ラグランジュの方法・オイラーの方法と流体の運動方程式

KENZOU

2015.11.02

第3話. ラグランジュの方法とオイラーの方法

日本物理学会50周年記念(第51巻11号, 1996)の特集号に，今井功先生が「ある流体物理屋の軌跡」という一文を寄稿されていますので，冒頭の文章を少し引用してみましょう。

> **＝Lagrange 的見方と Euler 的見方＝**
>
> 流体力学は水・油・空気など流体の運動とそれに関連する力学現象を対象とする。その考察の方法には，大まかにいって，Lagrange 的な見方と Euler 的な見方の二通りがある。前者は，流体をそれを構成する粒子の集団とみなし，各粒子の行う運動の総合結果として流体の運動を理解しようとする立場である。これに対して後者は，流体の運動を4次元空間 (x, y, z, t) の現象としてとらえる立場，すなわち，流体を一望のもとに見渡し，流体内の各点 $r(x, y, z)$ での流速が時間的にどう変化するかを追求する立場である。この Euler 的な見方は「場の理論」の原形をなすもので，数理解析の手法の適用が便利に行えるために，現在，流体力学の研究はもっぱらこの立場で行われている。

「場」というのは空間に分布している物理量であると定義できます。例えば速度が空間の各点で異なった値をとる，いいかえると速度が空間の各点の関数とみなせる場合，それを「速度場」といいます[1]。場に分布する物理量が大きさだけをもつスカラー量であればスカラー場、大きさと向きをもつベクトル量であればベクトル場などともいいます。

さて，第3話では流体の運動状態を表す方法として，**ラグランジュの方法**と**オイラーの方法**についてのお話をすることにします。流体の運動を考える場合一つの流体の塊（流体粒子）だけを取りだしてその運動を考えていけばよさそうですが，流体は空間全体を満たしており，

[1]速度場が時間 t に依存するものであれば，位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t の関数になります。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$

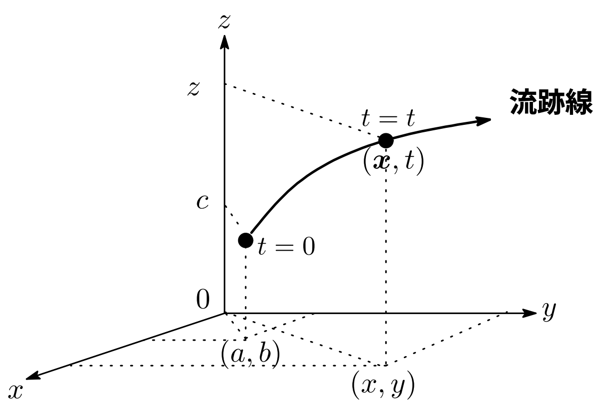
注目する流体粒子の運動とそれ作用する力はそれをとり囲むまわりの流体の運動に左右されるので，質点系の力学での取り扱いのようなわけにはいきません。ラグランジュの方法とかオイラーの方法というのは，このような連続している流体の運動を取り扱う方法です。

■ラグランジュの方法と運動方程式

（1）ラグランジュの方法

ラグランジュの方法というのは流体を微小な部分に分けて，それぞれの領域の一つ一つを流体粒子とみなし[2]，時間的に変化していく各粒子の運動を追跡することで流体の運動を調べていこうという方法です。なじみ深い質点の力学とおなじ考え方です。

ある流体粒子が時刻 t_0 で座標 $\boldsymbol{x}_0 = (a, b, c)$ の位置にあり，それが時刻 t で $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ の位置を占めたとします。流体粒子の軌跡は第2話でお話した流跡線ですので，$\boldsymbol{x}$ は初期位置 $\boldsymbol{x}_0$ と時間 t の関数として



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) = \boldsymbol{x}(a, b, c, t) = \begin{cases} x(a, b, c, t) \\ y(a, b, c, t) \\ z(a, b, c, t) \end{cases}$$

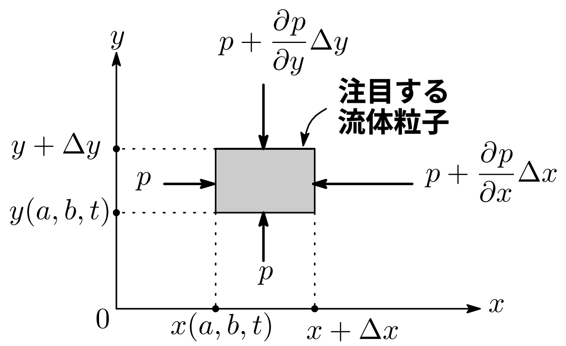
と表せます。独立変数は a, b, c と時間 t で $\boldsymbol{x}$ は従属変数となります。$t = 0$ において $\boldsymbol{x}_0 = (a, b, c)$ という位置にいた流体粒子の名前を (a, b, c) と名付け，(a, b, c) を**物質座標**といいます。これは注目する粒子に付けたラベルです。一つの流体粒子にのみ注目すれば，物質座標 (a, b, c) はこの粒子に固有の値なので位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ は時間 t のみの関数となります。したがって，注目する粒子の速度 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ や加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{a,b,c}, \quad \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{a,b,c} = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\right)_{a,b,c} \tag{3.1}$$

と表すことができます。下付き添え字 a, b, c は注目する一つの流体粒子を意味します。

（2）ラグランジュの運動方程式

次にラグランジュの方法に従って粘性のない2次元完全流体の運動方程式を考えます。完全流体では流体粒子に働く力は，境界面に垂直な圧力 p



[2]流体は流体粒子が集まったものと考えます。

と重力などの体積力 $\boldsymbol{K} = (X, Y)$ だけですから，
運動方程式は，ρ を密度として

$$\begin{cases} \rho\Delta x\Delta y\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \rho\Delta x\Delta y X - \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \\ \rho\Delta x\Delta y\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho\Delta x\Delta y Y - \left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \end{cases}$$

と表せます。ここで左辺の偏微分の下添え字 (a, b) は省略しています。両辺を $\rho\Delta x\Delta y$ で割って

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \tag{3.2}$$

ラグランジュの方法では物質座標 a, b と時間 t を独立変数とするので，(3.2) を物質座標 a, b と時間 t を独立変数とする微分係数で書き直します。第 1，2 式にそれぞれ $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$ をかけて加え合わせ，同じように第 1，2 式にそれぞれ $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$ をかけて加え合わせると次の 2 式が得られます。

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial a} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial b} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial b} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} \end{cases} \tag{3.3}$$

これが完全流体の**ラグランジュの運動方程式**です。

4 個の未知数 x, y, p, ρ に対して方程式は 2 個なので，運動方程式を解くにはあと 2 個の方程式が必要になります。ρ が一定の「縮まない流体」の場合では，未知数が 3 個になるので (3.3) と「連続の式」より x, y, p を a, b, t の関数として表すことができます。また，ρ が変化する「縮む流体」の場合，とくに**バロトロピー流**(barotoropic flow) の場合は，(3.3) と連続の式にバロトロピーの関係式 $\rho = f(p)$ を加えて，4 個の未知数 x, y, p, ρ を a, b, t の関数として表すことができます。

ラグランジュの運動方程式は物質座標に関しては 1 階の偏微分方程式ですが，時間 t に関しては 2 階の偏微分係数を含み，しかも $(\partial^2 x/\partial t^2)\cdot(\partial x/\partial a)$ のような項まで含むので実際に解くのは難しく，このことから次に説明するオイラーの方法が用いられるのが一般的です。

[**注**] 3 次元の場合のラグランジュの運動方程式は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial a} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial a} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial b} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial b} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial b} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} \\ \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial x}{\partial c} + \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial y}{\partial c} + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial z}{\partial c} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial c} \end{cases}$$

となります。まとめて書くと

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} - K_j\right)\frac{\partial x_i}{\partial a_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a_i}$$

ただし，$(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c), \quad (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \quad (K_1, K_2, K_3) = (X, Y, Z) \quad //$

この項の最後に，バロトロピー流体で外力 $\boldsymbol{K} = (X, Y)$ が保存力である場合のラグランジュの運動方程式を取りあげておきます。ポテンシャルを $\Omega(a, b, t)$ とすると $\boldsymbol{K} = -\nabla\Omega$ より

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

また

$$X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial a}$$

$$X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial b}$$

となるので，(3.3) は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial a} = -\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial a}(P + \Omega) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial b} = -\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial b}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial b}(P + \Omega) \end{cases} \tag{3.4}$$

と表せます。ただし，P は次式で定義される圧力関数と呼ばれるものです。

$$dP = \frac{dp}{\rho} \quad \longrightarrow \quad P = \int^p \frac{dp}{\rho} \tag{3.5}$$

(3.4) からは「ラグランジュの渦定理」が導かれますが，ここでは省略します。詳しい内容は今井功「流体力学（前編）」P.76 を参照ください。

■オイラーの方法と運動方程式

（1）オイラーの方法

オイラーの方法では空間の任意の位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を通過する流体粒子の運動に注目します。いわゆる「場」の立場です。ラグランジュの方法では物質座標 a, b, c と t が独立変数でしたが，オイラーの方法では位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t が独立変数となり，圧力 p や速度 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$，密度 ρ などの物理量 F は空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t の関数として $F(x, y, z, t)$ と表されます。したがって，物理量が**従属変数**となります。

さて，流体粒子のもつ物理量 F が流体の運動とともに時間的にどう変化するか，これを調べるために**流れに沿っての時間的変化を表す時間微分**を D/Dt という記号で表します。この時間微分を**ラグランジュ微分**[3]とか**物質微分**と呼んでいます。いま，1 つの物理量 F がオイラー

[3] DF/Dt は物質座標 (a, b, c) を一定にした時間微分で，ラグランジュの方法での時間微分です。

の方法で x, y, z, t の関数 $F(x, y, z, t)$ として与えられているとします。流速を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ として時刻 t で位置 x, y, z にいた流体粒子は微小時間 Δt の後には $(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$ の位置に移動しますが，その位置での物理量は

$$F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$$

と表されるので，移動前後の物理量の変化は

$$\Delta F = F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t)$$

で，単位時間当たりの平均変化率は $\Delta F/\Delta t$ となります。ここで，$\Delta t \to 0$ の極限をとったものを DF/Dt と書くと

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t) - F(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

右辺の分子をテイラー展開して Δt の 1 次の項までとると

$$\begin{aligned}\Delta F &= \left(F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}u\Delta t + \frac{\partial F}{\partial y}v\Delta t + \frac{\partial F}{\partial z}w\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\right) - F(x, y, z, t) \\ &= u\frac{\partial F}{\partial x}\Delta t + v\frac{\partial F}{\partial y}\Delta t + w\frac{\partial F}{\partial z}\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{DF}{Dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)F, \qquad \nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.6}$$

と表せます。F は任意の物理量なので (3.6) の両辺から F を外すと

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{3.7}$$

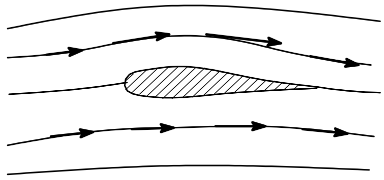
(3.7) の右辺の第 1 項は空間の 1 点を通過する流体粒子の同じ位置での物理量の時間変化を表し，**非定常項**と呼ばれます。第 2 項は同じ流体粒子が移動することで観測される物理量の変化を表し，**移流項**とか**対流項**[4]と呼ばれます。$F = \boldsymbol{v}$ とすると (3.6) より流体粒子の加速度成分は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \tag{3.8}$$

と表されます。

[4]流れに乗っての移動を一般に対流といいます。

右辺の第１項は流速が時間的に変動することにより生じる加速度で**局所加速度**といいます。第２項以下はまとめて**移流加速度**といい，流れに速度勾配 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$ がある場合，流体粒子の速度が空間の位置によって異なることによる加速度であると解釈できます[5]。



流れ場に分布する速度

（２）オイラーの運動方程式

ラグランジュの運動方程式のところで述べた完全流体を考えます。オイラーの運動方程式は

$$\begin{cases} \rho\Delta x\Delta y\dfrac{Du}{Dt} = \rho\Delta x\Delta y X - \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \\ \rho\Delta y\Delta y\dfrac{Dv}{Dt} = \rho\Delta x\Delta y Y - \left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \end{cases}$$

整理すると

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad \begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \tag{3.9}$$

これは次のようにも書けます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{3.10}$$

ただし，$\boldsymbol{v} = (u, v)$, $\boldsymbol{K} = (X, Y)$。未知数の数と方程式の数の帳尻合わせはラグランジュの運動方程式でやったのと同じです。

［補足］ (1) F として流体の位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ をとれば，$\boldsymbol{x}$ のラグランジュ微分は流速速度 $\boldsymbol{v}$ となります。

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial x} + v\frac{\partial x}{\partial y} + w\frac{\partial x}{\partial z} = u, \quad \text{同様に}\ \frac{Dy}{Dt} = v, \quad \frac{Dz}{Dt} = w, \quad \therefore\ \frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ のラグランジュ微分は上で見たように加速度 $\boldsymbol{a}$ となります。

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

(2) ラグランジュ微分 DF/Dt は物質座標 (a, b, c) を一定にしての時間微分です。物理量 $F(x, y, z, t)$ の変数 x, y, z は物質座標 (a, b, c) と時間 t の関数となるので

$$x = x(a, b, c, t),\ y = y(a, b, c, t),\ z = z(a, b, c, t)$$

[5] $u = u(x, y, z, t)$ とすれば，$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt$. これから $\frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$。$v, w$ についても同様。

と置けます。物理量 F のラグランジュ微分は合成関数の微分法より

$$\frac{D}{Dt}F(x,y,z,t) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{Dz}{Dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

と展開できます。この式に $Dx/Dt = u$, $Dy/Dt = v$, $Dz/Dt = w$ を入れると

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)F$$

これは (3.6) にほかなりません。

(3) 2 つの関数 $f(\boldsymbol{x},t)$ と $g(\boldsymbol{x},t)$ の積についてのラグランジュ微分は普通の時間微分と同じように

$$\frac{D(fg)}{Dt} = \frac{Df}{Dt}g + f\frac{Dg}{Dt}$$

と展開できます。

$$\begin{aligned}
\frac{D(fg)}{Dt} &= \frac{\partial(fg)}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(fg) \qquad \because\ \nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla f)g + f(\boldsymbol{v}\cdot\nabla g) \\
&= \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f\right)\right\}g + f\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla g\right)\right\} \\
&= \left(\frac{Df}{Dt}\right)g + f\left(\frac{Dg}{Dt}\right)
\end{aligned}$$

(4) 第 1 話で登場した連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

はラグランジュ微分を使えば

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

と表せます。

$$\because \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

(5) ラグランジュの方法とオイラーの方法の比較表

	ラグランジュの方法	**オイラーの方法**
独立変数	a, b, c, t	x, y, z, t
従属変数	$x, y, z; p, \rho, T, \cdots$	$u, v, w, : p, \rho, T, \cdots$
$\frac{D}{Dt}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

ラグランジュの方法では $\partial x/\partial t$（a, b, c を一定に保っての微分）は速度の x 成分を表しますが，オイラーの方法では $\partial x/\partial t$（x, y, z を一定に保っての微分）は 0 となります。時間微分 $\partial/\partial t$ もラグランジュ的に考える場合とオイラー的に考える場合とで意味が異なることに注意が必要です。//

（3）ベルヌイの定理

保存力場での定常的な流れ（$\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$）を考えます。ベクトル解析の公式

$$\nabla \boldsymbol{A}^2 = 2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

より

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) - \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

となるので，これを (3.10) に入れると

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{3.11}$$

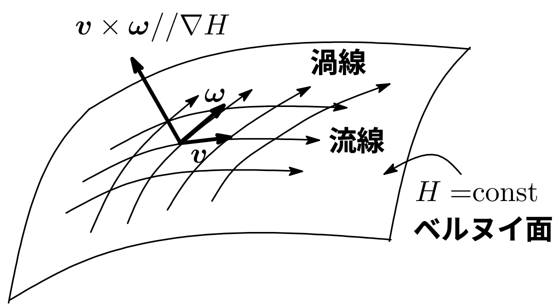
$\boldsymbol{\omega}$ は速度場 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ の回転を表す物理量で，**渦度**と呼んでいます。バロトロピー流体を考えると $\nabla P = \nabla p/\rho$ なので，(3.11) は $q \equiv \sqrt{\boldsymbol{v}^2}$ として

$$\nabla\left(\frac{1}{2}q^2 + P + \Omega\right) = \nabla H = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}, \quad H = \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega \tag{3.12}$$

となります。H をベルヌイ関数といい，$H = \mathtt{const}$ の曲面は流線と渦線が織りなす一つの曲面でこれを**ベルヌイ面**といいます。ベルヌイ面上では H が一定なので

$$H = \frac{1}{2}q^2 + P + \Omega = \mathtt{const} \tag{3.13}$$

(3.13) を**ベルヌイの定理**といいます。ベルヌイ関数 H の第 1 項 $q^2/2$ は単位質量あたりの運動エネルギー，第 3 項 Ω は単位質量あたりの位置エネルギーで，流線上[6]で H が一定に保たれるということは**エネルギー保存の法則**を意味していると考えれば，第 2 項の P は圧力[7]によって蓄えられる一種のポテンシャルエネルギーと解釈することができます。



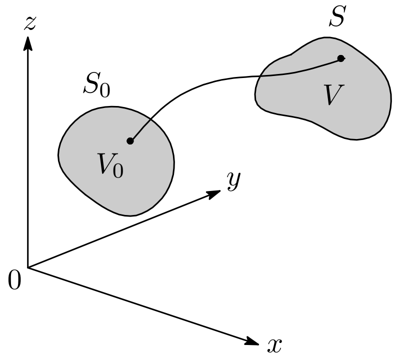
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

●おまけ：ラグランジュの連続方程式 (質量保存の法則)

第 1 話でお話した連続の式はオイラーの方法より導出したもので，最後におまけとしてラグランジュの方法に従って連続の式を導出します。

$t = 0$ で流体に中に任意の閉曲面 S_0 で囲まれる体積 V_0 の領域を考えます。この領域の流体が任意の時刻 t で閉曲面 S で囲まれる体積 V の領域を占めるものとします。閉曲面は流体とともに動く面なので，それを通しての質量の出入りはないはずで質量は保存されます。

$$\int_V \rho dxdydz = \int_{V_0} \rho_0 dadbdc \tag{3.14}$$



$t=0$ での流体の初期座標を $\boldsymbol{x}_0=(a,b,c)$ とすると，時刻 t における座標 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0,t)$ は運動方程式の解として与えられます。これを $\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}$ の変数変換と考えれば，ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

を使って (3.14) の左辺は

$$\int_V \rho dxdydz=\int_{V_0}\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}dadbdc$$

となり，

$$\int_{V_0}\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\int_{V_0}\rho_0 dadbdc$$

の関係が得られます。ここで領域 V_0 は任意なので，両辺の被積分関数は等しくなければならず

$$\rho\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\rho_0 dadbdc \tag{3.15}$$

が成り立ちます。この式はラグランジュの方法による質量保存則を表しているので，**ラグランジュの連続の式**といいます。非圧縮性流体（縮まない流体）では $\rho(\boldsymbol{x})=\rho_0(\boldsymbol{x}_0)$ であるので，連続の式は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=1 \tag{3.16}$$

となります。

第 3 話終わり

[6]流線と流跡線が一致する定常流を考えていることに留意。
[7]圧力の次元を $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}} \to \mathrm{NL/L^3}$ と書くと単位体積当たりのエネルギーを意味します。N：ニュートン。