粘性流体

KENZOU

2015.12.19

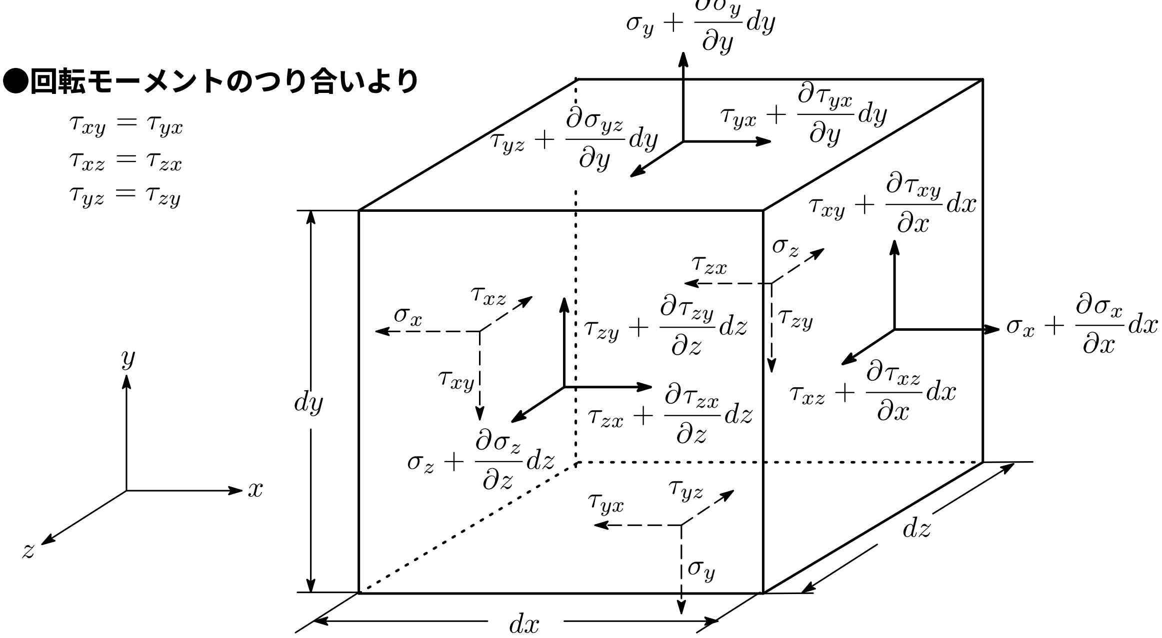
第 5 話. 粘性流体の運動方程式

■ナビエ・ストークス方程式

流体に働く力は**体積力**と面の両側の流体がその面を通して互いに及ぼしあう**面積力**があり，単位面積当たりの力を**応力**[1]といいます。完全流体では面積力は面に垂直な圧力だけですが，粘性流体では面に垂直な**垂直応力**と面に平行２つの**せん断応力**が働きます[2]。垂直応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, せん断応力を $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \cdots$ とすると，流体粒子の各面に働く応力は下図のようになります。ただし，せん断応力の最初の添え字 x, y, z は応力が作用している面に垂直な軸を示し，次の添え字は応力の作用する方向を示します。

●回転モーメントのつり合いより

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$



[1] 面積力は面の両側の薄い層のみからくる近距離力。応力の単位は [N/m^{-2}] 。
[2] x 軸に垂直な面に作用する垂直応力を σ_x, せん断応力を τ_{xy}, τ_{xz}, etc とします。

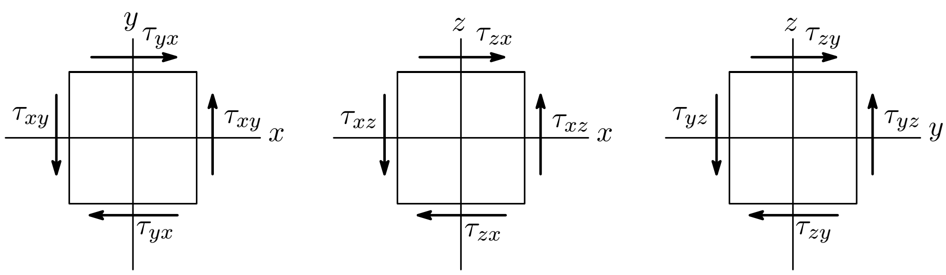
ある時刻 t において微小流体 $\rho dxdydz$ に x, y, z 軸方向に作用する応力は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
x\text{ 軸方向:}\quad & \left\{\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_x dydz\right\} + \left\{\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz - \tau_{yx}dxdz\right\} \\
& + \left\{\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \tau_{zx}dxdy\right\} \\
& = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \\
y\text{ 軸方向:}\quad & \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz \\
z\text{ 軸方向:}\quad & \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz
\end{aligned}
$$

単位体積当たりに働く外力と表面力をそれぞれ $\boldsymbol{K} = (X, Y, Z)$, $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$ とすると，微小流体の運動方程式は

$$
\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho\boldsymbol{K} + \boldsymbol{P} \longrightarrow
\begin{cases}
\rho\dfrac{Du}{Dt} = \rho X + \left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \\
\rho\dfrac{Dv}{Dy} = \rho Y + \left(\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz \\
\rho\dfrac{Dw}{Dt} = \rho Z + \left(\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

となります。これは粘性流体の運動に対して一般的に成り立つ方程式で，**ナビエ・ストークスの運動方程式**と呼ばれる[3]2 階非線形偏微分方程式です。応力の x, y, z 方向成分は $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ の 9 個ですが，流体粒子の回転モーメントのつりあいから $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ が成り立つので，独立成分は全部で 6 個になります。



粘性のない流れでは $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ および $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ となって (5.1) は**オイラーの運動方程式**[4]と一致します。

[3]土木技術者であったアンリ・ナビエが 1882 年に粘性流体に関する論文論文を発表し，それから 20 年余り後の 1845 年にジョージ・ジョージ・ガブリエル・ストークスがナビエとは別に粘性流体の方程式を導きました。

[4]第 3 話の (3.9) 式参照。

せん断応力 $\tau_{xy},\cdots$ はせん断変形の角速度に比例し，比例定数を μ とすると

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{5.2}$$

と表せます[5]。比例定数 μ を粘性率といいます。$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ は，詳しい導出は省略しますが次式で表されます。

$$\begin{cases} \sigma_x = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z = -p - \dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \tag{5.3}$$

ここで p は 1 点における平均圧力[6]で

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{5.4}$$

としました。右辺の負の符号は圧力 p が面の垂直方向に対して負の向きに作用することを示しています。以上の関係式を (5.1) に入れて整理すると，**ナビエ・ストークス方程式**は

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

と表されます。ただ，$\nu = \mu/\rho$ で ν を**動粘性係数**[7]といいます。上式をベクトル表記すれば次のようになります。

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla\Theta \qquad (\Theta = \nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.6}$$

非圧縮性流体では連続の式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

---

[5] ニュートンの粘性法則：せん断応力 $\tau = \mu du/dt$

[6] 完全流体では応力は垂直応力のみで $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ですが，粘性流体では各垂直応力は互いに等しくありません。

[7] 動粘性係数の単位は $[\mathrm{m^2/s}]$

が成り立つので，**非圧縮性流体に対するナビエ・ストークス方程式**は

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\ \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

となり，ベクトル表記すれば次のように表されます。

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{5.8}$$

第 5 話終わり