの方法では $\partial x/\partial t$（x, y, z を一定に保っての微分）は 0 となります。時間微分 $\partial/\partial t$ もラグランジュ的に考える場合とオイラー的に考える場合とで意味が異なることに注意が必要です。//

（3）ベルヌイの定理

保存力場での定常的な流れ（$\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$）を考えます。ベクトル解析の公式

$$\nabla \boldsymbol{A}^2 = 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

より

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) - \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

となるので，これを (3.10) に入れると

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{3.11}$$

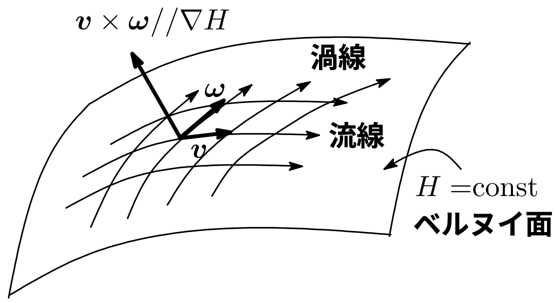
$\boldsymbol{\omega}$ は速度場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ の回転を表す物理量で，**渦度**と呼んでいます。バロトロピー流体を考えると $\nabla P = \nabla p/\rho$ なので，(3.11) は $q\equiv\sqrt{\boldsymbol{v}^2}$ として

$$\nabla\left(\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega\right) = \nabla H = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}, \quad H = \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega \tag{3.12}$$

となります。H をベルヌイ関数といい，$H = \mathtt{const}$ の曲面は流線と渦線が織りなす一つの曲面でこれを**ベルヌイ面**といいます。ベルヌイ面上では H が一定なので

$$H = \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = \mathtt{const} \tag{3.13}$$

(3.13) を**ベルヌイの定理**といいます。ベルヌイ関数 H の第 1 項 $q^2/2$ は単位質量あたりの運動エネルギー，第 3 項 Ω は単位質量あたりの位置エネルギーで，流線上[6]で H が一定に保たれるということは**エネルギー保存の法則**を意味していると考えれば，第 2 項の P は圧力[7]によって蓄えられる一種のポテンシャルエネルギーと解釈することができます。



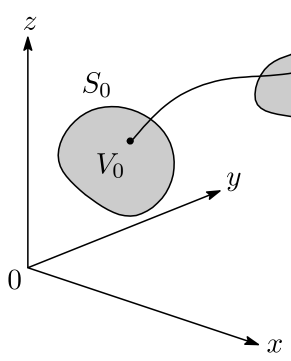
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

●おまけ：ラグランジュの連続方程式 (質量保存の法則)

第 1 話でお話した連続の式はオイラーの方法より導出したもので，最後におまけとしてラグランジュの方法に従って連続の式を導出します。

$t=0$ で流体に中に任意の閉曲面 S_0 で囲まれる体積 V_0 の領域を考えます。この領域の流体が任意の時刻 t で閉曲面 S で囲まれる体積 V の領域を占めるものとします。閉曲面は流体とともに動く面なので，それを通しての質量の出入りはないはずで質量は保存されます。

$$\int_V \rho dxdydz = \int_{V_0} \rho_0 dadbdc \tag{3.14}$$



$t=0$ での流体の初期座標を $\boldsymbol{x}_0=(a,b,c)$ とすると，時刻 t における座標 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0,t)$ は運動方程式の解として与えられます。これを $\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}$ の変数変換と考えれば，ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

を使って (3.14) の左辺は

$$\int_V \rho dxdydz=\int_{V_0}\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}dadbdc$$

となり，

$$\int_{V_0}\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\int_{V_0}\rho_0 dadbdc$$

の関係が得られます。ここで領域 V_0 は任意なので，両辺の被積分関数は等しくなければならず

$$\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\rho_0 dadbdc \tag{3.15}$$

が成り立ちます。この式はラグランジュの方法による質量保存則を表しているので，**ラグランジュの連続の式**といいます。非圧縮性流体（縮まない流体）では $\rho(\boldsymbol{x})=\rho_0(\boldsymbol{x}_0)$ であるので，連続の式は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=1 \tag{3.16}$$

となります。

第 3 話終わり

[6]流線と流跡線が一致する定常流を考えていることに留意。
[7]圧力の次元を $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}} \to \mathrm{NL/L^3}$ と書くと単位体積当たりのエネルギーを意味します。N：ニュートン。

流体粒子の変形と回転

$\mathcal{KENZOU}$

2015.11.22

第 4 話.　流れに伴う流体粒子の変形と回転

第 3 話のオイラーの運動方程式 (3.11) からお話を始めます。

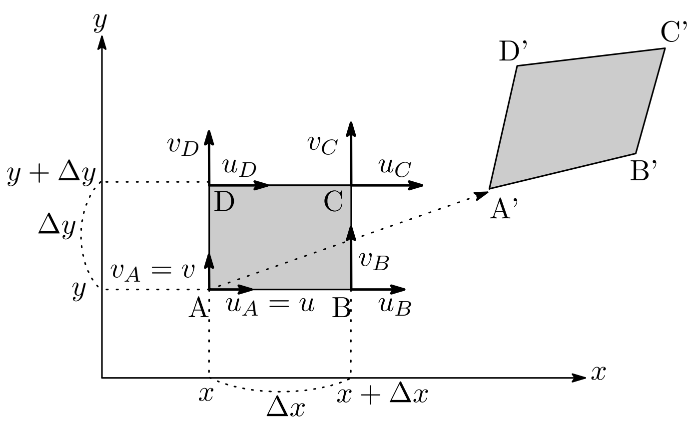
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{4.1}$$

渦度 $\boldsymbol{\omega}$ はベクトル量[1]で，その成分は次の通りです。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v} = (\omega_x,\,\omega_y,\,\omega_z) \longrightarrow \begin{cases} \omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

流体粒子は自転しながら流れているということを暗示します。もっとも $\boldsymbol{\omega} = 0$ であれば自転運動はありませんが。第 4 話では流体粒子の局所的な運動について見ていきます。

■流体粒子の変形と回転



2 次元完全流体の定常流について考えます。流れの中の流体粒子 ABCD が単位時間後に移動するとともにどのように形を変えていくかを調べます。点 A における x, y 方向の速度成分を $u_A(=u)$, $v_A = (v)$ とします。微小距離 Δx,Δy 離れた点 B,C,D における速度成分をそれぞれ (u_B, v_B), (u_C, v_C), (u_D, v_D)

[1] 渦度の大きさは自転角速度の 2 倍，向きは自転軸と一致します。

とすると各点での速度成分は次のように書けます。

$$\begin{cases} u_A = u & v_A = v \\ u_B = u(x+\Delta x) & v_B = v(x+\Delta x) \\ u_C = u(x+\Delta x, y+\Delta y) & v_C = v(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ u_D = u(x, y+\Delta y) & v_D = v(x, y+\Delta y) \end{cases} \tag{4.2}$$

テイラー展開して二次の微小量を無視すると

$$\begin{cases} u_A = u, \qquad v_A = v \\ u_B = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \qquad v_B = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x \\ u_C = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y \\ v_C = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y = v + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x \\ u_D = u + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \qquad v_D = v + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y \end{cases} \tag{4.3}$$

ここで

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.4}$$

とおいて (4.3) を書き直すと

$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u + a\Delta x, & v_B = v + (h+\Omega)\Delta x \\ u_C = u + a\Delta x + (h-\Omega)\Delta y, & v_C = v + b\Delta y + (h+\Omega)\Delta x \\ u_D = u + (h-\Omega)\Delta y, & v_D = v + b\Delta y \end{cases} \tag{4.5}$$

次に，a, b, h, Ω の物理的な意味な意味を見ていきます。

- $a = b = h = \Omega = 0$ **の場合：** A，B，C，D の各点は同じ速度成分をもつので，流体粒子は平行移動するだけで，回転も変形もしません。

- $h = \Omega = 0$ **の場合：** A，B，C，D 各点における速度成分は (4.5) より

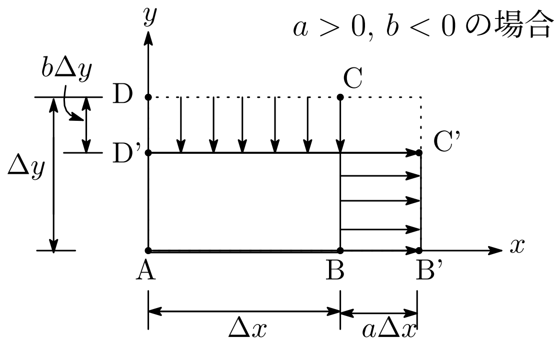
$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u + a\Delta x, & v_B = v \\ u_C = u + a\Delta x, & v_C = v + b\Delta y \\ u_D = u, & v_D = v + b\Delta y \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

また，非圧縮性流体の連続の式 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ の条件より a と b は独立ではなく

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a + b = 0, \qquad \therefore\ b = -a$$

この場合は流体粒子は平行移動するほかに x 軸方向に $a\Delta x$ 伸び，同時に y 軸方向に $b\Delta y$ だけ伸びます。このことから，a, b は x, y 方向の伸縮率を表します。



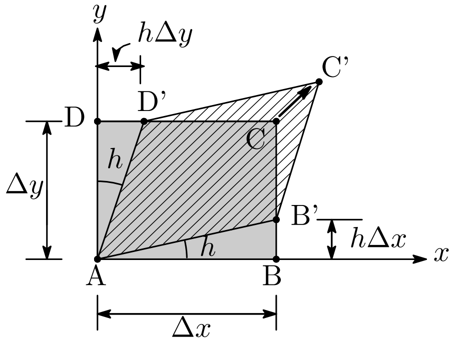
- $a = b = \Omega = 0$ **の場合：** この場合，

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A，B，C，D の各点における速度成分は (4.5) より

$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u, & v_B = v + h\Delta x \\ u_C = u + h\Delta y, & v_C = v + h\Delta x \\ u_D = u + h\Delta y, & v_D = v \end{cases} \tag{4.7}$$

単位時間経過後の流体粒子の形状は x 軸方向に A 点は u だけ進むのに対し D 点は $u+h\Delta y$ 進み，y 軸方向に A 点は v だけ進むのに対し B 点は $v + h\Delta x$ 進みます。また C 点は x, y 方向にそれぞれ $u + h\Delta y,\ v + h\Delta x$ 進みます。



この結果，辺 AB は反時計方向に移動して AB' に，辺 AD は時計方向に移動して AD' に，対角線 AC は AC' に伸長し，流体粒子の形状は長方形を平行四辺形にひしゃげる変

形（ずれ変形）をします。変形後の対角線 AC' と B'D' は変形前の対角線 AC，BD と等しいので，流体粒子は回転せずに純粋のズレ運動をします。h は単位時間当たりの角度変化，つまり角速度を表します。

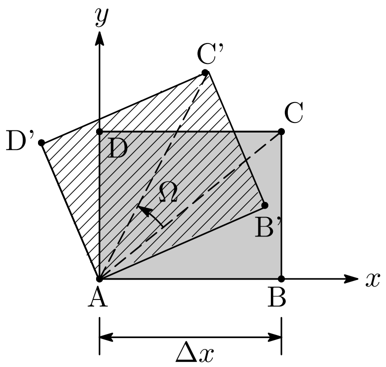
- $a = b = h = 0$ **なる場合** この場合,

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \therefore \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \Omega$$

ABCD の各点における速度成分は (4.5) より

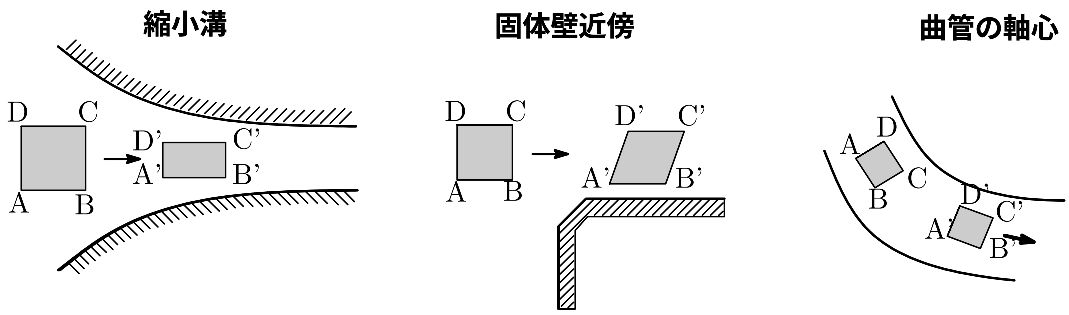
$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u, & v_B = v + \Omega\Delta x \\ u_C = u - \Omega\Delta y, & v_C = v + \Omega\Delta x \\ u_D = u - \Omega\Delta y, & v_D = v \end{cases} \tag{4.8}$$

となります。単位時間経過後の流体粒子の形状を元の形状に重ね合わせると図のようになります。



この場合，流体粒子は形状を変えずに紙面に垂直な軸の回りに角速度 Ω で反時計方向に回転していることになります。

以上，流体粒子は速度 $\boldsymbol{v}$ の並進運動，x, y 軸方向の一様な伸び縮みの運動，ひしゃげるような運動，角速度 Ω の回転運動を流れ場の状況に応じて同時に行っていることが分かります。



完全流体ではない実在の流体では，上で説明しました流体粒子のいろいろな変形をさまたげるような力が現れます。これが**粘性応力**と呼ばれるものですが，詳細は第 5 話でやる予定です。

[**補足**] 2 次元流れの加速度の成分は次式で与えられます。

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

上の第 1 式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\varepsilon_x + v\gamma_z - v\omega_z \end{aligned} \tag{4.9}$$

同様にして第 2 式は

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\varepsilon_y + u\gamma_z - u\omega_z \tag{4.10}$$

となります。ここで

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \longrightarrow \quad a,\, b \quad \text{（伸縮による変形速度）} \\ \gamma_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \longrightarrow \quad h \quad \text{（せん断変形による角速度）} \\ \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \longrightarrow \quad \Omega \quad \text{（回転運動の角速度）} \end{cases} \tag{4.11}$$

とおきました。(4.11) と (4.4) を対照すると $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_z, \omega_z$ はそれぞれ a, b, h, Ω に対応していることが分かります。ちなみに (4.9)，(4.10) の 3 次元版は次のようになります,

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\varepsilon_x + (v\gamma_z + w\gamma_y) + (u\omega_y - v\omega_z) \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\varepsilon_y + (w\gamma_x + u\gamma_z) + (u\omega_z - w\omega_x) \\ \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + w\varepsilon_y + (u\gamma_y + v\gamma_x) + (v\omega_x - u\omega_y) \end{cases} \tag{4.12}$$

ただし

- **伸縮による変形速度：** $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$
- **せん断変形による角速度：** $\gamma_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \gamma_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \gamma_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$
- **回転運動の角速度：** $\omega_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \omega_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

//

■ラグランジュの渦定理

最後にラグランジュの渦定理（完全流体では渦は不生不滅）のお話をして，第4話を終わることにします。

2次元流れでは渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\, 0,\, \omega_z) = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

で，角速度 Ω と渦度の関係は上で見てきたように $\Omega = \frac{1}{2}\omega$ となります[2]。流れのある領域の中で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき，その領域で流れは**渦なし**であるといい，$\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ の場合は**渦あり**あるいは**渦運動をする**といいます。(4.1) のオイラーの運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v})$$

で両辺の回転をとると，ベクトル解析の公式より $\nabla\times\nabla\varphi = 0$ なので

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{4.13}$$

が得られます。ベクトル解析の公式 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$, $\nabla\cdot\nabla\times A = 0$ を使うと

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \quad (\because\ \nabla\cdot\omega = 0)$$

となり，これと連続の式

$$\nabla\cdot v = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

より

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} \tag{4.14}$$

と表すことができます[3]。(4.13)，(4.14) は流れにのって移動するときの渦度の時間的変化を与える式で**完全流体に対する渦度方程式**といいます。$t = 0$ のときに $\boldsymbol{\omega} = 0$（渦なし）であったとすると,

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0} = 0$$

したがって，微小時間 Δt 後の流体粒子の $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=\Delta t} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=0} + \left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0}\Delta t = 0$$

となり $\omega = 0$ の渦なしです。次に時間を小刻みに進めて，最初の時刻から Δt 後の時刻を改めて $t = 0$ とすると，それから Δt 後も依然として $\omega = 0$。このように小刻みに時間の経過を追っ

[2]一般的に角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ と渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の間には $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$ の関係があります。

[3]詳細は「流体力学講話・その3」を参照。

て考えると，任意の時刻において渦度が 0 であることが分かります。逆に，$t = 0$ で $\omega \neq 0$ であったとすると，いつまでも $\omega = 0$ でなければなりません。というのは，ある時刻に $\omega = 0$ になったとすると，その時刻より ω の時間的変化を逆に遡っていくと，上と同様の議論により任意の時刻において $\omega = 0$ でなければならないことになりますが，これは $t = 0$ のとき $\omega = 0$ という前提と矛盾します。ということで渦は発生することも消滅することもありません。これを**ラグランジュの渦定理**といいます。

第４話終わり

粘性流体

KENZOU

2015.12.19

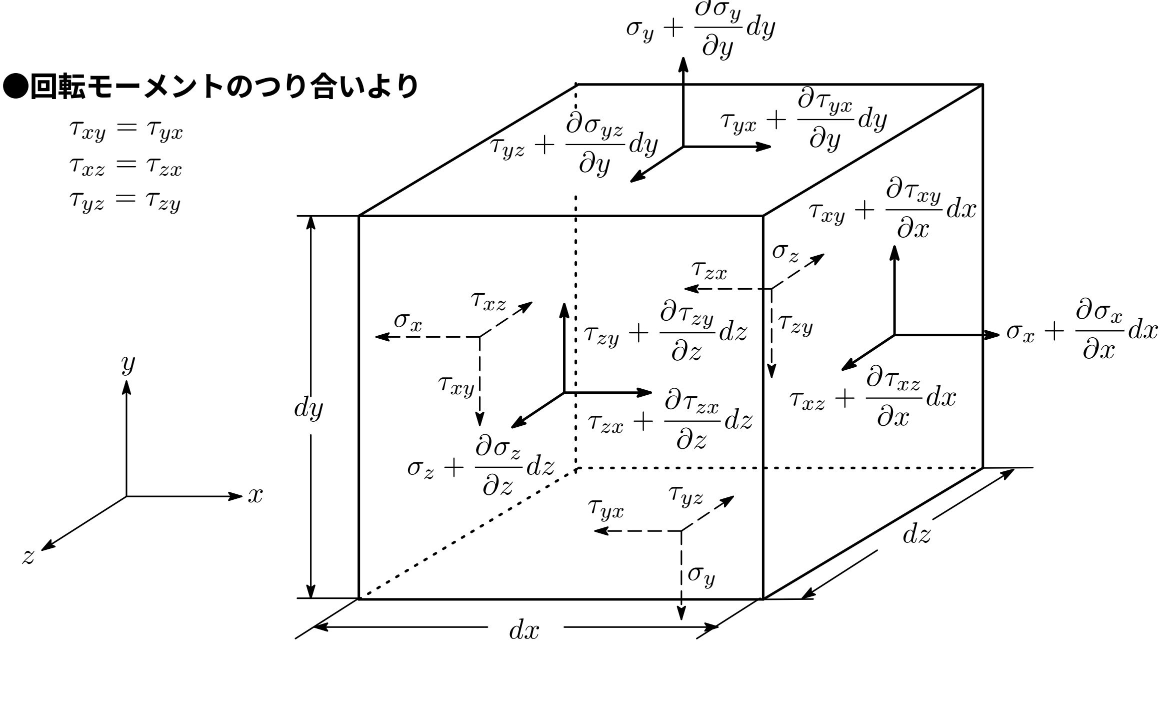
第 5 話.　粘性流体の運動方程式

■ナビエ・ストークス方程式

流体に働く力は**体積力**と面の両側の流体がその面を通して互いに及ぼしあう**面積力**があり，単位面積当たりの力を**応力**[1]といいます。完全流体では面積力は面に垂直な圧力だけですが，粘性流体では面に垂直な**垂直応力**と面に平行２つの**せん断応力**が働きます[2]。垂直応力を σ_x, σ_y, σ_z, せん断応力を τ_{xy}, τ_{yx}, $\cdots$ とすると，流体粒子の各面に働く応力は下図のようになります。ただし，せん断応力の最初の添え字 x, y, z は応力が作用している面に垂直な軸を示し，次の添え字は応力の作用する方向を示します。

●回転モーメントのつり合いより

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$



[1]面積力は面の両側の薄い層のみからくる近距離力。応力の単位は [N/m^{-2}] 。
[2]x 軸に垂直な面に作用する垂直応力を σ_x, せん断応力を τ_{xy}, τ_{xz}, etc とします。

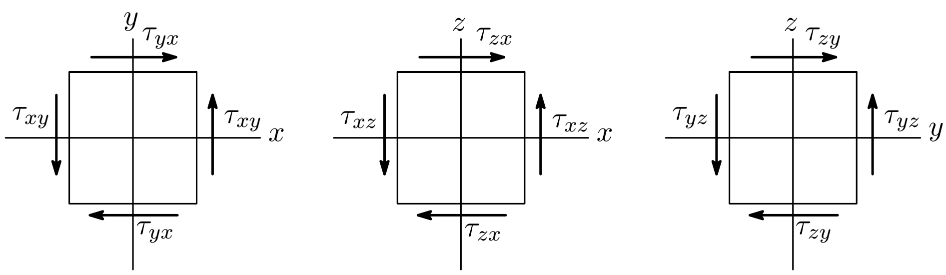
ある時刻 t において微小流体 $\rho dxdydz$ に x, y, z 軸方向に作用する応力は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
x\text{ 軸方向:}\quad & \left\{\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_x dydz\right\} + \left\{\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz - \tau_{yx}dxdz\right\} \\
& + \left\{\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \tau_{zx}dxdy\right\} \\
& = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \\
y\text{ 軸方向:}\quad & \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz \\
z\text{ 軸方向:}\quad & \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz
\end{aligned}
$$

単位体積当たりに働く外力と表面力をそれぞれ $\boldsymbol{K} = (X, Y, Z)$, $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$ とすると，微小流体の運動方程式は

$$
\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho\boldsymbol{K} + \boldsymbol{P} \longrightarrow
\begin{cases}
\rho\dfrac{Du}{Dt} = \rho X + \left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \\
\rho\dfrac{Dv}{Dy} = \rho Y + \left(\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz \\
\rho\dfrac{Dw}{Dt} = \rho Z + \left(\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

となります。これは粘性流体の運動に対して一般的に成り立つ方程式で，**ナビエ・ストークスの運動方程式**と呼ばれる[3]2 階非線形偏微分方程式です。応力の x, y, z 方向成分は $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$, $\tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ の 9 個ですが，流体粒子の回転モーメントのつりあいから $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ が成り立つので，独立成分は全部で 6 個になります。



粘性のない流れでは $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ および $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ となって (5.1) は**オイラーの運動方程式**[4]と一致します。

[3]土木技術者であったアンリ・ナビエが 1882 年に粘性流体に関する論文論文を発表し，それから 20 年余り後の 1845 年にジョージ・ガブリエル・ストークスがナビエとは別に粘性流体の方程式を導きました。

[4]第 3 話の (3.9) 式参照。

せん断応力 $\tau_{xy}, \cdots$ はせん断変形の角速度に比例し，比例定数を μ とすると

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{5.2}$$

と表せます[5]。比例定数 μ を粘性率といいます。$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は，詳しい導出は省略しますが次式で表されます。

$$\begin{cases} \sigma_x = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \tag{5.3}$$

ここで p は 1 点における平均圧力[6]で

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{5.4}$$

としました。右辺の負の符号は圧力 p が面の垂直方向に対して負の向きに作用することを示しています。以上の関係式を (5.1) に入れて整理すると，**ナビエ・ストークス方程式**は

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

と表されます。ただ，$\nu = \mu/\rho$ で ν を**動粘性係数**[7]といいます。上式をベクトル表記すれば次のようになります。

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla\Theta \qquad (\Theta = \nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.6}$$

非圧縮性流体では連続の式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

---

[5]ニュートンの粘性法則：せん断応力 $\tau = \mu du/dt$

[6]完全流体では応力は垂直応力のみで $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ですが，粘性流体では各垂直応力は互いに等しくありません。

[7]動粘性係数の単位は $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$

が成り立つので，**非圧縮性流体に対するナビエ・ストークス方程式**は

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

となり，ベクトル表記すれば次のように表されます。

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{5.8}$$

第 5 話終わり