

河川の流れのように、自由水面（大気圧と接する面）をもつ流れを開水路の流れ（open channel flow）といいます⁴⁰。管内の流れでも管内が水で満たされておらず、自由水面を持った流れであれば開水路の流れとなります。管水路流と開水路流の一番の違いは、開水路流では水深 h と流速 q が未知数であるのに対して管水路流では流れの深さは管径などとして既与であり、圧力 p と流速 q が未知であるという点にあります。さて、開水路の流れの中で、流速、水深が時間的に変化しない流れを定常流とか定流（steady flow）と呼んでいて、流速、水深が変化する流れを非定常流（unsteady flow）と呼んでいます。定常流の中で流速、水深が変化せず、水面勾配と水路床勾配が同じである流れを等流（uniform flow）、一方、水深や流速が場所によって変化する開水路の流れを不等流（non-uniform flow）と呼んでいます。

10 - 1 . 開水路の定常流の基礎方程式

定常的な流れであっても開水路では水深や流速が流れの方向に変化しているのが普通です。ここでは非定常項（ $\partial q / \partial t \neq 0$ ）を含む 1 次元流れに対するエネルギー損失を考慮した拡張ベルヌイの定理を考えると、 q を断面平均流速として (5.4) と (7.1) より次式となります⁴¹。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) + \frac{\partial h_\ell}{\partial x} = 0 \quad (10.1)$$

定常流では

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) + \frac{\partial h_\ell}{\partial x} = 0 \quad (10.2)$$

となります。ここで、開水路における圧力分布は静水圧分布をとると仮定します⁴²。

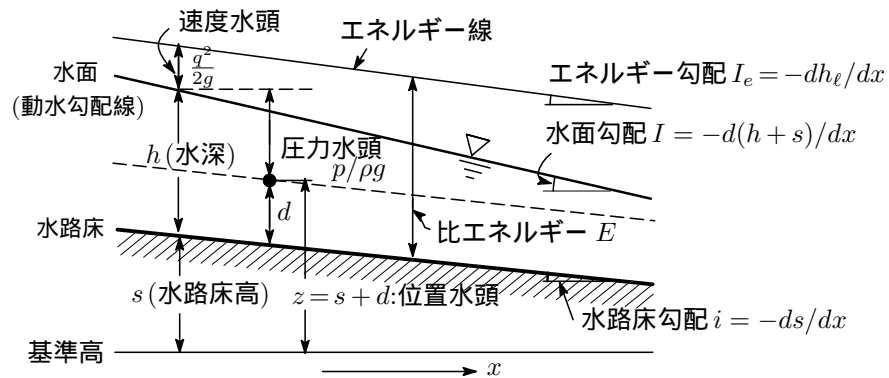


図 70: 開水路の流れ

書き込みが多いですが図 70 をご覧ください。水路床から高さ d の位置での位置水頭 z は $s + d$ とおけます。圧力水頭 $p/\rho g$ は静水圧分布を仮定しているので、これらの和であるピエゾ水頭は

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{\rho g(h - d)}{\rho g} + (s + d) = h + s \quad (10.3)$$

と表せ、 $h + s$ は基準高からみた水面の高さでもあるので、ピエゾ水頭を結ぶ動水勾配線は開水路の水面に等しいことがわかります。

⁴⁰ 開水路は open chanel の直訳。大気が開かれているという意味？ ちなみに対語の開水路は日本語登録なし。

⁴¹ 先走った話で恐縮ですが、ベルヌイの定理が成立するのは流線が連続している場合で、後ほど触れる「跳水」では流線が不連続となるのでベルヌイの定理は適用できません（その代わり運動量保存則を適用する）。いまのところ Don't mind!

⁴² 実際の観測結果もこの仮定を支持しています。

開水路定常流での全水頭（全エネルギー） H は

$$H = \frac{q^2}{2g} + h + s \quad (10.4)$$

と表せます。この式には水路床からの距離 d は含まれていません。つまり、流れの中のどの水深においても流れのもつ全水頭エネルギー H は一定であることを示しています。水路床勾配を i 、水面勾配を I 、エネルギー勾配を I_e とするとそれぞれ次のように表されます。

$$\begin{aligned} \text{水路床勾配 : } i &= -\frac{ds}{dx} \\ \text{水面勾配 : } I &= -\frac{d}{dx}(h+s) = -\frac{dh}{dx} + i \\ \text{エネルギー勾配 : } I_e &= \frac{dh_\ell}{dx} = -\frac{dH}{dx} = I - \frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{2g}\right) \end{aligned} \quad (10.5)$$

定常流の基礎方程式 (10.2) は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2g} + s + h \right) + \frac{\partial h_\ell}{\partial x} = 0 \quad (10.6)$$

となります。これは場所によって流速 q 、水深 h が変化する式となっていて、開水路・不等流の基礎式となっています。流速、水深が場所的に変化しない等流では $\partial q / \partial x = 0$, $\partial h / \partial x = 0$ なので

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial h_\ell}{\partial x} = 0, \quad \therefore i = I = I_e \quad (10.7)$$

が開水路・等流の基礎式となります。等流の水深は等流水深と呼ばれ通常 h_0 と書かれます。損失水頭 h_ℓ をダルシー・ワイスバッハの式 (7.7) で表すと

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{f'}{R} \frac{q^2}{2R} = 0 \longrightarrow i = \frac{f'}{R} \frac{q^2}{2R} \quad (10.8)$$

となり、これから等流における断面平均流速 q は

$$q = \sqrt{\frac{2gRi}{f'}} \quad (10.9)$$

これは管水路の平均流速を与える式 (7.33) と同じ形をしています。等流における断面平均流速 q については次に示すシェジの式とマンニングの式がよく使われます。

$$\text{等流の平均流速公式} \begin{cases} \text{シェジの式 : } q = C\sqrt{Ri} \\ \text{マンニングの式 : } q = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} \quad (n: \text{マンニングの粗度係数}) \end{cases} \quad (10.10)$$

10 - 2 . 比エネルギーと限界水深

既に、“§6-3. 堰”のところで登場しましたが、水路床を基準高としたエネルギー水頭を比エネルギー (specific energy) と呼び、次式で定義しました。

$$E = H - s = \frac{q^2}{2g} + h \quad (\text{m}) \quad (10.11)$$

これは水路床から測ったその断面での単位体積重量あたりのエネルギー水頭で、単位は m です。比エネルギー E を用いれば全水頭 H は次式で表せます (図 70 参照)。

$$H = E + s \quad (10.12)$$

いま、水路幅 B 、水深 h の矩形断面水路を考えると、流量 Q は $Q = qBh$ となるので、比エネルギーは

$$E = \frac{Q^2}{2gB^2h^2} + h \quad \begin{cases} h \rightarrow \infty : E = h \\ h \rightarrow 0 : E = (Q^2/2gB^2)h^{-2} \end{cases} \quad (Q: \text{一定}) \quad (10.13)$$

と表され、 E は水深 h の関数となります。 Q が一定の場合、比エネルギー E と水深 h の関係をグラフに描いたのが図 71 です。水深 h を小さな値から増加していくと E は最初減少し、その後極小値 E_{min} を経て h の増加とともに再び増加していくことがわかります。

E を h で微分して 0 とおき、比エネルギーが極小値 E_{min} をとる水深 h_c を求めれば次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dh} \Big|_{h=h_c} &= -\frac{Q^2}{gB^2h_c^3} + 1 = 0 \\ \therefore h_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} \end{aligned} \quad (10.14)$$

h_c は限界水深 (critical depth) と呼ばれ、最小のエネルギーで流下する際の水深を意味します。なお、限界水深は水路床勾配とは無関係で、流量 Q で決まります。最少エネルギー E_{min} は (10.13) に h_c を入れて

$$E_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \frac{3}{2} h_c \quad (10.15)$$

水深 h_c をとる流れは、これ以上低いエネルギーをもつ流れはないということで限界流 (critical flow) と呼ばれます。また、その流速は限界流速 (critical flow velocity) と呼ばれ、次式で与えられます。

$$q_c = \frac{Q}{Bh_c} = \sqrt[3]{\frac{gQ}{B}} = \sqrt{gh_c} \quad (10.16)$$

水深が限界水深より大きく $h > h_c$ なる流れを常流 (subcritical flow)、逆に限界水深より小さく $h < h_c$ なる流れを射流 (supercritical flow) と呼んでいて、このときの水深をそれぞれ常流水深 h_1 (subcritical depth)、射流水深 h_2 (supercritical depth) と呼んでいます⁴³。ところで図 71 を見れば同じ大きさの比エネルギー E をもつ水深が 2 つ存在することがわかります。小さいほうの水深を射流水深、大きいほうの水深を常流水深ということはいま述べた通りで、この 2 つの水深の組を交代水深 (alternative depth) と呼んでいて、管水路にはない開水路特有のものです。

流量 Q と水深 h の関係は (10.13) より

$$Q^2 = 2gB^2h^2(E - h) \quad (10.17)$$

比エネルギー E を一定として水深 h と流量 Q の関係をグラフで表すと図 72 のようになり、 $h = h_c$ の限界水深で流量は最大値となります。(10.17) を h で微分して 0 とおき、 Q_{max} を与える限界水深 h_c と Q_{max} を求めると

$$\begin{aligned} 2Q \frac{dQ}{dh} &= 2gB^2h(2E - 3h) = 0, \quad \therefore h_c = \frac{2}{3}E \\ Q_{max} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g B E^{3/2} \end{aligned} \quad (10.18)$$

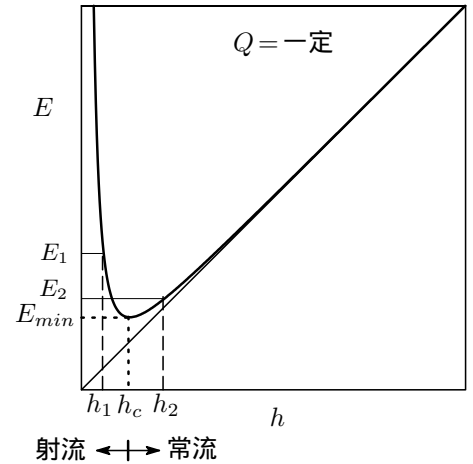


図 71: 比エネルギーと水深の関係

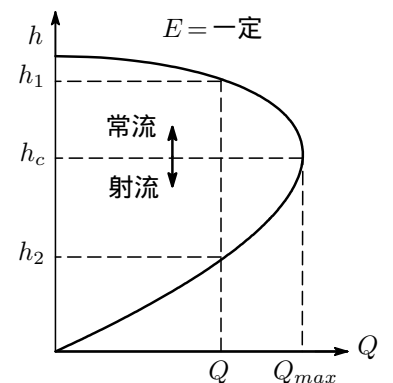


図 72: 水深と流量の関係

⁴³“ § 6-3. 堰 ”のところで触れましたが、射流は水深が比較的が浅く流速の速い流れ、常流は深い水深でゆっくりした流れとなります。

となります。以上、まとめると次の Bélanger-Böss の定理で表されます

- 限界水深はある流量 Q を流すのに比エネルギー E を最小とする水深である (Böss の定理:1919)
- 限界水深ある比エネルギーのもとで流量 Q を最大にする水深である (Bélanger の定理:1849)

10 - 3 . 限界水深とフルード数

水面を伝わる波の伝搬速度 v は、波の波長が水深 h に比べて十分大きい長波 (浅水波) では $v = \sqrt{gh}$ で与えられます。流速の遅速は、この波の伝搬速度を基準としています。流速 q と伝播速度 $\sqrt{gh}$ の比をフルード数 Fr (Froude number) ⁴⁴ といい、次式で定義される無次元量です。

$$Fr = \frac{q}{v} = \frac{q}{\sqrt{gh}} \quad (10.19)$$

連続の関係 $qh = q_c h_c$ を用いれば、フルード数 Fr は限界水深 h_c を用いて

$$Fr = \frac{q}{\sqrt{gh}} = \frac{q_c}{\sqrt{gh_c}} \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2} = \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2} \quad (10.20)$$

と表せるので、フルード数を用いて流れを分類すると次のようになります。

$$\begin{cases} Fr < 1 (h > h_c) & q < \sqrt{gh} & \text{常流} \\ Fr = 1 (h = h_c) & q = \sqrt{gh} & \text{限界流} \\ Fr > 1 (h < h_c) & q > \sqrt{gh} & \text{射流} \end{cases} \quad (10.21)$$

常流の場合は、波が進む速さが流速より速いので波は上流側にも伝搬しますが、射流の場合は流速が波の進む速さより速いので上流側へ伝搬する波は直ちに押し流され、このため波は下流側にしか伝わりません⁴⁵。限界流では流速と波の進む速さは等しくなるので、波は静止して見えます。このように、常流では上流側の条件は下流に支配され、射流では流れは上流の条件に支配されるということになります。

【 補足・その4 】例えば三角形断面水路などのような矩形以外の一樣断面水路の場合には水深 h が水路横断方向に変化するのでフルード数を $Fr = v/\sqrt{gh}$ では定義できません。そのような場合、代表水深のとり方に工夫が必要になります。 A を流積 (流水断面積) として比エネルギーの式は (10.11) より

$$E = \frac{q^2}{2g} + h = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 + h \quad (\because q = Q/A) \quad (10.22)$$

これを h で微分して 0 とおけば

$$\frac{dE}{dh} = -\frac{1}{g} \frac{Q^2}{A^3} \frac{dA}{dh} + 1 = 0$$

このときの水面の幅を B とすれば $dA = Bdh$ とおけ、これを上式に入れて整理すると

$$\frac{Q^2}{g} = \left(\frac{A^2}{B} \right)_{h=h_c}$$

となり、これから

$$q_c = \sqrt{g \left(\frac{A}{B} \right)_c} = \sqrt{gD_c} \quad (10.23)$$

限界状態の流速は長波の進む速さ v と等しいので、フルード数は

$$Fr = \frac{q}{\sqrt{gD}} \quad (10.24)$$

と表せます。ここで $D = A/B$ は幾何学的な平均水深で水理水深 (hydraulic depth) と呼ばれ、断面形状を矩形

⁴⁴William Froude : 1810-1879, イギリスの水力学者, 造船技術者。

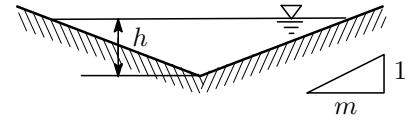
⁴⁵例えば川の流に小石を投げ入れると波紋ができますが、この波紋は常流では上流・下流方向に拡がりますが、射流では下流方向にしか拡がりません。

(長方形)に置き換えたときの水深に相当します(矩形断面積=縦×横の“縦”に当たる)。

・ ex-29. 図に示すように側壁勾配 $1/m$ の三角形断面水路を水が流量 Q で流れている。

(1) 水深 h を水路中央で定義するとき, 限界水深 h_c を求めよ。

(2) 流量 $Q = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, $h = 0.2 \text{ m}$, $m = 3$ の場合, 流れが常流, 射流, 限界流のいずれであるか判定せよ。



・ ans29. (1) 三角水路の流積 A は $A = (2mh \times h)/2 = mh^2$ であるので断面平均流速 q は $q = Q/A = Q/mh^2$ 。比エネルギー E は (10.11) より

$$E = \frac{q^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2gm^2h^4} + h$$

限界水深は $dE/dh = 0$ より

$$\left. \frac{dE}{dh} \right|_{h=h_c} = -\frac{2Q^2}{m^2gh_c^5} + 1 = 0, \quad \therefore h_c = \left(\frac{2Q^2}{m^2g} \right)^{1/5}$$

(2) 水理水深は $D = A/B = mh^2/2mh = h/2$ で断面平均流速は $q = Q/mh^2 (= 2.5 \text{ m/s})$ 。フルード数は (10.24) より

$$Fr = \frac{q}{\sqrt{gD}} = \frac{Q/mh^2}{\sqrt{gh/2}} = 2.53 > 1 \quad (10.25)$$

となるので流れは射流といえます。また, 限界水深を求めると $h_c = \left(\frac{2 \times 0.30^2}{3^2 \times 9.8} \right)^{1/5} = 0.29 \text{ m}$ となり, 流れの水深 $h = 0.2 \text{ m}$ は限界水深以下であるので流れは射流であるとも判断できます。

10 - 4 . 流れの遷移と水面形

開水路の流れには常流, 限界流, 射流の3種類があることは上で見てきたとおりですが, 例えば水路内に構造物などが設置されている場合, 上流側の常流が構造物を境に射流へと変化します(→ §6-3.E, F: 広頂堰, 潜り堰の項を参照)。このような流れの変化を流れの遷移と呼んでいます。流れの遷移は水路の形状や流量, 水路内の構造物などによって起こり, 遷移の種類としては3種の流れの組み合わせた「常流 → 常流」「常流 → 射流」「射流 → 常流」「限界流 → 常流」など9種があります。

A . 水路床に突起物がある水路での水面形

ここでは矩形断面水路の流れを考え, 水深の変化を表す式である水面形方程式を求めていきます。流れの全エネルギー H は (10.4) より

$$H = \frac{q^2}{2g} + h + s = \frac{Q^2}{2gB^2h^2} + h + s \quad (10.26)$$

ここで, Q は流量, h は水深, s は水路床高, B は水路幅です。流れの方向に x 軸を取り, Q, B を一定として x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{d}{dh} \left(\frac{Q^2}{2gB^2h^2} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} \\ &= \left(1 - \frac{Q^2}{gB^2h^3} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} = \left(1 - \frac{q^2}{gh} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} \\ &= (1 - Fr^2) \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} \end{aligned} \quad (10.27)$$

となります。いま，考えている水路の区間内で摩擦などによるエネルギー損失がなく $dH/dx = 0$ と仮定すると⁴⁶，水面形の式として次の 1 階常微分方程式を得ます。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{F_r^2 - 1} \frac{ds}{dx} = \frac{i}{1 - F_r^2} \quad (i = -ds/dx) \quad (10.28)$$

i は水路床勾配で，上り勾配のときは $i < 0$ ，下り勾配のときは $i > 0$ となることに注意ください。基準高からの水面高（水位）を $h_G = h + s$ とすると (10.28) より次式を得ます。

$$\frac{dh_G}{dx} = \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} = \left(\frac{F_r^2}{F_r^2 - 1} \right) \frac{ds}{dx} = \frac{F_r^2}{1 - F_r^2} i \quad (10.29)$$

それでは水路の途中に突起物がある場合の水面形の変化を見ていきましょう。表 2 と図 73 を参照ください。流れが常流であれば $F_r < 1$ で，突起物の上流側は上り坂で $i < 0$ となり $dh_G/dx < 0$ ，頂上では $i = 0$ で $dh_G/dx = 0$ ，そして突起物の下流側では下り坂で $i > 0$ となり $dh_G/dx > 0$ 。つまり，常流では突起物あたりで下に窪んだ水面形となります（→下に凸の突起物では常流，射流の水面形は図とは上下が逆の形になります）。一方，流れが射流では $F_r > 1$ なので，突起物の上流側では $dh_G/dx > 0$ ，下流側では $dh_G/dx < 0$ となり，突起の状況を反映した水面形となります。また，常流でも突起物頂点で水面が低くなり限界水深に達するような流れではそれより下流は常流から射流に遷移します⁴⁷。このように常流から射流へ移り得る断面を支配断面（control section）と呼んでいます。

表 2: dh_G/dx の i と F_r による変化

流れの状態	dh_G/dx (水面の変化)		
	$i < 0$ (上流側)	$i = 0$ (頂点)	$i > 0$ (下流側)
$F_r < 1$ (常流)	－	0	＋
$F_r > 1$ (射流)	＋	0	－

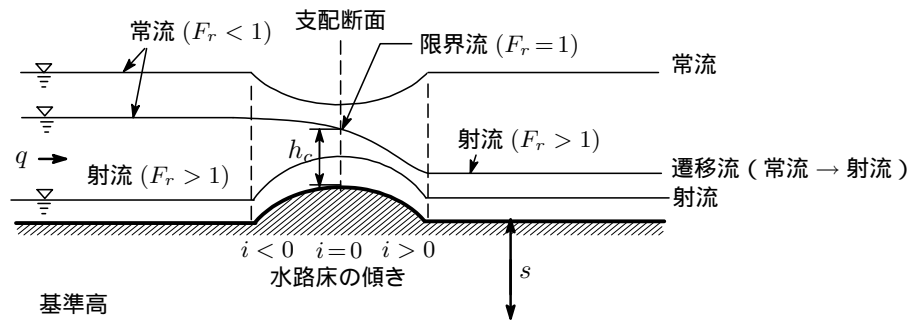


図 73: 常流・斜流における水面形の変化

B．水路幅が変化する水路の水面形

水路幅 B が変化しても水面形の変化は生じます。例によってエネルギー損失はないとします。いま，水路床を水平（ $ds/dx = 0$ ）とすると，比エネルギーは (10.11) より $A(x) = B(x)h(x)$ を流積として

$$E = \frac{q^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2gA^2} + h = \text{const} \quad (10.30)$$

⁴⁶ 流れの短い区間の水面形を議論する際に有効です。

⁴⁷ $F_r = 1$ のとき $dh_G/dx = \infty$ で発散（数学的には特異点）するので理論的には流れは不連続になりますが，現実には滑らかに遷移します。このあたりの議論は文献 [6] の“常流と射流の接続条件”を参照されたい。

これを x で微分して

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dx} &= -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} + \frac{dh}{dx} = -\frac{Q^2}{gB^3h^3} \left(h \frac{dB}{dx} + B \frac{dh}{dx} \right) + \frac{dh}{dx} \\
 &= \left(1 - \frac{Q^2}{gB^2h^2} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gB^3h^2} \frac{dB}{dx} = \left(1 - \frac{q^2}{gh} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{q^2}{gh} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \\
 &= (1 - Fr^2) \frac{dh}{dx} + Fr^2 \left(\frac{h}{B} \right) \frac{dB}{dx} = 0
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

これから水面形の式として次式を得ます。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \left(\frac{h}{B} \right) \frac{dB}{dx} \tag{10.32}$$

これから，流れの全域が常流のときは $Fr < 1$ なので，水路幅が拡大する部分 ($dB/dx > 0$) では $dh/dx > 0$ となるので水深は増加し，水路幅が縮小していく部分では逆に水深は浅くなっていくという結果が得られます。一方，全域が射流のときは， $Fr > 1$ なので水深の変化は常流とは逆の状況となります。

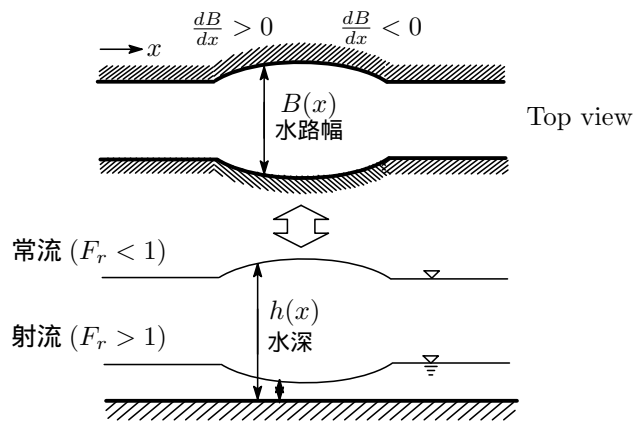


図 74: 水路幅が変化する水路での水面形の変化

10 - 5 . 跳水と比力

流れが射流から常流に移る場合には，常流の水深は上流側の射流に影響することができず，また常流の水面形はその下流の条件で変化するので，射流の影響は受けません。したがって，この場合は射流と常流の水面は互いに影響することなく，射流から限界水深を経て滑らかに常流に移ることは特別な場合にしか起こり得ません。一般には短い距離の間に射流から急に常流に変わり，そこでは水深の急な増加のために渦や攪乱が起こります。この現象を跳水現象 (hydraulic jump) と呼んでいます。跳水現象では跳水部で流線が不連続となるためベルヌイの定理が使えません。そこで射流側と上流側に挟まれた領域を検査領域にとり，運動量方程式を利用することにします⁴⁸ (図 75 参照)。静水圧分布を仮定すると，検査断面 1, 2 での全水圧は $P_1 = \rho g h_1^2 B/2$, $P_2 = \rho g h_2^2 B/2$ となるので， q_1, q_2 を跳水前後の平均流速とすれば運動量方程式は

$$\frac{1}{2} \rho g B (h_1^2 - h_2^2) = \rho Q (q_2 - q_1) \tag{10.33}$$

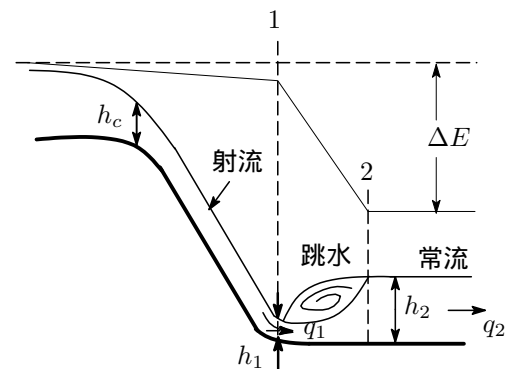


図 75: 跳水現象

⁴⁸ 運動量保存則はエネルギー損失の有無に拘らず適用できます。

となります。ここで式の見通しよくするために単位幅当たりの流量 Q/B を q (m^2/s) とおくと (10.33) は

$$\frac{1}{2}\rho g(h_1^2 - h_2^2) = \rho q(q_2 - q_1) \quad (q = Q/B) \quad (10.34)$$

と表せます。これに連続の式 $q = q_1 h_1 = q_2 h_2$ を入れて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{h_2} - \frac{q^2}{h_1} &= \frac{1}{2}gh_1^2 - \frac{1}{2}gh_2^2 \\ \therefore \frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} &= \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \end{aligned} \quad (10.35)$$

となります。ここで次の量 F_s を

$$F_s = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \quad (10.36)$$

と定義すれば、跳水前後で量 F_s は保存されることがわかります。この F_s を比力 (specific force) と呼び、長さの 2 乗 $[L^2]$ の次元を持っています。(10.36) は下に凸の曲線を描きます。そこで単位幅流量 q を一定として F_r を最小とする h を求めるとそれは限界水深となります。

$$\left. \frac{dF_r}{dh} \right|_{h=h_c} = -\frac{q^2}{gh^2} + h_c = 0, \quad \therefore h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (10.37)$$

このときの比力は

$$F_s = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{2/3} = \frac{3}{2} h_c \quad (10.38)$$

となります。

A . 共役水深

比力保存を表す (10.35) の式を整理すると

$$(h_1 - h_2) \left[\frac{1}{2}(h_1 + h_2) - \frac{q^2}{g(h_1 h_2)} \right] = 0 \quad (10.39)$$

となります。跳水現象では $h_1 \neq h_2$ であるので、等式が成立するためには $[\]$ 内は 0 でなければならず

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2) - \frac{q^2}{g(h_1 h_2)} = 0 \longrightarrow h_1^2 + h_1 h_2 - \frac{2q^2}{gh_2} = 0 \quad (10.40)$$

となります。この式は、与えられた単位幅流量 q に対して定常的な跳水現象が起きるための h_1 と h_2 が満たすべき関係式です。 h_1 あるいは h_2 に関する 2 次方程式を解いて、物理的に意味のない負の解を除けば

$$\begin{aligned} h_1 &= -\frac{h_2}{2} + \sqrt{\frac{h_2^2}{4} + \frac{2q^2}{gh_2}} = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{r2}^2} - 1 \right), \quad F_{r2} = \frac{q}{\sqrt{gh_2}} \\ h_2 &= -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2q^2}{gh_1}} = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{r1}^2} - 1 \right), \quad F_{r1} = \frac{q}{\sqrt{gh_1}} \end{aligned} \quad (10.41)$$

を得ます。 F_{r1} , F_{r2} は跳水前後の断面 1, 2 におけるフルード数です。したがって、射流水深 h_1 と常流水深 h_2 のうち、いずれ一つが与えられれば他方は自動的に決まります。この h_1 と h_2 を共役水深 (conjugate depth) と呼んでいて、跳水前後の水深の関係式として次式を得ます。

$$\begin{aligned} \frac{h_2}{h_1} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{r1}^2} - 1 \right) \\ \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_{r2}^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (10.42)$$

・ ex-30. 矩形開水路で単位幅当たりの流量が $q = 2.4 \text{ m}^2/\text{s}$ のとき跳水が起こった。跳水の前方の水深が $h_1 = 0.68 \text{ m}$ であった。跳水後方の水深 h_2 を求めよ。

・ ans30. (10.41) より

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2q^2}{gh_1}} = -\frac{0.68}{2} + \sqrt{\frac{0.68^2}{4} + \frac{2 \times 2.4^2}{9.8 \times 0.68}} = 1.02 \text{ m}$$

B. 跳水によるエネルギー損失

跳水の区間では渦の発生，攪乱により比エネルギーの損失が発生しますが，その損失量 ΔE を求めます。跳水前後の比エネルギーをそれぞれ E_1, E_2 ，比エネルギー損失量を ΔE とすると

$$E_1 = E_2 + \Delta E \longrightarrow \frac{q_1^2}{2g} + h_1 = \frac{q_2^2}{2g} + h_2 + \Delta E \quad (10.43)$$

跳水前後の流速は単位幅流量を q とし $q_1 = Q/Bh_1 = q/h_1$ ， $q_2 = Q/Bh_2 = q/h_2$ であるので，これを上式に入れて整理すると

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \left(\frac{q_1^2}{2g} + h_1 \right) - \left(\frac{q_2^2}{2g} + h_2 \right) = (h_1 - h_2) + \frac{q^2}{2g} \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}$$

また， q は (10.40) より

$$q^2 = \frac{gh_2}{2} (h_1^2 + h_1 h_2)$$

と表されるので，これを上式に入れて整理すると ΔE は次式で表されます。

$$\Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} > 0 \quad (\because h_2 > h_1) \quad (10.44)$$

10 - 6 . 不等流（漸変流）

水深や平均流速が一様でない流れを不等流といいました。不等流の中でも水深や流速が穏やかに変化する流れは漸変流と呼ばれます。流量 Q ，断面積（流積）を A とすると不等流の基礎方程式 (10.6) は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2gA^2} + s + h + h_\ell \right) = -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{dh_\ell}{dx} = 0 \quad (10.45)$$

水路の断面が水路幅 B の矩形断面とすると $dA/dh = B$ となり，限界水深は (10.14) より $h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}$ ，水路床勾配 $i = -ds/dx$ とし上式を整理すると

$$\begin{aligned} -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} + \frac{ds}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{dh_\ell}{dx} &= \left(1 - \frac{Q^2}{gB^2 h^3} \right) \frac{dh}{dx} - i + \frac{dh_\ell}{dx} \\ &= \left(1 - \frac{h_c^3}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} - 1 + \frac{dh_\ell}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (10.46)$$

となり，これから不等流の水面形の式として次式を得ます。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{dh_\ell}{dx}}{1 - \left(\frac{h_c}{h} \right)^3} \quad (10.47)$$

損失水頭 dh_ℓ/dx はダルシー・ワイスバッハの式を用いて

$$\frac{dh_\ell}{dx} = f' \frac{Q^2}{2gRA^2} \quad (10.48)$$

と表されます。さて、漸変流を計算していく場合、均一な流れの式を使用できるということを仮定します⁴⁹。そこで流量 Q を (10.10) のシェジーの平均流速公式

$$Q = A_0 C \sqrt{R_0 i}, \quad f' = \frac{2g}{C^2} = 2g i R_0 \left(\frac{A_0}{Q} \right)^2 \quad (10.49)$$

を用いて表すことにします。ここで A_0, R_0 は等流状態の断面積と径深です。したがって、(10.48) は

$$\frac{dh_\ell}{dx} = \frac{R_0 A_0^2}{R A^2} i \quad (10.50)$$

となります。いま、簡単のために広幅長方形断面水路 ($B \gg h$) を仮定すると、 $R_0 = B h_0 / (2h_0 + B) \simeq h_0$ 、 $A_0 = B h_0$ であるので、 $A = B h$ 、 $R \simeq h$ とおけば (10.47) は

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_0/h)^3}{1 - (h_c/h)^3} \quad (10.51)$$

となり、これはシェジーの平均流速公式を用いた不等流水面形の式です。なお、 h : 水深、 x : 距離、 i : 水路床勾配、 h_0 : 等流水深、 h_c : 限界水深 です。なお、広幅長方形断面の等流水深 h_0 は (10.49) より

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{f' Q^2}{i 2g B^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2 i}} \quad (q = Q/B: \text{単位幅流量}) \quad (10.52)$$

と表せ、水路床勾配 i が大きくなると等流水深 h_0 は小さくなることがわかります。

シェジーの公式の代わりにマンニングの平均流速公式を用いた場合は

$$Q = \frac{1}{n} A_0 R_0^{2/3} i^{1/2}, \quad f' = \frac{2g n^2}{R^{1/3}} \quad (n: \text{マンニングの粗度係数}) \quad (10.53)$$

を (10.48) に入れて

$$\frac{dh_\ell}{dx} = i \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{4/3} = i \left(\frac{h_0}{h} \right)^{10/3}$$

となるので、不等流水面形の式 (10.47) は

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_0/h)^{10/3}}{1 - (h_c/h)^3} \quad (10.54)$$

となります。この場合の等流水深は

$$h_0 = \left(\frac{nQ}{B i^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{nq}{i^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{n^2 q^2}{i} \right)^{3/10} \quad (10.55)$$

と表されます。ところで (10.51)、(10.54) においては $h = h_c$ で $dh/dx \rightarrow \infty$ となりますね。- 限界水深は水面形方程式の数学的特異点を与える水深である - これをブレスの定理⁵⁰と呼んでいます。

ブレスの公式 (10.51) を積分して水面形を求めると

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - (h_c/h)^3}{1 - (h_0/h)^3} dh &= i \int dx \\ \therefore \frac{ix}{h_0} &= \frac{h}{h_0} - \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{h^2 + h h_0 + h_0^2}{(h - h_0)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2h + h_0}{\sqrt{3} h_0} \right] + K \\ &= \frac{h}{h_0} - \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} B \left(\frac{h_0}{h} \right) + K \end{aligned} \quad (10.56)$$

⁴⁹ この仮定条件は実験的・理論的に精密に確認されたことはないものの、それに伴う誤差は非常に小さいということが知られているようです。

⁵⁰ Jacques Antoine Charles Bresse : 1822-1883, フランスの水理学者

ここで

$$B\left(\frac{h_0}{h}\right) = \frac{1}{6} \ln \frac{1 + (h_0/h) + (h_0/h)^2}{(1 - h_0/h)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 + (h_0/h)}{\sqrt{3}(h_0/h)}$$

積分定数 K は境界条件として $x=0: h=h_1$ と設定すれば

$$K = -\frac{h_1}{h_0} + \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} B\left(\frac{h_0}{h_1}\right)$$

となります。常流では境界条件の影響は上流側に伝わり常に $x < 0$ を考えることになるので、(10.56) で $x = -\ell$ での水深を h として整理するとブレスの公式⁵¹と呼ばれる次式を得ます（→この公式の使い方は ex-31 を参照されたい）。

$$\frac{i\ell}{h_0} = \frac{h_1 - h}{h_0} + \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} \left[B\left(\frac{h_0}{h}\right) - B\left(\frac{h_0}{h_1}\right) \right] \quad (10.57)$$

を得ます。なお、射流であれば水深 h は $x = \ell$ での水深となります。

A．水路床勾配 - 限界勾配，緩勾配，急勾配 -

等流水深が限界水深に等しくなる水路床勾配を限界勾配（critical slope） i_c と呼んでいます。いいかえると、流れが限界流となったときの水路床勾配です。限界水深は (10.14) より

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}$$

シェジの公式を用いた場合の等流水深 h_0 は (10.52) より

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{f'}{i} \frac{Q^2}{2gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{i} \frac{Q^2}{B^2 C^2}}$$

$h_0 = h_c$ より限界勾配 i_c は

$$i_c = \frac{g}{C^2} \quad (10.58)$$

と表せます。また、マンニングの公式を用いた場合の水路床勾配 i_c は、同様に計算して

$$i_c = \frac{gn^2}{(Q^2/gB^2)^{1/9}} = \frac{gn^2}{h_c^{1/3}} \quad (10.59)$$

となります。 h_0 と h_c の比をとると次のようになります。

$$\begin{cases} \text{シェジの場合: } \left(\frac{h_0}{h_c}\right)^3 = \frac{g}{iC^2} = \frac{i_c}{i} \\ \text{マンニングの場合: } \left(\frac{h_0}{h_c}\right)^3 = \left(\frac{i_c}{i}\right)^{9/10} \end{cases} \quad (10.60)$$

水路床勾配 i が限界勾配 i_c より穏やかな $i < i_c$ ($h_c < h_0$) となる水路を緩勾配水路（mild slope channel），水路床勾配 i が限界勾配より大きな $i > i_c$ ($h_c > h_0$) となる水路は急勾配水路（steep slope channel），そして $i = i_c$ ($h_c = h_0$) となる水路は限界勾配水路（critical slope channel）と呼ばれます。

不等流水面形の式 (10.51)，(10.54) より，水深 h が等流水深 h_0 に近づく場合には $dh/dx \rightarrow 0$ となって水深は穏やかに等流水深に漸近し，水深 h が限界水深 h_c に近づく場合には $dh/dx \rightarrow \infty$ となる（Bresse の定理）ので限界水深付近では急激に水深が変化し，水面は垂直になろうとすることがわかります⁵²。

⁵¹Bresse, J.A. 1860: Cours de mécanique appliquée professé à l'Ecole des Ponts et Chaussées. Mallet-Bachelier, Paris

⁵²鉛直方向の加速度の影響によって実際には無限大にはならない。

B．不等流水面形

- 1) 緩勾配水路における水面形：緩勾配水路は $i < i_c$ で、これは (10.60) より $h_0 > h_c$ となり等流水深 h_0 は限界水深 h_c の上に位置します。いま、流れの水深を h とすると $h = h_0$, $h = h_c$ (特異点) を除けば、次の3つのケースが考えられます。

$$h_0 > h_c \rightarrow \begin{cases} (1) h > h_0 > h_c (dh/dx > 0) : \text{常流 (M}_1\text{曲線)} \\ (2) h_0 > h > h_c (dh/dx < 0) : \text{常流 (M}_2\text{曲線)} \\ (3) h_0 > h_c > h (dh/dx > 0) : \text{射流 (M}_3\text{曲線)} \end{cases} \quad (10.61)$$

- (1) 水深 h が等流水深 h_0 より大きい場合 ($h > h_0$) , $dh/dx > 0$ となり下流側に向かって水深が増し、一方、上流に向かうほど水深が減少して等流水深 h_0 に漸近します ($h \rightarrow h_0: dh/dx = 0$) 。この水面形は M_1 曲線と呼ばれ、とくに下流側に堰のある場合には堰上背水曲線 (back water curve) と呼ばれます。

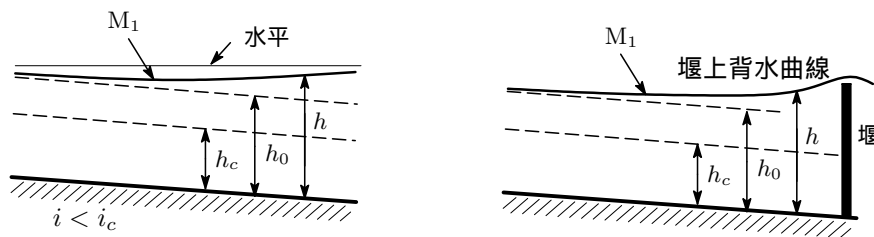


図 76: M_1 曲線

- (2) 水深 h が等流水深 h_0 と限界水深 h_c の間にある場合 ($h_0 > h > h_c$) , $dh/dx < 0$ で下流側に向かって水深が減少し、上流に向かうほど等流水深 h_0 に漸近します。流れ方向に水深が小さくなる水面形は M_2 曲線、低下背水曲線 (dropdown curve) と呼ばれ、下流側に支配断面 (常流から射流へ遷移) がある場合などに生じます。下流側に段落部 (支配断面) があり、そこで水深 h が限界水深 h_c に達すると $dh/dx = -\infty$ となって常流から射流へ遷移します。

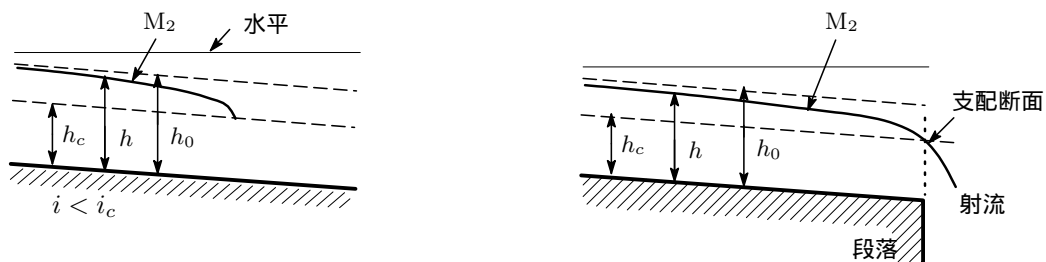


図 77: M_2 曲線

- (3) 水深 h が限界水深 h_c より小さい場合 ($h_c > h$) , $dh/dx > 0$ で下流側に向かって水深は増加します。そして水深が限界水深 h_c に達すると $dh/dx = +\infty$ となり、跳水 (射流 $\rightarrow$ 常流へ遷移) が生じます。この水面形は M_3 曲線と呼ばれ、上流側に限界水深よりも高さの低い開口部を持つゲートがある場合に生じます。

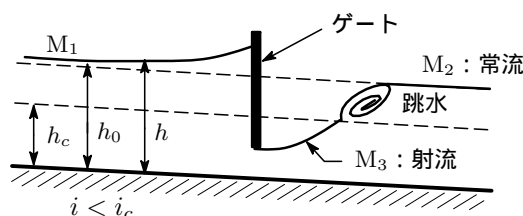


図 78: M_3 曲線

h	$h > h_0 > h_c$	$h = h_0$	$h_0 > h > h_c$	$h = h_c$	$h_0 > h_c > h$
dh/dx	> 0	0	< 0	∞	> 0
水深の変化 (→ 下流)	深くなる	変化なし	浅くなる	(特異点)	深くなる
水面形の名称	M ₁ 曲線		M ₂ 曲線		M ₃ 曲線

表 3: 緩勾配の水面形

2) 急勾配水路における水面形：急勾配水路は $i > i_c$ で、これは (10.60) より $h_0 < h_c$ となり等流水深 h_0 は限界水深 h_c の下に位置します。いま、流れの水深を h とすると $h = h_0$, $h = h_c$ (特異点) を除けば、次の 3 つのケースが考えられます。

$$h_c > h_0 \rightarrow \begin{cases} (1) h > h_c > h_0 (dh/dx > 0) : \text{常流 (S}_1\text{曲線)} \\ (2) h_c > h > h_0 (dh/dx < 0) : \text{常流 (S}_2\text{曲線)} \\ (3) h_c > h_0 > h (dh/dx > 0) : \text{射流 (M}_3\text{曲線)} \end{cases} \quad (10.62)$$

- (1) 水深 h が限界水深 h_c の上にある場合、 $dh/dx > 0$ なので下流側に向かって水深が増します。この水面形は堰や貯水池により下流側の水位が高い場合に生じ、S₁ 曲線と呼ばれます。特に下流側に堰がある場合、緩勾配水路の場合と同様に堰上げ背水曲線と呼ばれます。
- (2) 水深 h が限界水深 h_c と等流水深 h_0 の間にある場合、 $dh/dx < 0$ なので下流側に向かって水深は減少します。この水面形は S₂ 曲線と呼ばれ、常流から支配断面を経て射流に遷移した場合などに生じます。
- (3) 水深 h が等流水深 h_0 より下に位置する場合、 $dh/dx > 0$ なので下流側に向かって水深は増加し、等流へと遷移します。この水面形は S₃ 曲線と呼ばれ、上流側にゲートが有り、ゲートの高さが等流水深よりも低い場合などに生じます。

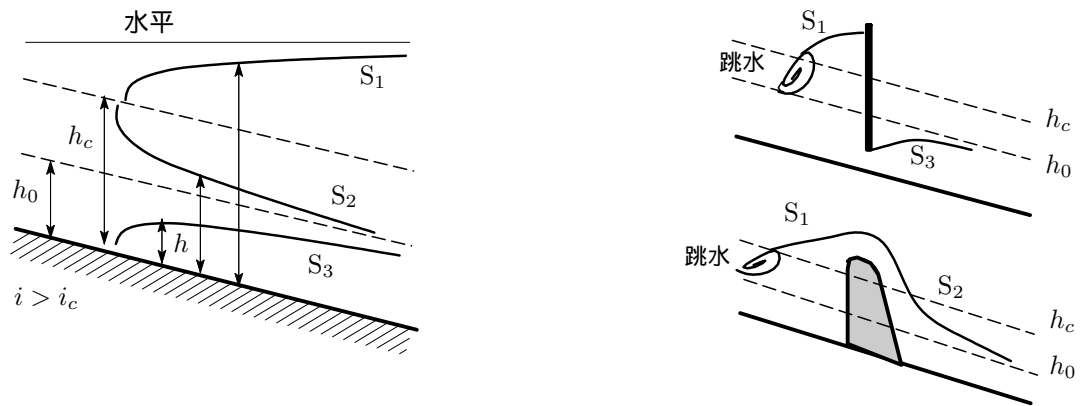


図 79: 急勾配水路における水面形

3) 限界勾配水路における水面形：限界勾配水路は $i = i_c$ で、これは (10.60) より $h_0 = h_c$ となり等流水深 h_0 と限界水深 h_c は等しく高さとなります。

$$h_0 = h_c \rightarrow \begin{cases} (1) h = h_0 = h_c (dh/dx = 0) : \text{等流 (限界流) (C}_2\text{曲線)} \\ (2) h > h_0 = h_c (dh/dx > 0) : \text{常流 (C}_1\text{曲線)} \\ (3) h_0 = h_c > h (dh/dx > 0) : \text{射流 (C}_3\text{曲線)} \end{cases} \quad (10.63)$$

- (1) 水深は等流水深で限界流の流れです。この水面形は C₂ 曲線と呼ばれます。
- (2) 水深 h が限界水深 h_c の上にある場合、 $dh/dx > 0$ となり下流側に向かって水深が増します。

$i = i_c$ & $h_0 = h_c$ であるので (10.54) より $dh/dx = i_c$ となり, 下流側に向かって水深は i_c の割合で深くなっていくので水面形は水平となります, この曲線は C_1 曲線と呼ばれます。

- (3) 水深 h が限界水深 h_c の下にある場合, $dh/dx > 0$ で下流側に向かって水深が増します。 C_3 曲線と呼ばれ, C_1 曲線と同様水面形は水平となります。

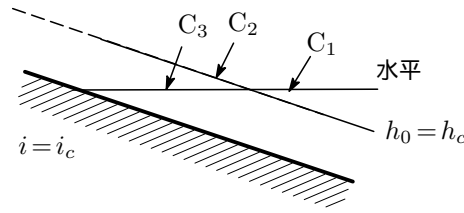


図 80: 限界勾配水路における水面形

•ex-31. 川幅 220m, 勾配 1/1000 の河川に $Q = 1300 \text{ m}^3/\text{s}$ の洪水が流れたときに, 河口の水深を $h_1 = 5\text{m}$ として, 河口から 3000m のところでの水深をブレスの公式によって求めよ。ただし, 粗度係数 n を 0.025 とする。

•ans.31 河川を広幅長方形断面水路 ($B \gg h$) と仮定します。等流水深を h_0 とすると, $R_0 = Bh_0/(2h_0 + B) \simeq h_0$, $A_0 = Bh_0$ とおけるので, マニングの平均流速公式を用いた場合の流量は (10.53) より

$$Q = \frac{1}{n} A_0 R_0^{2/3} i^{1/2} = \frac{1}{n} B h_0^{5/3} i^{1/2}$$

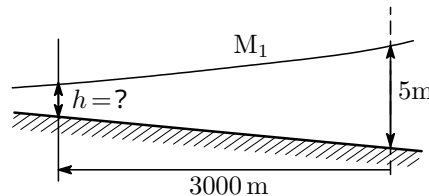
これから等流水深 h_0 は

$$h_0 = \left(\frac{nQ}{B i^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{0.025 \times 1300}{220 \times \sqrt{1/1000}} \right)^{3/5} = 2.52 \text{ m}$$

また, 限界水深 h_c は (10.14) より

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{1300^2}{9.8 \times 220}} = 1.53 \text{ m}$$

と求められます。いま, $h_1 > h_0 > h_c$ となっているので, 水面形は (10.61) で示した緩勾配水路での M_1 曲線となっていることがわかります。ブレスの公式を再掲すると



$$\frac{i\ell}{h_0} = \frac{h_1 - h}{h_0} + \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} \left[B \left(\frac{h_0}{h} \right) - B \left(\frac{h_0}{h_1} \right) \right]$$

$$B \left(\frac{h_0}{h} \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{1 + (h_0/h) + (h_0/h)^2}{1 - (h_0/h)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 + (h_0/h)}{\sqrt{3}(h_0/h)}$$

{ } 内は $h_0 = 2.52$, $h_c = 1.53$ を入れて

$$\left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} = \left\{ 1 - \left(\frac{1.53}{2.52} \right)^3 \right\} = 0.776$$

まず, $h=4\text{ m}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} h_0/h &= 0.630, & B(0.630) &= 1.1290 \\ h_0/h_1 &= 0.504, & B(0.504) &= 1.041 \end{aligned} \quad (10.64)$$

ブレスの公式より

$$\begin{aligned} i\ell &= h_1 - h + h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} \left[B\left(\frac{h_0}{h} \right) - B\left(\frac{h_0}{h_1} \right) \right] \\ &= (5 - 4) + 2.52 \times 0.776 \times (1.1290 - 1.041) = 1.172 \\ \therefore \ell &= \frac{1.172}{1/1000} = 1172\text{ m} \end{aligned}$$

同様にして $h = 3\text{ m}$ を仮定すると $\ell = 2172\text{ m}$, $h = 2.2\text{ m}$ を仮定すると $\ell = 2972\text{ m}$, $h = 2.17\text{ m}$ を仮定すると $\ell = 3002.13\text{ m}$ となります。したがって河口から 3000 m のところでの水深は $h \doteq 2.2\text{ m}$ と計算されます。

<注> 逐次近似法であるニュートン・ラプソン法⁵³で計算してみると。。。。

エクセルで関数入力しやすいように Bressue の公式を次式のように書き換えておきます。

$$i\ell = h_1 - h + h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{h_c}{h_0} \right)^3 \right\} [\phi(h) - \phi(h_1)] \quad (10.65)$$

$$\phi(h) = \frac{1}{6} \ln \frac{h^2 + hh_0 + h_0^2}{(h - h_0)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2h + h_0}{\sqrt{3}h_0}$$

求める h を x に書き換えて, $i = 1/1000$, $\ell = 3000$, $h_1 = 5$, $h_c = 1.53$ を上式に入れると

$$\begin{aligned} 3 &= 5 - x + 2.52 \times 0.776 \times \left(\frac{1}{6} \ln \frac{x^2 + 2.52x + 2.52^2}{(x - 2.52)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x + 2.52}{\sqrt{3} \times 2.52} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \ln \frac{5^2 + 5 \times 2.52 + 2.52^2}{(5 - 2.52)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 \times 5 + 2.52}{\sqrt{3} \times 2.52} \right) \end{aligned} \quad (10.66)$$

となり, NR 法のマクロに書き込む代数方程式 $f(x) = 0$ の式とすべくこれを整理すると

$$\begin{aligned} f &= x + 0.036 - 1.956 * ((1/6) * \text{Log}((x^2 + 2.52 * x + 2.52^2)/(x - 2.52)^2)) \\ &\quad - (1.956/\text{Sqr}(3)) * \text{Atn}((2 * x + 2.52)/(\text{Sqr}(3) * 2.52)) \end{aligned} \quad (10.67)$$

となります。Log, Atn は Excel VBA の関数。Calc ボタンを押せば $x = 2.873 \doteq 2.9\text{ m}$ と得, この値は問題が掲載されている本間仁「改定三版・標準水理学」の解答結果と一致します。上で逐一手計算して得た答え $x = 2.2\text{ m}$ と異なる結果となりましたが, 恐らく手計算のどこかがおかしいのでしょうか。どなたか検証されたらその結果を掲示板にでも書き込んで頂くとありがたいです。(23.9.27 追記)

⁵³ 数学のコーナーの「Excel VBA を使った数値解析」のところにニュートン・ラプソン法 (NR 法) が載っています。

参考文献

- [1] 日下部重幸，檀和秀，湯城 豊勝「水理学」コロナ社，2009
- [2] 鈴木幸一「水理学演習」森北出版，1996
- [3] 篠田成郎，藤田一郎，小島利治，實 馨「事例・演習でよく分かる水理学」コロナ社，2019
- [4] 米元卓介，岩崎敏夫「水理学例題演習」コロナ社,1989
- [5] 有田正光「水理学の基礎」東京電機大学出版局，2014
- [6] 日野幹雄「明解水理学」丸善出版，平成 10 年