流体粒子の変形と回転

KENZOU

2015.11.22

第 4 話. 流れに伴う流体粒子の変形と回転

第 3 話のオイラーの運動方程式 (3.11) からお話を始めます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega}\equiv\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{4.1}$$

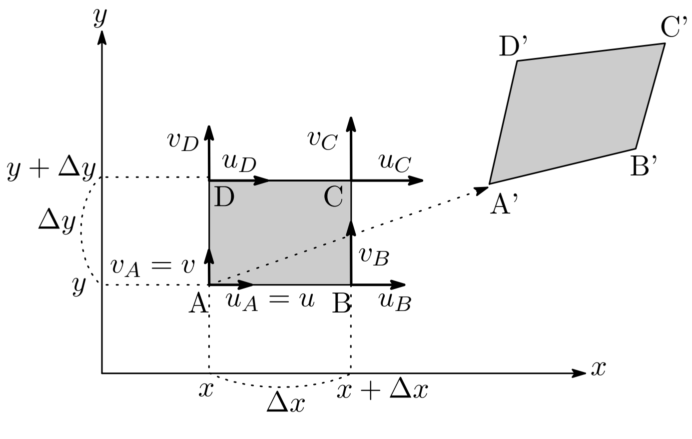
渦度 $\boldsymbol{\omega}$ はベクトル量[1]で，その成分は次の通りです。

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\boldsymbol{v} = (\omega_x,\,\omega_y,\,\omega_z) \longrightarrow \begin{cases} \omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

流体粒子は自転しながら流れているということを暗示します。もっとも $\boldsymbol{\omega}=0$ であれば自転運動はありませんが。第 4 話では流体粒子の局所的な運動について見ていきます。

■流体粒子の変形と回転

2 次元完全流体の定常流について考えます。流れの中の流体粒子 ABCD が単位時間後に移動するとともにどのように形を変えていくかを調べます。点 A における x, y 方向の速度成分を $u_A(=u)$, $v_A=(v)$ とします。微小距離 $\Delta x, \Delta y$ 離れた点 B,C,D における速度成分をそれぞれ (u_B, v_B), (u_C, v_C), (u_D, v_D)



[1] 渦度の大きさは自転角速度の 2 倍，向きは自転軸と一致します。

とすると各点での速度成分は次のように書けます。

$$\begin{cases} u_A = u & v_A = v \\ u_B = u(x+\Delta x) & v_B = v(x+\Delta x) \\ u_C = u(x+\Delta x, y+\Delta y) & v_C = v(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ u_D = u(x, y+\Delta y) & v_D = v(x, y+\Delta y) \end{cases} \tag{4.2}$$

テイラー展開して二次の微小量を無視すると

$$\begin{cases} u_A = u, \qquad v_A = v \\ u_B = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \qquad v_B = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x \\ u_C = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y \\ v_C = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y = v + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x \\ u_D = u + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \qquad v_D = v + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y \end{cases} \tag{4.3}$$

ここで

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.4}$$

とおいて (4.3) を書き直すと

$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u + a\Delta x, & v_B = v + (h+\Omega)\Delta x \\ u_C = u + a\Delta x + (h-\Omega)\Delta y, & v_C = v + b\Delta y + (h+\Omega)\Delta x \\ u_D = u + (h-\Omega)\Delta y, & v_D = v + b\Delta y \end{cases} \tag{4.5}$$

次に，a, b, h, Ω の物理的な意味な意味を見ていきます。

- $a = b = h = \Omega = 0$ **の場合：** A，B，C，D の各点は同じ速度成分をもつので，流体粒子は平行移動するだけで，回転も変形もしません。

- $h = \Omega = 0$ **の場合：** A，B，C，D 各点における速度成分は (4.5) より

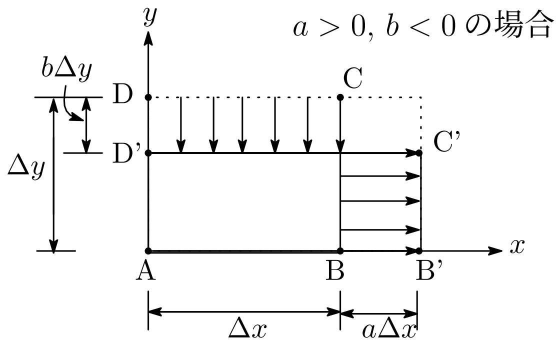
$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u + a\Delta x, & v_B = v \\ u_C = u + a\Delta x, & v_C = v + b\Delta y \\ u_D = u, & v_D = v + b\Delta y \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

また，非圧縮性流体の連続の式 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ の条件より a と b は独立ではなく

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a + b = 0, \qquad \therefore\ b = -a$$

この場合は流体粒子は平行移動するほかに x 軸方向に $a\Delta x$ 伸び，同時に y 軸方向に $b\Delta y$ だけ伸びます。このことから，a, b は x, y 方向の伸縮率を表します。



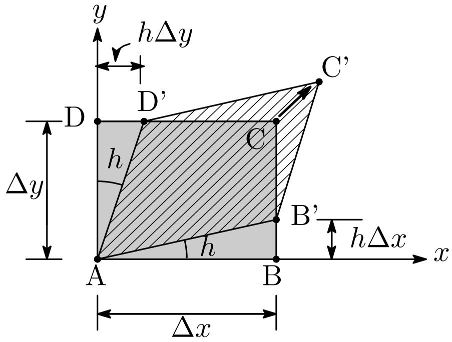
- $a = b = \Omega = 0$ **の場合：** この場合，

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A，B，C，D の各点における速度成分は (4.5) より

$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u, & v_B = v + h\Delta x \\ u_C = u + h\Delta y, & v_C = v + h\Delta x \\ u_D = u + h\Delta y, & v_D = v \end{cases} \tag{4.7}$$

単位時間経過後の流体粒子の形状は x 軸方向に A 点は u だけ進むのに対し D 点は $u+h\Delta y$ 進み，y 軸方向に A 点は v だけ進むのに対し B 点は $v + h\Delta x$ 進みます。また C 点は x, y 方向にそれぞれ $u + h\Delta y,\ v + h\Delta x$ 進みます。



この結果，辺 AB は反時計方向に移動して AB' に，辺 AD は時計方向に移動して AD' に，対角線 AC は AC' に伸長し，流体粒子の形状は長方形を平行四辺形にひしゃげる変

形（ずれ変形）をします。変形後の対角線 AC' と B'D' は変形前の対角線 AC，BD と等しいので，流体粒子は回転せずに純粋のズレ運動をします。h は単位時間当たりの角度変化，つまり角速度を表します。

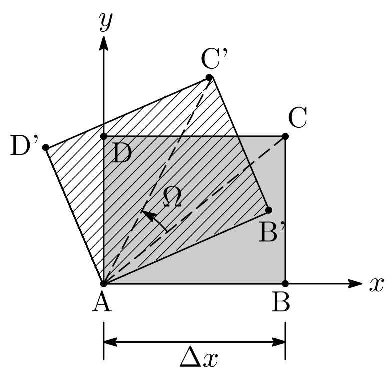
- $a=b=h=0$ **なる場合** この場合，

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \therefore\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \Omega$$

ABCD の各点における速度成分は (4.5) より

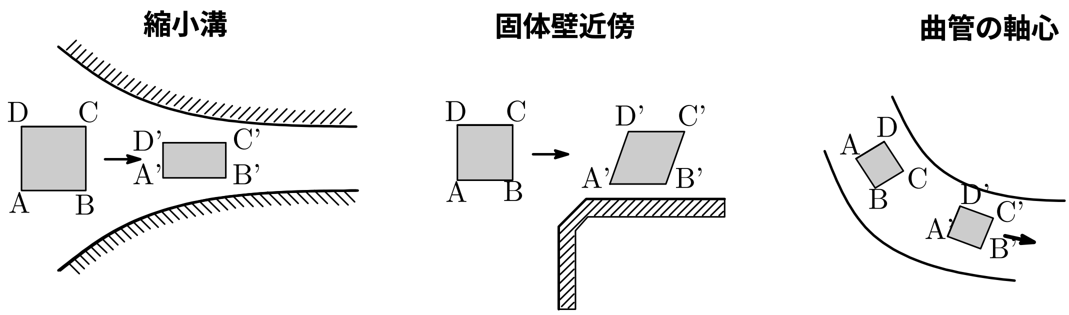
$$\begin{cases} u_A = u, & v_A = v \\ u_B = u, & v_B = v + \Omega\Delta x \\ u_C = u - \Omega\Delta y, & v_C = v + \Omega\Delta x \\ u_D = u - \Omega\Delta y, & v_D = v \end{cases} \tag{4.8}$$

となります。単位時間経過後の流体粒子の形状を元の形状に重ね合わせると図のようになります。



この場合，流体粒子は形状を変えずに紙面に垂直な軸の回りに角速度 Ω で反時計方向に回転していることになります。

以上，流体粒子は速度 $\boldsymbol{v}$ の並進運動，x, y 軸方向の一様な伸び縮みの運動，ひしゃげるような運動，角速度 Ω の回転運動を流れ場の状況に応じて同時に行っていることが分かります。



完全流体ではない実在の流体では，上で説明しました流体粒子のいろいろな変形をさまたげるような力が現れます。これが**粘性応力**と呼ばれるものですが，詳細は第 5 話でやる予定です。

[**補足**] 2 次元流れの加速度の成分は次式で与えられます。

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

上の第 1 式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\varepsilon_x + v\gamma_z - v\omega_z \end{aligned} \tag{4.9}$$

同様にして第 2 式は

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\varepsilon_y + u\gamma_z - u\omega_z \tag{4.10}$$

となります。ここで

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \longrightarrow \quad a,\, b \quad \text{（伸縮による変形速度）} \\ \gamma_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \longrightarrow \quad h \quad \text{（せん断変形による角速度）} \\ \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \longrightarrow \quad \Omega \quad \text{（回転運動の角速度）} \end{cases} \tag{4.11}$$

とおきました。(4.11) と (4.4) を対照すると $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_z, \omega_z$ はそれぞれ a, b, h, Ω に対応していることが分かります。ちなみに (4.9)，(4.10) の 3 次元版は次のようになります,

$$\begin{cases} \dfrac{Du}{Dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\varepsilon_x + (v\gamma_z + w\gamma_y) + (u\omega_y - v\omega_z) \\ \dfrac{Dv}{Dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\varepsilon_y + (w\gamma_x + u\gamma_z) + (u\omega_z - w\omega_x) \\ \dfrac{Dw}{Dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + w\varepsilon_y + (u\gamma_y + v\gamma_x) + (v\omega_x - u\omega_y) \end{cases} \tag{4.12}$$

ただし

- **伸縮による変形速度：** $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}$
- **せん断変形による角速度：** $\gamma_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \gamma_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \gamma_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$
- **回転運動の角速度：** $\omega_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \omega_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$

//

■ラグランジュの渦定理

最後にラグランジュの渦定理（完全流体では渦は不生不滅）のお話をして，第 4 話を終わることにします。
2 次元流れでは渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\, 0,\, \omega_z) = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

で，角速度 Ω と渦度の関係は上で見てきたように $\Omega = \frac{1}{2}\omega$ となります[2]。流れのある領域の中で $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ のとき，その領域で流れは**渦なし**であるといい，$\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ の場合は**渦あり**あるいは**渦運動をする**といいます。(4.1) のオイラーの運動方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v})$$

で両辺の回転をとると，ベクトル解析の公式より $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ なので

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{4.13}$$

が得られます。ベクトル解析の公式 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$, $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ を使うと

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \quad (\because\ \nabla\cdot\omega = 0)$$

となり，これと連続の式

$$\nabla \cdot v = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

より

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} \tag{4.14}$$

と表すことができます[3]。(4.13)，(4.14) は流れにのって移動するときの渦度の時間的変化を与える式で**完全流体に対する渦度方程式**といいます。$t = 0$ のときに $\boldsymbol{\omega} = 0$（渦なし）であったとすると，

$$\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0} = 0$$

したがって，微小時間 Δt 後の流体粒子の $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=\Delta t} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)_{t=0} + \left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\right]_{t=0}\Delta t = 0$$

となり $\omega = 0$ の渦なしです。次に時間を小刻みに進めて，最初の時刻から Δt 後の時刻を改めて $t = 0$ とすると，それから Δt 後も依然として $\omega = 0$。このように小刻みに時間の経過を追っ

[2]一般的に角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ と渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の間には $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$ の関係があります。
[3]詳細は「流体力学講話・その 3」を参照。

て考えると，任意の時刻において渦度が 0 であることが分かります。逆に，$t=0$ で $\omega \neq 0$ であったとすると，いつまでも $\omega=0$ でなければなりません。というのは，ある時刻に $\omega=0$ になったとすると，その時刻より ω の時間的変化を逆に遡っていくと，上と同様の議論により任意の時刻において $\omega=0$ でなければならないことになりますが，これは $t=0$ のとき $\omega=0$ という前提と矛盾します。ということで渦は発生することも消滅することもありません。これを**ラグランジュの渦定理**といいます。

第４話終わり