連続の式

KENZOU

2015.10.25

第１話. 連続の式の導出

■流れの状態と流体の種類

本論に入る前に，流体の流れと特性について復習しておきます。
流れには，**定常流**と**非定常流**の２種類があり，特性としては**圧縮性流体**と**非圧縮性流体**，**粘性流体**と**非粘性流体**，**完全流体**の５種類がありました。それぞれの特長を以下に挙げておきます。

流体の流れ
- **定常流**　：　流速，圧力，密度などで表される流れの状態が時間的に変化しない
- **非定常流**　：　流れの状態が時間とともに変わる

流体の種類
- **圧縮性流体**　：　気体のように圧力によって密度が変化する
- **非圧縮性流体**　：　液体のように密度が一定の流体（$\rho = \mathtt{const}$）
- **粘性流体**　：　粘性のある流体
- **非粘性流体**　：　粘性のない流体
- **完全流体**　：　粘性も圧縮性もない理想的な流体

なお，圧縮性流体のことを**縮む流体**，非圧縮性流体のことを**縮まない流体**ともいいます。

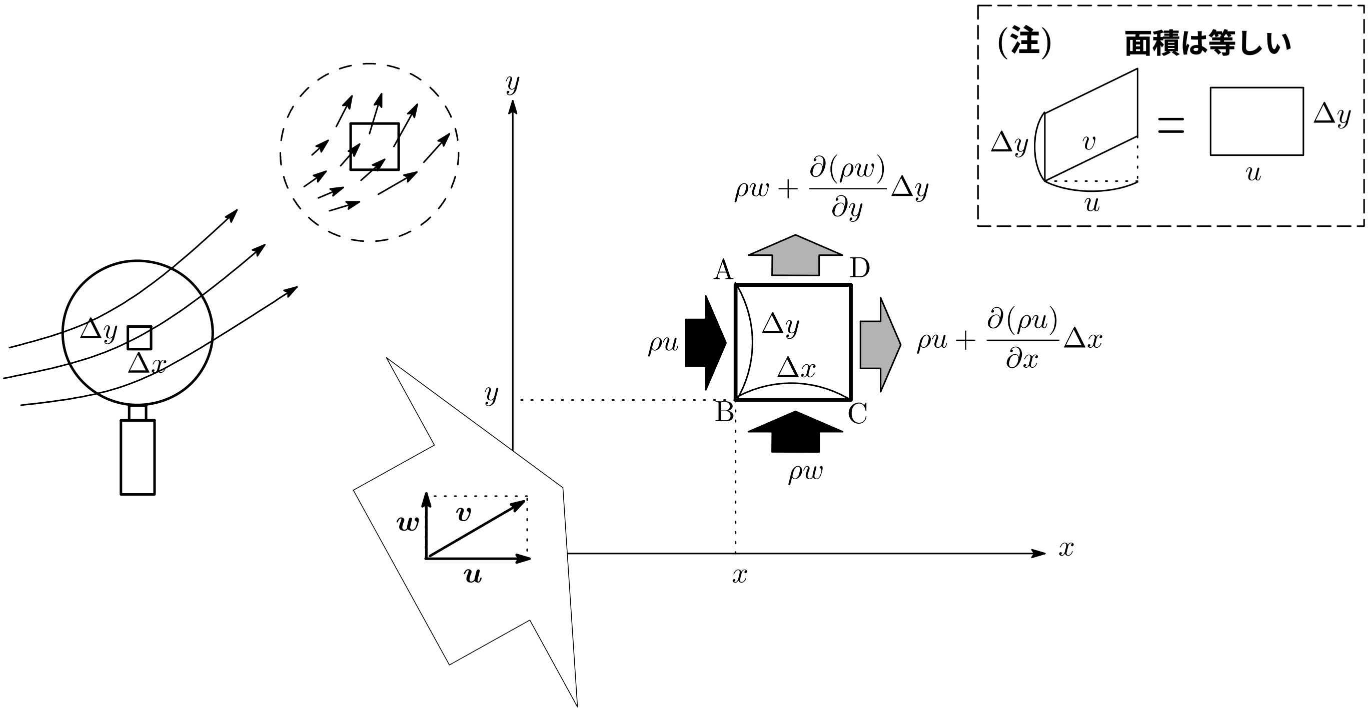
さて，連続の式は別名**質量保存則**ともいわれます。質量保存則とは流体中に適当な閉じた固定領域Ｓを考え，領域Ｓ内の

（単位時間当たりの）質量増加量＝流入した質量－流出した質量

が成り立つことです。連続の式は流体力学だけでなく，電磁気学や量子力学でも登場する基本的で重要な式ですので，第１話は「連続の式」について，微分形と積分形の２つの形式でわかりやすくお話をします。

■連続の式（微分形）

話を分かりやすくするため 2 次元の流れを考えます（3 次元への拡張は容易）。流れの適当な位置に，縦・横 Δx, Δy，奥行きが 1 の微小な立方体 ABCD を考え，この立方体への流体の出入りについて考えます。流体の密度 ρ，流速 $\boldsymbol{v}$ は時間と空間の関数としておきます。$\rho = \rho(x, y, t)$，流速 $\boldsymbol{v}$ の x, y 成分をそれぞれ $u = u(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ とします。



●流入する質量

微小立方体に Δt 時間に流入してくる流体の質量を求めます。流体は AB 面と BC 面から流入してきます。AB 面から流入してくる流体の体積は x 軸方向の速度成分 u に面積 $\Delta y \times 1$ をかけたものでになり，流入質量はこれに ρ をかけて

$$\rho u \times \Delta y \times 1 \times \Delta t = \rho u \Delta y \Delta t \tag{1.1}$$

Δt 時間に AB 面から流入する質量

同様に BC 面から流入してくる流体の質量は,

$$\rho w \times \Delta x \times 1 \times \Delta t = \rho w \Delta x \Delta t \tag{1.2}$$

Δt 時間に BC 面から流入する質量

全体ではこれらの和になるので

$$\textbf{流入する流体の質量：}\quad \rho u \Delta y \Delta t + \rho w \Delta x \Delta t = (\rho u \Delta y + \rho w \Delta x)\Delta t \tag{1.3}$$

となります。

●流出する質量

次に，対向面CD，ADから流出する流体の質量を求めます。AB，BC面から微小距離Δx, Δy離れた面でのx, y軸方向の速度成分はそれぞれ$u(x+\Delta x,t)$, $w(y+\Delta y,t)$，同様に密度は$\rho(x+\Delta x,t)$, $\rho(y+\Delta y,t)$となります。Δx, Δyは微小距離なので，速度と密度をテイラー展開して1次の項までとると

$$\begin{aligned}
\textbf{CD 面での速さ：}\quad & u(x+\Delta x,t)=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\\
\text{〃}\qquad \textbf{密度：}\quad & \rho(x+\Delta x,t)=\rho(x,t)+\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\\
\textbf{AD 面での速さ：}\quad & w(y+\Delta y,t)=w(y,t)+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y\\
\text{〃}\qquad \textbf{密度：}\quad & \rho(y+\Delta y,t)=\rho(y,t)+\frac{\partial \rho}{\partial y}\Delta x
\end{aligned}$$

となります。したがってCD面からΔt時間に流出する流体の質量は

$$\begin{aligned}
\textbf{CD 面流出質量:}\quad & \rho(x+\Delta x,y,t)u(x+\Delta x,t)\times\Delta y\times 1\times\Delta t\\
&=\left(\rho+\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta t\\
&=\left(\rho u+u\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial \rho}{\partial x}\rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x^2\right)\Delta y\Delta t\\
&\doteqdot\left(\rho u+u\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x+\rho\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta t\\
&=\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta t \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

同様にAD面から流出する質量は

$$\begin{aligned}
\textbf{AD 面流出質量：}\quad & \rho(x,y+\Delta y,t)w(y+\Delta y,t)\times\Delta x\times 1\times\Delta t\\
&\doteqdot\left(\rho v+\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta t \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

したがって，この両面から流出する総質量は

$$\textbf{流出質量：}\quad \left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta t+\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta t \qquad (1.6)$$

となります。Δt時間に微小立方体ABCDに流入する流体と流出する流体の質量の差引勘定をΔM(=流入質量－流出質量)とすると，これは(1.3)から(1.6)を差し引いたものですから

Δt 時間の差引勘定：

$$\begin{aligned}
\Delta M&=(\rho u\Delta y+\rho w\Delta x)\Delta t-\left\{\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta t+\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta t\right\}\\
&=-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\Delta t \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

となります。$\Delta M > 0$ なら微小立方体内の流体の質量は増加し，$\Delta M < 0$ なら微小立方体内の流体の質量は減少することになります。

●連続の式

微小立方体内の流体の質量は $\rho\Delta x\Delta y$ で与えられます[1]。Δt 時間後の密度は $\rho(t+\Delta t)$ となるので，質量は

$$\rho(t+\Delta t)\Delta x\Delta y = \rho\Delta x\Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t = \rho\Delta x\Delta y + \Delta m, \qquad \Delta m = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t \tag{1.8}$$

Δm は Δt 時間での質量変化となります。微小立方体内で湧き出し，吸い込みがない場合，(1.7) の ΔM は Δm と等しくならなければなりません。

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\Delta t = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t$$

両辺を $\Delta x\Delta y\Delta t$ で割って整理すると，次の 2 次元流れの**連続の式**が得られます。

$$\textbf{連続の式：}\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0 \tag{1.9}$$

定常流では ρ の時間変化がないので (1.9) の左辺第 1 項が 0 となり，

$$\textbf{定常流：}\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0 \tag{1.10}$$

非圧縮性流体では $\rho = \mathtt{const}$ なので，$\partial\rho/\partial t = 0$，さらに ρ で割ると連続の式は

$$\textbf{非圧縮性流体：}\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1.11}$$

となります。

3 次元流体の連続の式への拡張は流速を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ として

$$\textbf{連続の式：}\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{1.12}$$

となります。ベクトル形式では $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を x, y, z 軸方向の単位ベクトルとすると

$$\textbf{連続の式}\begin{cases} \textbf{連続の式} & : \ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \textbf{定常流} & : \ \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\ \textbf{非圧縮性流体} & : \ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\ \textbf{完全流体} & : \ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

と表されます。

---
[1] ここでの密度 ρ は微小立方体内の平均密度とします。

■連続の式（積分形）

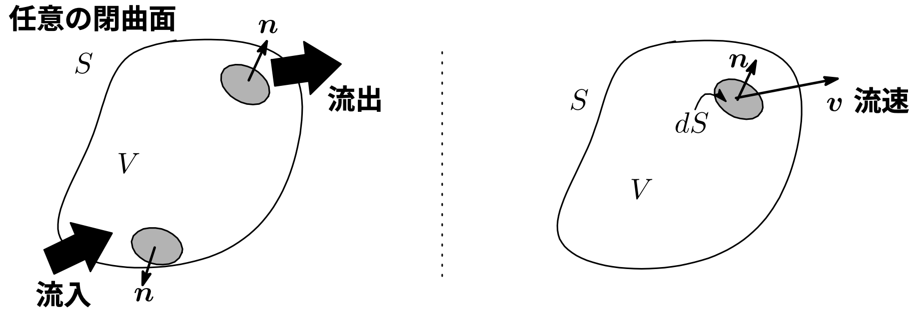
(1) では微小立方体 ABCD を考えましたが，ここでは空間に固定した任意の閉曲面 S を考え，その体積を V とします。流体は閉曲面を通して流出入します。閉曲面に含まれる質量は

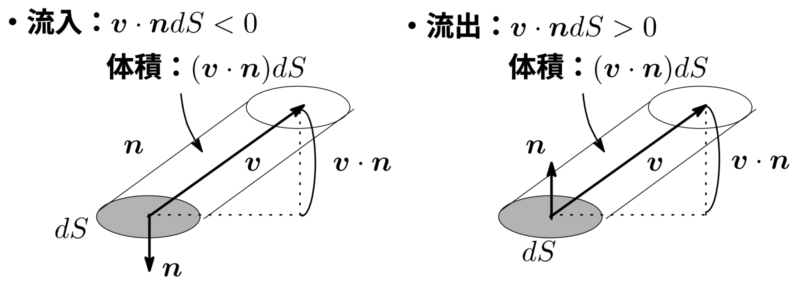
$$\textbf{閉曲面内の流体の質量：}\int \rho dV \tag{1.14}$$

で，単位時間当たりの質量変化は

$$\textbf{単位時間当たりの質量変化：}\frac{d}{dt}\int \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{1.15}$$

閉曲面 S 上の任意の微小面積を dS とし，dS に垂直な外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします。





流体の流入・流出は閉曲面 S を通して出入りし，流速 $\boldsymbol{v}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積が正の場合は流出，負の場合は流入になります。

$$\textbf{流入：}\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} < 0$$

$$\textbf{流出：}\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} > 0$$

結局，$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を閉曲面の全表面にわたって積分した $\int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS$ は，流出質量から流入質量を差し引いた量になります。

$$\textbf{流出質量－流入質量} = \int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{1.16}$$

したがって，保存式は

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S (\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{1.17}$$

ここで面積分を体積積分に変換するガウスの公式（発散定理）

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV$$

を使うと (1.16) は

$$\int_S (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) dV \tag{1.18}$$

となるので，(1.17) に入れて整理すると

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V (\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) dV$$

$$\therefore \quad \int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{v} \right\} dV = 0 \tag{1.19}$$

体積 V は任意の閉曲面なので，上式が成り立つには被積分関数が恒等的に 0 でなければなりません。これから (1.13) と同じ連続の式が得られます。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.20}$$

※蛇足：

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$

第 1 話終わり