流れの記述

$\mathcal{KENZOU}$

2015.10.30

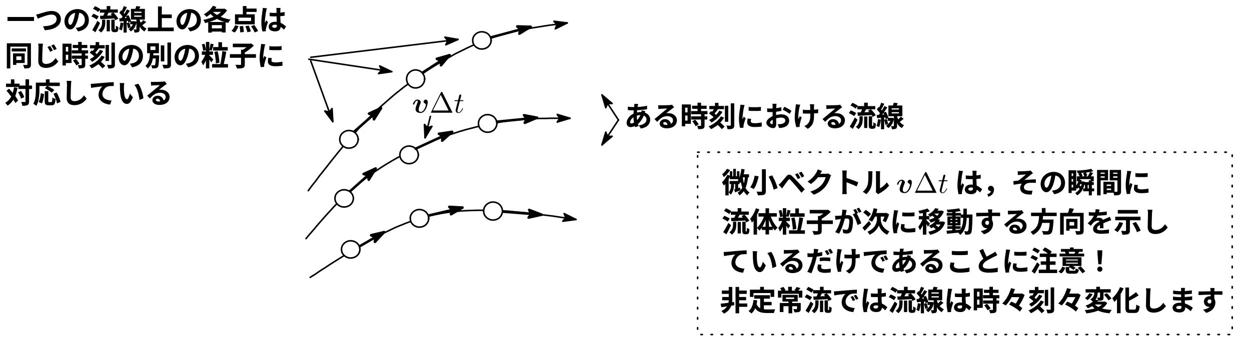
第 2 話.　流れの可視化

■流れを視覚的に表す方法

ゆく河の流れは絶えずして、しかももとの水にあらず。
淀みに浮かぶうたかたは、かつ消えかつ結びて、久しくとどまりたるためしなし。

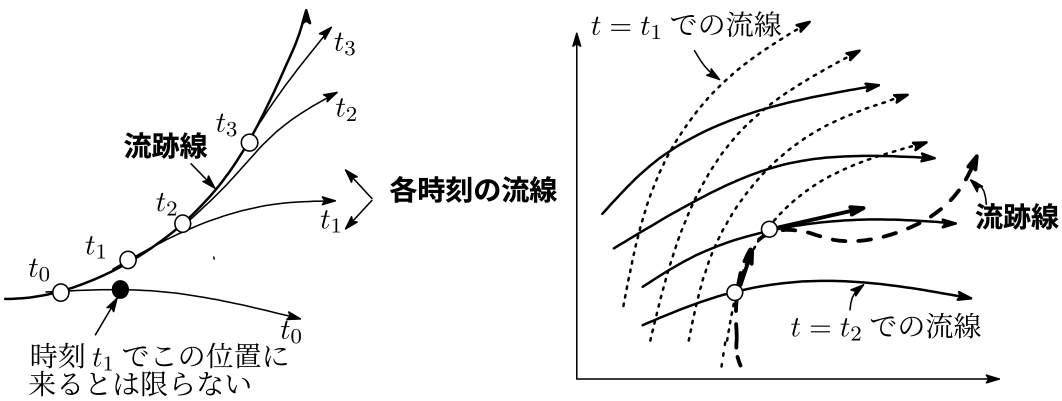
これはどなたもよくご存じの方丈記の有名な一節です。鴨長明も河の流れをよく見ていたのでしょうか。穏やかな流れもあれば急流のような複雑な流れもあります。流れを視覚的に表すことができれば流れを理解する際に大変便利です。この方法として流線，流跡線（流跡），流線脈（流条線）というのがあります。

- **流線** (**Stream line**)：各瞬間ごとの各点における速度ベクトルが接線の方向となる曲線で，流線は互いに交差しない。
  流れている水の表面にアルミニュームの粉末を散布して Δt の短い露出時間で写真を撮ると，散布された粉末はそれぞれ短い線分（$ds = \boldsymbol{v}\Delta t$ という微小ベクトル）として写るので，それらの線分を連ねる曲線として無数の流線が現れます。流線が時間とともに変化しない流れを「定常流」，時々刻々と変化する流れを「非定常流」といいます。

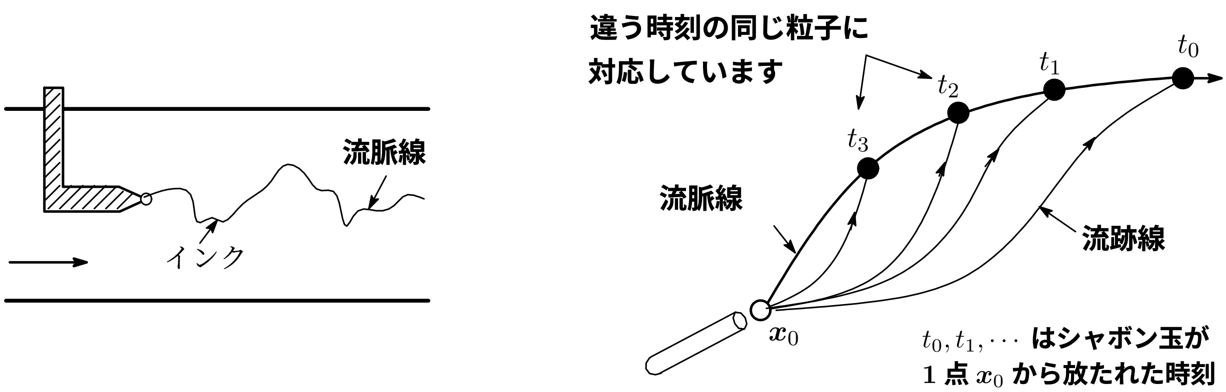


- **流跡線 (Path line)**：1点から出発した“ 一つの流体粒子 ”の動いた軌跡で，定常流では流線に一致する。
  流れが「非定常流」の場合は、流体粒子が“ ある瞬間に描かれた流線 ”に沿って動いていくとは限りません。したがって，流体粒子が次の瞬間に動いていく流跡線は，ある瞬間の流線とは必ずしも一致しません。ただし，流線が時間的に変化しない定常流の場合には流線と流跡線は一致します。流跡線は「流れの道筋」ともいわれます。第3話でお話しするラグランジュの方法のところで再登場しますのでお楽しみに！

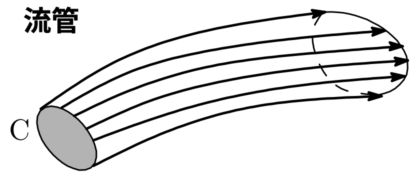
●流跡線と流線
非定常流では流線は時々刻々変化します。流体粒子は時々刻々異なる流線に乗り換えて移動していきます。流体粒子の移動の軌跡を流跡線といいます。



- **流脈線 (Streak line)**：流れに中の同一点を通過した“ 複数の流体粒子 ”のある時刻 t において到達した点を結んでできる曲線。
  例えば1点からインクなどを流し続けたときに作られる曲線や，シャボン玉を連続的に放った際の一連のシャボン玉の並びが形成する一本の線などが流脈線です。非定常流では流体粒子は流脈線上を移動していきません。ただし，定常流では流線，流跡線，流脈線はすべて一致することから，流脈線は「色つき流線」ともいわれます。



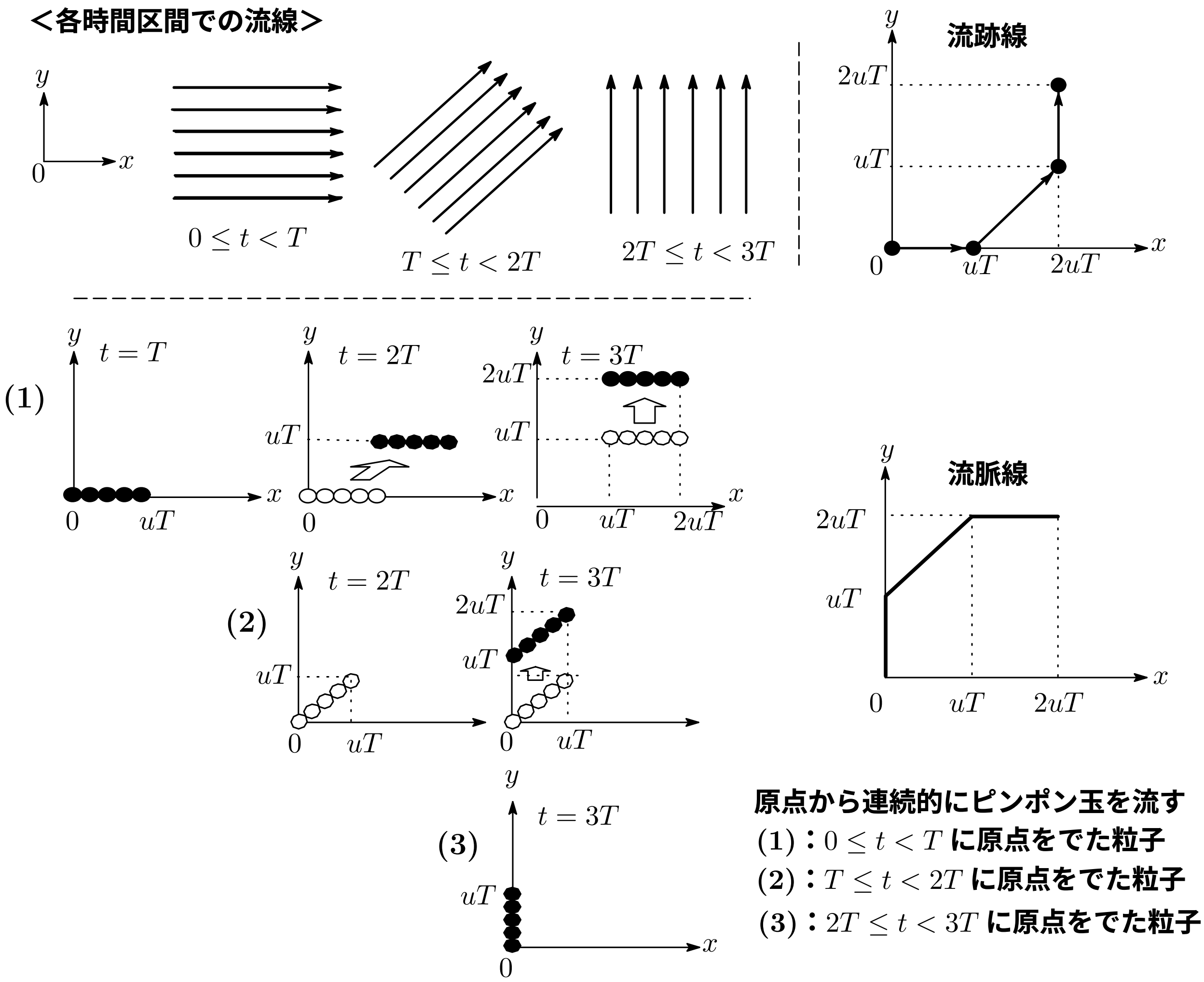
- **流管 (Stream tube)**：流体中に任意の閉曲線 C をとり，その曲線上の各点を通る流線によって作られる管。
  流管は流線の壁からなる一つの管です。定常流では流管の形は時間的に変わりませんが，非定常流の場合は時々刻々変化します。



たとえば次のような $\boldsymbol{v}$ の速度場があるとして，流線，流跡線，流脈線を描いてみましょう。

$$0 \leqq t < T:(u,0),\quad T \leqq t < 2T:(u,u),\quad 2T \leqq t < 3T:(0,u),\quad 3T \leqq t:(0,0)$$

各区間時間での流線と流跡線, 流脈線はは下図のようになります。



■流線，流跡線の数学的な取り扱い

流線や流跡線の数学的な取り扱いのお話しです。

（1）流線の微分方程式

流線の微小線分ベクトルを $d\boldsymbol{s}$ とすると，$d\boldsymbol{s}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ と平行です。

$$d\boldsymbol{s} /\!/ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.1}$$

$d\boldsymbol{s}=(dx,dy,dz)$, $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ とし，k を適当な実数とすると

$$dx=ku(\boldsymbol{x},t), \quad dy=kv(\boldsymbol{x},t), \quad dz=kw(\boldsymbol{x},t)$$

とおけるので，**流線の微分方程式**として

$$\frac{dx}{u(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dy}{v(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dz}{w(\boldsymbol{x},t)} \tag{2.2}$$

が得られます。ある時刻 t での流線は (2.2) を t を一定として積分することで求められます[1]。

（2）流跡線の微分方程式

さて，いま一つの流体粒子が微小時間 dt の間に $d\boldsymbol{s}$ だけ動いたとすると

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)dt \qquad \therefore\ dx=u(\boldsymbol{x},t)dt,\ dy=v(\boldsymbol{x},t)dt,\ dz=w(\boldsymbol{x},t)dt \tag{2.3}$$

の関係が成立するので，これから

$$\frac{dx}{u(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dy}{v(\boldsymbol{x},t)}=\frac{dz}{w(\boldsymbol{x},t)}=dt \tag{2.4}$$

が得られます。あるいは，これを書き換えて

$$\frac{dx}{dt}=u(\boldsymbol{x},t), \quad \frac{dy}{dt}=v(\boldsymbol{x},t), \quad \frac{dz}{dt}=w(\boldsymbol{x},t) \tag{2.5}$$

(2.4) と (2.2) は形が似ていますが実質的には異なります[2]。一般に粒子は流線に沿って移動するわけではありません。(2.4) は**流跡線**を表す微分方程式で，速度成分 u,v,w が位置と時間の関数で与えられれば，(2.5) の 3 個の常微分方程式を解くことで粒子の道筋が得られます。なお，定常流では，速度 $\boldsymbol{v}$ は t を含まず位置 $\boldsymbol{x}$ だけの関数となるので，(2.4) は (2.2) と全く同じ方程式となり，定常流では粒子は流線に沿って移動することになります。

---

[1]ただし，定常流では速度成分は t の関数ではなありません。

[2]流線は各瞬間における流れの方向を示す曲線で，流れの道筋は流体粒子が時間の経過とともに描く軌道。

例題１． 2 次元定常流れの速度成分が $u = Ax,\ v = -Ay$ で与えられるとき，流線を求めよ。
[**解答**] 流線の微分方程式は

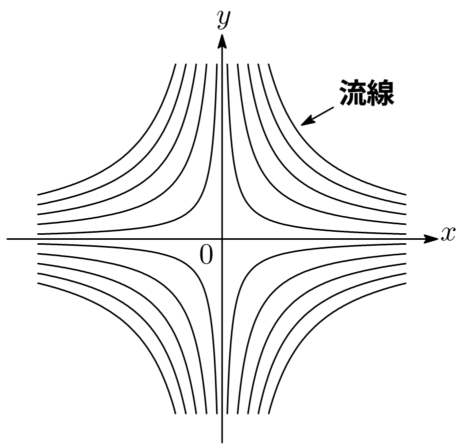
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{Ax} = -\frac{dy}{Ay}$$

これを積分して

$$\frac{1}{A}\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{A}\int \frac{1}{y}dy, \quad \therefore\ \log x = -\log y + C\ (\text{積分定数})$$

これから

$$xy = \texttt{const}$$



流線は x, y 軸を漸近線とする双曲線となります。

例題２． 2 次元流れの速度成分 u, v が次式で与えられるとき，流線と流跡線，流脈線を求めよ。

$$u = U_0, \quad v = V_0 \cos(kx - \omega t)$$

[**解答**] 流線の微分方程式は

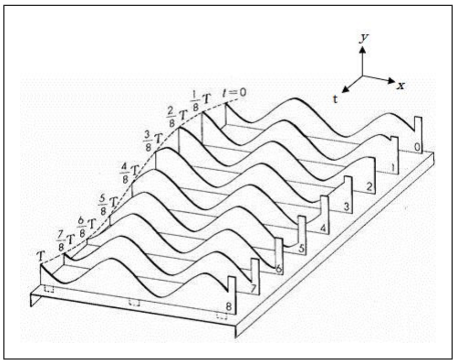
$$\frac{dx}{U_0} = \frac{dy}{V_0 \cos(kx - \omega t)} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V_0}{U_0}\cos(kx - \omega t)$$

t を一定とみて x で積分すると流線の式が得られます。

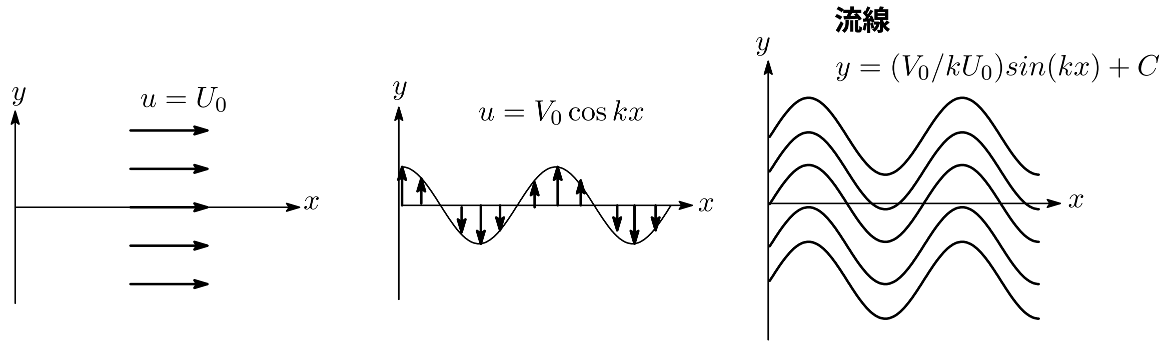
$$\int dy = \frac{V_0}{U_0}\int \cos(kx - \omega t)dx$$

$$\therefore\ \ y = \frac{V_0}{kU_0}\sin(kx - \omega t) + C \tag{2.6}$$

C は積分定数。時々刻々変化する流線のイメージは下図のようでしょうか。



$\omega = 0$ の場合（定常流）の流れの成分と流線は下図のようになります。



次に流跡線の微分方程式は

$$\frac{dx}{U_0} = \frac{dy}{V_0 \cos(kx - \omega t)} = dt \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = U_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = V_0 \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

第 1 式より

$$x = U_0 t + C_1 \tag{2.7}$$

これを第 2 式に入れて t について積分すると。

$$\frac{dy}{dt} = V_0 \cos\left[k(U_0 - \omega)t + kC_1\right]$$
$$\therefore \quad y = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin\left[(kU_0 - \omega)t + kC_1\right] + C_2 \tag{2.8}$$

が得られます。(2.7), (2.8) は時間 t をパラメーターとする流跡線の式です。この 2 式から t を消去すると

$$y = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin\left[\left(k - \frac{\omega}{U_0}\right) x + \frac{\omega}{U_0} C_1\right] + C_2 \tag{2.9}$$

が得られます。$\omega=0$ の定常流の場合は，流線 (2.6) と流跡線 (2.9) は一致します。

最後に原点 $(0,0)$ を通る流脈線を求めます。(2.9) のうち時刻 $t=\tau$ で原点（$x=y=0$）を通過する流跡線は (2.7)，(2.8) より

$$
\begin{aligned}
0 &= U_0\tau + C_1 \\
0 &= -\frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\omega\tau + C_2
\end{aligned}
$$

を満たします。これから積分定数 C_1, C_2 は

$$
C_1 = -U_0\tau, \quad , C_2 = \frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\omega\tau
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
x &= U_0(t-\tau) \\
y &= \frac{V_0}{kU_0-\omega}\sin\left[(kU_0-\omega)t + kC_1\right] + C_2 \\
&= \frac{V_0}{kU_0-\omega}\left\{\sin(kU_0(t-\tau)-\omega t) + \sin\omega\tau\right\}
\end{aligned}
$$

これが原点を通過する時刻 τ をパラメーターとした流脈線の式です。時刻 t における流脈線はこの両式から τ 消去すればいいので，第 1 式より

$$
\tau = t - x/U_0
$$

これを第 2 式に入れて

$$
y = \frac{V_0}{kU_0-\omega}\left\{\sin(kx-\omega t) - \sin\left[\omega\left(\frac{x}{U_0}-t\right)\right]\right\}
$$

となります。

例題 3. 2 次元流れの速度成分が $u=t,\, v=1$ で与えられるとき，流線，流跡線，流脈線を求めよ。

[**解答**] 流線の微分方程式は

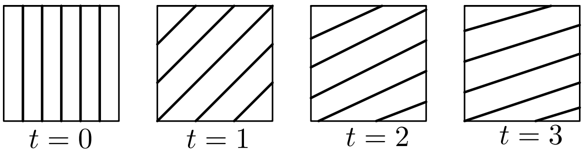
$$
\frac{dx}{t} = \frac{dy}{1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}
$$

t を一定とみて x で積分すると流線の式として

$$
y = \frac{1}{t}x + C
$$

が得られます。時間を追って流線を見ていくと，$t=0,1,2,3$ の流線は

$u = t,\, v = 1$ **の流線**



次に流跡線の微分方程式は

$$\frac{dx}{t} = dy = dt \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

t で積分すると t をパラメーターとした流跡線の式が得られます。

$$x = \frac{1}{2}t^2 + C_1, \quad y = t + C_2, \qquad (C_1, C_2\text{: 積分定数}) \tag{2.10}$$

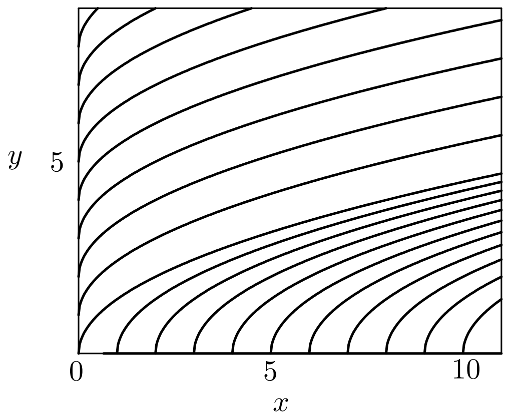
両式から t を消去すると

$$x = \frac{1}{2}(y - C_2)^2 + C_1$$

これは C_1, C_2 を頂点とする放物線になります[3]。

流跡線

$t=0$ で x 軸上，y 軸上にあった流体の流跡線



最後に原点 $(0,0)$ を通る流脈線を求めます。時刻 τ で原点（$x = y = 0$）を通過する流脈線の積分定数は

$$0 = \frac{1}{2}\tau^2 + C_1, \quad 0 = \tau + C_2, \qquad \therefore\ C_1 = -(1/2)\tau^2,\ C_2 = -\tau$$

したがって，τ をパラメータとする流脈線の式は

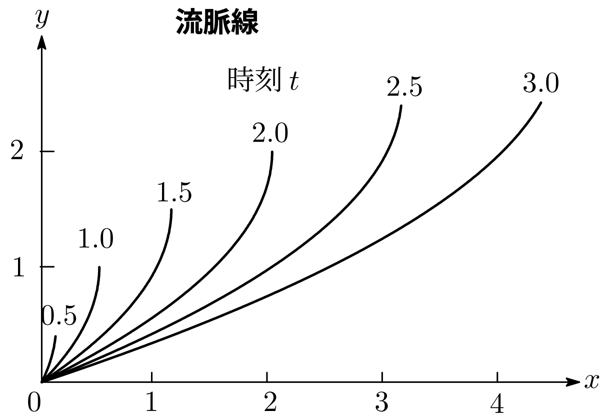
$$x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\tau^2, \quad y = t - \tau$$

[3] **蛇足**：質点の力学での斜方投射の運動とよく似ていますね。y 軸方向は等加速度運動 $v_y = at$，x 軸方向は等速運動 $v_x = \mathrm{const}$ で，質点の飛行軌跡は放物線となりました。

時刻 t における流脈線はこの両式より τ を消去して

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + ty$$

これは放物線ですね。$t = 0.5,\ 1.0,\ 1.5, \cdots$ とした場合の流脈線を下図に示します。



第 2 話終わり