流体力学講話・つまみ食い（その１）

KENZOU

2008 年 7 月 16 日

♣ 流体力学のお話をしようと思います。もっとも，首尾一貫したお話は手に負いかねますので，興味のむくまま，あちらへぶらり，こちらへぶらりと寄り道しながら，かつ適当にすっ飛ばしながら進めていきたいと思います。そういう主旨ですので，分割してお話を進めていきます。どのような話の構成になるか，予断を許しません（笑い）。まっ，そこは適当につまみ食いをつまみ食いしていただくということでいいのではと思います。なお，本稿を書くに際し，今井功「流体力学（前編)」（裳華房），原田幸夫「基礎流体力学・水力学演習」（槙書店），前川博・山本誠・石川仁「例題でわかる基礎・演習 流体力学」（共立出版）をはじめ，ネット上の各種講義ノートを参照させていただきました。ます，1 回目は流体というものをどう捉えるのかというお話から始めて，流体の種類，流れのふる舞い，そしてよく知られているレイノルズ数という相似則のお話まで進める予定です。それではははじめます。

目 次

============================

1　流体の記述

1.1　連続体近似

流体力学とは読んで字のごとく ”流体 ”の ”力学 ”のことですが，この流体というのは何を意味しているのでしょうか。昔，アエロジールという Si の微粉末を取り扱ったことがありますが，これは微粉末の固体であるにもかかわらず，液体のように流れだしたことが強く印象に残っています。固体の運動はいわゆる古典力学の枠組みで記述されます。たとえば，運動中の変形はないとされる剛体の場合は，それを構成する N 個の個々の粒子について運動方程式 (3N 個）を立てて，それを解くというやり方はしません。剛体の場合，重心の運動（x, y, z 方向に 3 つの並進自由度）と重心周りの回転（x, y, z 軸周り 3 つの回転自由度）の運動，つまり並進と回転の合計 6 個の自由度に関する運動方程式で完全に決定できることは周知の通りです。それでは，水や空気のような液体や気体の運動を記述するにはどうすればいいでしょうか。液体や気体の場合は，剛体と異なってごくわずかな力を加えるだけでどんな大きな変形でも引き起こします。それなら，液体や気体を構成する個々の粒子の運動にまで遡らなければならないのか，ということになりますが，アボガドロ数（6×10^{23}) 個に及ぶ方程式を立てて... と考えるだけで気が遠くなります。現実的にそれは不可能でしょう。そこで，流体内部の 1 点 P をとり，点 P を含む微小な体積（これでも多数の分子を含みます）について物理量の平均値（ミクロな分子の運動情報の平均値）をとることとします。そうすると，点 P における物理量は点 P の連続関数として捉えることができるようになります。このように，ミクロな構造を平均値で置き換えて得られる連続的な物理性質を持つ仮想的な物体を連続物体あるいは連続体と呼び，流体力学では流体を連続体として取り扱うことにしています。そしてこのような近似を**連続体近似**といいます。いま，流体が質量 m を持った粒子（原子あるいは分子）で構成されているとします。点 P を含む微小体積 δv をとって，そこに含まれる粒子の個数を N 個，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, 点 P における密度を $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ とすると，密度は次のように定義されます。尚，N や δv は時間 t に依存して値が揺らぐために，一般化して時間 t を入れました。

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{Nm}{\delta v} \tag{1.1}$$

次に，流体であれば，常に連続体近似が成り立つのかということになりますが，そんなにうまい話はないわけで，特に低圧気体の場合，気体分子の平均自由工程 l が流れの代表的なスケール L に較べて数分の 1 以下であれば連続体近似が成り立つことが知られています。この l と L の比は**クヌッセン数**（Knudsen 数）と言われ，次のように書かれます。

$$K_n = \frac{l}{L} \tag{1.2}$$

L として，円管を流れる気体の場合には円管の直径，気流中に球を置く場合には球の直径がとられます。気体の場合，連続体近似が許されるには

$$K_n < \frac{1}{5} \tag{1.3}$$

の場合とされています。これは，分子の平均自由工程 l は L に較べてかなり小さいということで，代表的なスケール L 内で分子の衝突が頻繁に起こり，分子の衝突により気体の物理的性質がある程度**平均化される**ことになります。[1]

1.2　応力

連続体内部での力の係り具合を定量的に表すために，応力という概念を使います。応力とは，Wikipedia によれば,「単位面積あたりに働く力のことで，物体が外力の作用を受ける場合、物体内部の任意の断面に、その外力とつりあいを保つ為に内力が発生するが、その単位面積当たりの内力をいい、その内部に生じる力の大きさや作用方向を表現するために用いられる物理量である。」ということになります。具体的に Fig.1 を見ながら考えましょう。

点 P を通る平面 S を選びます。S 上の P を含む単位面積をとり，この面を通して面の表側（法線ベクトル n が向いている側）の連続体が裏側の連続体に及ぼす力を考えます。この力は，ベクトル量ですから大きさと方向を持ちますが，加えて今の場合，平面 S の選び方によって変わりますから，結局，2 つの方向と 1 つの大きさ

[1] クヌッセン数が 1 程度以上の流れは、希薄気体と呼ばれ、連続体近似が成り立たないため，Boltzman 方程式を解く必要があります。

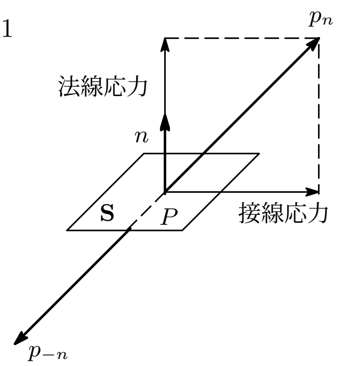
を持つことになります。この量は数学的には2階テンソルと呼ばれる量になります。それはともかく，この力を p_n と書き，点 P においてその単位面積に作用する**応力**といいます。応力を面Sの法線方向と接線方向とに分解したものを，それぞれ**法線応力**，**接線応力**といいます。また，法線応力は，面の両側が互いに押し合うような場合には**圧力**，面の両側の部分が互いに引っ張り合うような力である場合にはこれを**張力**と呼びます。p_n は，面の表側の連続体が裏側の連続体に及ぼす応力ですが，面の裏側の連続体が表側の連続体に及ぼす応力は，これと大きさは等しく向きが正反対の力を正の側に及ぼしていることになります。この応力を p_{-n} で表わすと，作用反作用の法則により

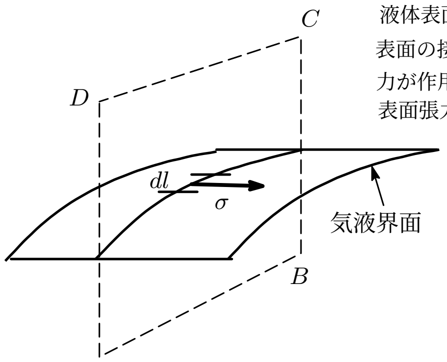
$$p_{-n} = -p_n \tag{1.4}$$

という関係が成り立ちます。　応力の概念を使えば，流体を次のように表現できることになります。

「静止状態においては，接線応力が現れず，かつ法線応力が圧力であるような連続体が流体である」

*Fig.*1



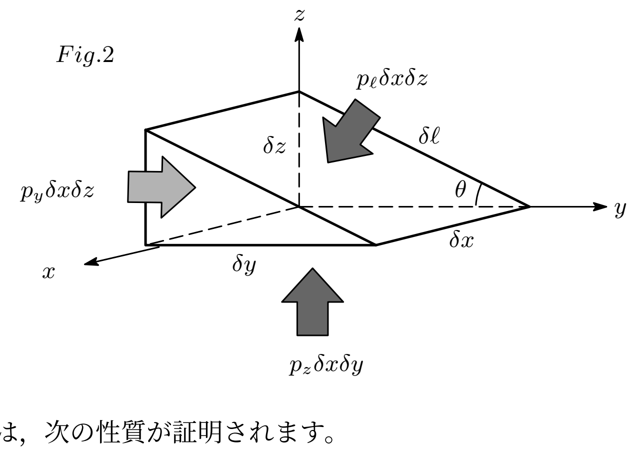


<ヤング>
液体表面と交わる平面 ABCD を考えたとき，表面の接線方向の単位長さ dl 当たり，σ の力が作用していると考え，この力をこの力を表面張力と呼んだ。次元は [N/m]=[J/m2]

Hudson, J. B., Surface Science, An introduction, (1998)

このあたりは重要なポイントですので，くどいようですがもう少し説明を加えると，”静止状態においては ”という注釈に留意してください。というのは，仮にある面に接線応力が現れたとすると，”わずかな力でも変形する ”という流体の性質により，その面の両側（表/裏）の流体の部分は，お互いに対してずれ動くことになるので ”静止状態にある ”という前提に反します。また，もし，法線応力が張力であるとすると，ちょうどその面で流体は2つに裂けて後には真空部分がつくられることになりますが，これも ”静止状態 ”の前提に反します。ところで，連続体に働く力は一般には次の2種類の力が働きます。1つは体積力と呼ばれるもので，その大きさが質量や体積に比例する力（重力，慣性力等）で，もう一つ，は面の両側の流体がその面を通じて互いに及ぼし合う面積力で，その単位面積当たりの力を応力と呼んだことは上で述べた通りです。

*Fig.*2



さて，法線応力については，次の性質が証明されます。

「静止状態，運動状態を問わず，一般に，接線応力がゼロであれば，法線応力は考える面の選び方によらず一定値をとる」

いま，流体は静止しており，Fig.2 の各面に p_x, p_y, p_z の圧力がかかっているとします。また，外力として重力を考えておきます。

力の釣り合いから x 方向については，力のかかる面積が等しく，向きは反対なので釣り合っていることがわかります。y 軸方向についての力の釣り合いの式は

$$p_y \delta x \delta z - p_\ell \delta x \delta \ell \sin\theta = 0\,,\quad \delta z = \delta \ell \sin\theta$$
$$\therefore\ p_y = p_\ell$$

となります。z 方向には，圧力に加えて重力による体積力 $(1/2)\rho g \delta x \delta y \delta z$ が加わるので

$$p_\ell \delta x \delta \ell \cos\theta - p_z \delta x \delta y + \frac{1}{2}\rho g \delta x \delta y \delta z = 0$$

となります。$\delta y = \delta \ell \cos\theta$ で，くさびの要素を極限まで小さく考えると $\delta z \to 0$ となるので，上式は，$p_\ell = p_z$ となります。いままでのことを整理すると

$$p_y = p_z = p_\ell$$

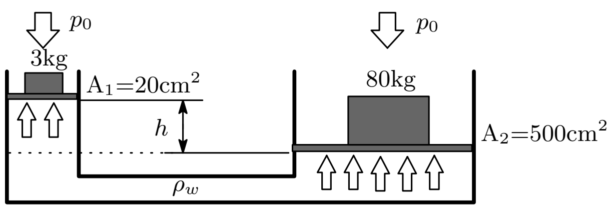
が得られます。x, y は便宜的に考えただけですから，流体要素の向きを変えて考えると，同様に x 方向についての釣り合いの式も成立しますから

$$p_x = p_y = p_z$$

となります。これで証明できました。

例題－１ 大小 2 つのシリンダでつながれている水圧機がある（Fig.3）。小さなピストンの面積は $\mathrm{A_1}$=20cm^2，大きなピストンの面積は $\mathrm{A_2}$=500cm^2 である。(1) いま，小さなピストンに 100N の力をかけたとき，大きなピストンで持ち上げられる力を求めよ。(2) 大小のピストンにそれぞれ質量 3kg と 80kg の分銅をのせたとき，2 つのピストンが釣り合った。その時の高さ h を求めよ。ただし，水の密度 ρ_w =1000kg/m^3 とする。

Fig.3



答：「密閉した容器内の液体に加えられた圧力は，他の部分にも加えられた分だけ同じ大きさで伝わる」というパスカルの原理により，断面積 A_1 の小さいピストンを力 F_1 で押すと，発生する圧力は $p = F_1/A_1$ となり，これが断面積 A_2 の大きなピストンに等しく伝わるので

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \therefore\ F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1$$

(1) 小さなピストンに 100N の力を加えれば，大きなピストンが持ち上げられる力 F_2 は

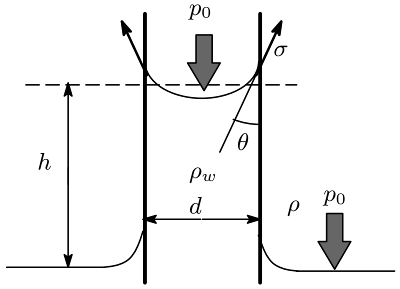
$$F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 = \frac{500\times 10^{-4}}{20\times 10^{-4}} \times 100 = 2500[N]$$

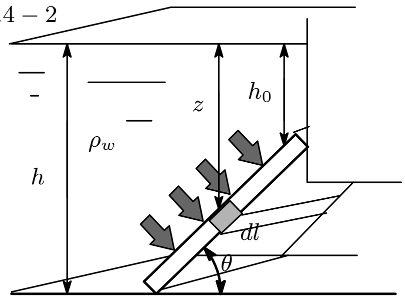
(2) 圧力の釣り合いの式を考える。大気圧 p_0 を含めて考えると，小さいピストンの方は，大気圧 p_0 ＋分銅による圧力 F_1/A_1，せり上がった液柱にかかる重力による力 $\rho_w g h$。一方，大きいピストンの方は，大気圧 p_0 ＋分銅による圧力 F_2/A_2。釣り合い状態ではこの 2 つの力の大きさが等しいので

$$p_0 + \frac{F_1}{A_1} + \rho_w g h = p_0 + \frac{F_2}{A_2} \quad \therefore\ h = \frac{1}{\rho_w g}\left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1}\right) = 0.1[m]$$

例題－２ Fig.4-1 のようなガラス管を 10 ℃の水中に立てたとき，表面張力による境界面（meniscus）の上昇を 3mm 以内にしたい。ガラス管の直径をいくら以上に設定すればよいか。ただし，空気と接触する 10 ℃の水の

表面張力は$\sigma = 7.4 \times 10^{-2}$N/m，ガラスと水との接触角は$\theta$ =15 °とする。ただし，10 ℃における水の密度をρ_w =1000kg/m^3，空気の密度を$\rho = 1.2$kg/m^3 とする。





答： 管内を上昇している液柱に作用している力は

- 液柱を押し上げる力：表面張力の鉛直上向き成分の円管周り総力$\pi\sigma d\cos\theta$，ガラス管周りの液面に作用する大気圧によって液柱が押し上げられる力$(\pi d^2/4)(p_0 + \rho gh)$，（$(\pi d^2/4)\rho gh$ は液柱で排除された空気柱の重さ）
- 液柱を押し下げる力：液柱にかかる重力による力$\rho_w(\pi d^2/4)gh$，液柱の上から作用する大気圧による力$(\pi d^2/4)p_0$

これらの力が釣り合っているから

$$\pi\sigma d\cos\theta + (\pi d^2/4)(p_0 + \rho gh) = \rho_w(\pi d^2/4)gh + (\pi d^2/4)p_0 \quad \therefore h = \frac{4\sigma\cos\theta}{(\rho_w - \rho)gd} \tag{1.5}$$

h を 3mm 以内にしたいのだから

$$h = \frac{4\sigma\cos\theta}{(\rho_w - \rho)gd} \leq 3 \times 10^{-3}[m], \quad \therefore\ d \geq \frac{4\sigma\cos\theta}{(\rho_w - \rho)gh} = 0.97 \times 10^{-2} = 9.7[mm]$$

※**註**：普通，毛細管現象の問題では表面張力と液柱の重さが釣り合っているという条件で

$$\pi d\sigma\cos\theta = \pi(d/2)^2\rho_w gh \quad \longrightarrow \quad h = 4\sigma\cos\theta/\rho_w gd \tag{1.6}$$

と h を求めています。（1.6）と（1.5）を較べると，分母のところが（1.5）では$\rho \longrightarrow (\rho_w - \rho)$ となって，空気の比重 ρ が入っています。空気の比重は水の比重に較べて無視できる程度に小さいとすると（1.6）になります。

例題－３ Fig.4-2 のように水路のに水平面と角 θ の傾きをした平板を立てかけ水をせき止めている。この平板に働く力を求めよ。水の密度は ρ_w とし，水路の奥行き方向には単位長さ 1 を考える。ただし，大気圧は考慮しなくてよい。
答： 板の微小面積 $dA = (1 \times dl)$ に働く力 dF は $dF = pdA = (\rho_w gz)\,dl$，平板は z 軸方向から θ の傾きで立てかけられているので $dl\sin\theta = dz$ となる。したがって求める力は

$$F = \int_A dF = \int_{h_0}^{h} dz\frac{\rho_w g}{\sin\theta}z = \frac{\rho_w g}{2\sin\theta}(h^2 - h_0^2)$$

例題－４ 気相と液相が接する界面には表面張力が働く。Fig. のような半径 R_1 と R_2 を有する楕円の液滴を考え，その表面張力を求めよ。**答：** Fig.5 に示す微小部分に注目すると，ここに働く力は液滴内外の圧力と表面張力 σ である。注目する微小部分を平面として近似すると δy の線状に働く表面張力の液滴内部の方向の力の総和は $2\sigma\sin\theta_1\delta y$，同様にして δx の線状に働く液滴内部方向の表面張力の総和は $2\sigma\sin\theta_2\delta x$ となる。また，微小部分に働く外圧はによる力は $p\delta x\delta y$ である。一方，液滴の内圧を $p + \Delta p$ とすると，微小部分には液滴の外側方向に $(p + \Delta p)\delta x\delta y$ の力が作用する。これらの力の釣り合いから

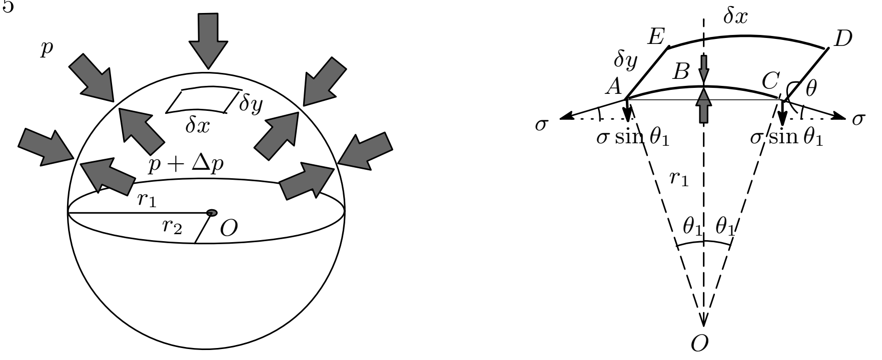
$$2\sigma\sin\theta_2\delta x + 2\sigma\sin\theta_1\delta y + p\delta x\delta y = (p + \Delta p)\delta x\delta y$$

が得られる。θ_1,θ_2 は微小であるから $\sin\theta \approx \theta$ と近似すると，$\delta x = 2r_1\theta_1, \delta y = 2r_2\theta_2$ となるので

$$2\sigma\theta_2\delta x + 2\sigma\theta_1\delta y = \Delta p\delta x\delta y \quad \longrightarrow \quad \Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{1.7}$$

が得られる。(1.7) はヤング・ラプラスの式と呼ばれる。

$Fig.5$



※**註：**球の場合は $r_1 = r_2$ ですから $\Delta p = 2\sigma/r$ となります。尚，液滴ではなくシャボン玉のようなものであれば，表裏で 2 つの膜がありますから（1.7）で表面張力を 2 倍してやる必要があります。

1.3 完全流体と粘性流体，圧縮性流体

連続体内部の 1 点における力のかかり具合を表すのに，一般には応力とりうテンソル量を用いなければならないことがわかりました。しかし，流体が静止状態にある限りにおいては，圧力というただ 1 つのスカラー量で表されることを見てきました。現実には「流体力学」の名のとおり，運動中の流体を取り扱うケースが大半で，その場合には必ずといっていいほど接線応力が表れ，事態を複雑にします。例えば，油のような粘っこい液体を円筒に入れ，円筒を中心軸の周りに回転すると，最初静止していた油はすぐに容器壁面に引きずられて円筒と同じように回転し始めます。これは接線応力が大きいためにそのようになるわけです。そうすると接線応力の小さいサラサラした流体，例えば水なんかでは，最初円筒だけが回転し，中の水はそのうち徐々に回転し始めるということを経験上知っています。接線応力は流体の粘性が原因で表れてきます。そこで，運動中に接線応力が現れうる流体を**粘性流体**と呼び，運動中でも接線応力の現れない流体を**完全流体**とか**非粘性流体**，あるいは**理想流体**と言っています。粘性流体で特に重要なものとしてニュートン流体と呼ばれるものがあります。これは，接線応力（せん断応力）が速度勾配に比例する流体のことで，接線応力を τ とすると

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} \tag{1.8}$$

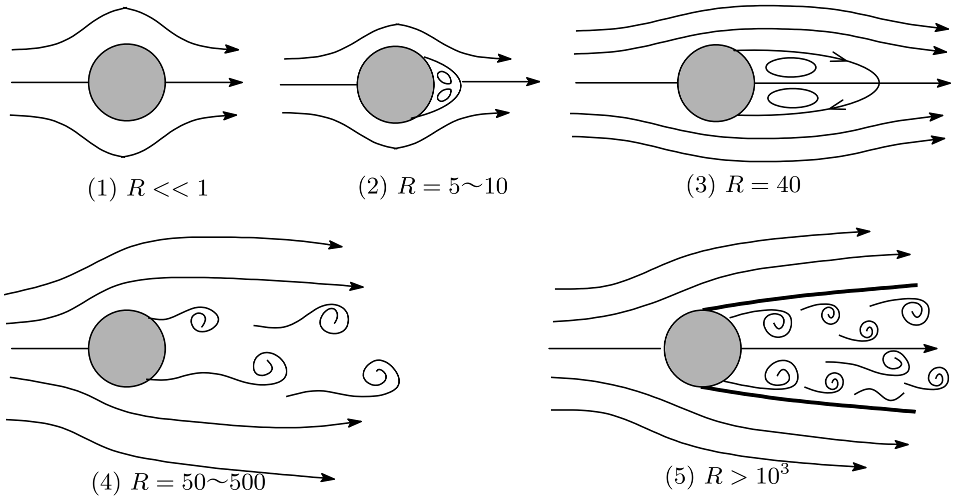
で表されます。ここで比例係数 μ 粘性率と言われます。ニュートン流体についてはまた後ほどでてくると思いますので，ここではこれでけにしておきます。

さて，水や油のような液体の場合は，体積変化が極めて小さく，密度が常に一定に保たれると仮定して議論しても，現実上とくに支障はありませんが，気体の場合は容易に圧縮できます。そこで，密度の変化する流体を**縮む流体**と呼び，あるいは**圧縮性流体**とよび，そうでない流体を**非圧縮性流体**と呼ぶことにしています。ただ，液体は縮まないから非圧縮性流体，気体は縮むから圧縮性流体と簡単に割り切れない点に注意してください。気体でも，運動流に気体内部に生じる圧力変化が小さければ，密度変化も当然小さいはずですから，この場合は非圧縮性流体として気体の運動を議論することができますし，一方，液体でもその内部を伝わる音波を議論する場合には，密度の疎密変化が本質的な意味をもってきますので，圧縮性流体として取り扱わねばならないことになります。ということで，圧縮，非圧縮流体の区別は，必ずしも気体，液体の区別を指すものではないということに注意してください。

2　流体のふる舞い

例えば円柱の周りの一様な水の流れの様子を見てみましょう。実際に水槽で実験するのもいいですし，または経験的な想像でもいいのですが，流れをゆっくりからだんだん早くしていくと，流れの様子が変わってきます。この様子を Fig.6 に描きました。左から右，上から下へ向かうにつれて流速が早くなっていく場合の流れの様子です。

Fig.6



このように流速が遅いか速いかによって流れの様子が随分と変わってきます。これは水にかぎったことではなく，グリセリンやヒマシ油のような粘い流体の場合でも，流速が相当早くなっても水の場合の (1) あるいは (2) の状態が現れるという点で違いがみられるだけで，水と同じ様相を呈します。ここで流速の早い・遅いということですが，例えば，流速の速さを cgs 単位系で測って 100cm/sec であったとしましょう。これは MKS 単位系では 1m/sec となり，100cm/sec が早いというわけにはいきません。単位系によって流速の判断基準が異なりますね。そこで流速の大小を云々するには，採用した単位系に左右されない，無次元の数値を尺度として考える必要がでてきます。この無次元量は，水とグリセリンの場合で見たように，流体の粘性と関連性をもっているだろうということが想像されます。ここにでてくるのがレイノルズ数（Reynolds 数）[2]という無次元量です。レイノルズ数は

$$R_e = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu}\ , \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.1}$$

で表されます。ここで ρ は流体の密度，U は流速，L は考える流れを表す代表的な長さで，いまの場合は L として円柱の半径か直径がそれに該当します。ν は動粘性係数と呼ばれます。したがって，流速の大小という表現はレイノルズ数の大小という表現で置き換えることで一般的に表現することができるようになります。Fig.6 の流れの様子は，L として円柱の直径 $2a$ を採用したレイノルズ数で整理してあります。水でも，グリセリンでもヒマシ油でも同じレイノルズ数であれば，その流れの様子は全く同じになります。これを**レイノルズの相似則**と呼んでいます。

2.1　レイノルズ数

流れを特長付ける尺度として無次元量であるレイノルズ数を説明しました。粘性流体で重要な力として**慣性力**と**粘性力**があります。慣性力は質量×加速度で，粘性力はせん断力（接線応力）×面積で表されますから，それぞれを概略見積もると次のようになります。

$$\text{慣性力} = \text{質量} \times \text{加速度} = \rho L^3 \times \frac{U}{L/U} = \rho U^2 L^2 \tag{2.2}$$

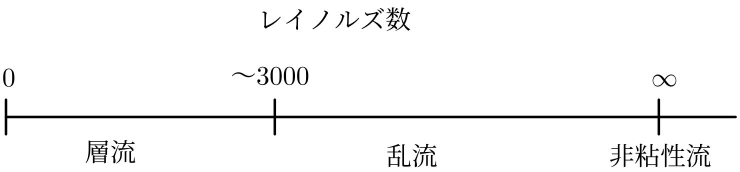
$$\text{粘性力} = \text{せん断力} \times \text{面積} = \mu \frac{U}{L} \times L^2 = \mu U L \tag{2.3}$$

[2] 英国の物理学者オズボーンレイノルズ Osborne Reynolds(1842〜1912)

ここで，代表時間として代表長さを流速で割った量 L/U，せん断力としてニュートン流体の式を使いました。慣性力と粘性力の比をとると

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{\rho U L}{\mu} = R_e \tag{2.4}$$

となって，レイノルズ数がでてきます。つまり，レイノルズ数というのは粘性流体において慣性力と粘性力の比という物理的意味をもつ量であることがわかります。したがって，レイノルズ数の大きい流れでは粘性力の影響を無視してもよく，逆にレイノルズ数の小さい流れでは慣性力の影響を無視してもよい（密度 ρ の影響が現れない）ということになります。また，2 つの流れでレイノルズ数が等しいということは，2 つの流れを支配している慣性力と粘性力の比が等しいということですから，作用する力の割合が相似，つまり，力学的に相似な状態であるということになります。レイノルズ数を尺度とすると，その値と流れの状態は次のようになります。



例題－５ ある潜航艇が毎時 12 マイルの速度で潜航する状態を観察するためにレイノルズの相似則にもとづいて実物の 1/10 の長さの模型[3]を作り，同じ海水を入れたタンク内で実験をおこなった。この場合の模型の速度を求めよ。
答： 実物と模型との間でレイノルズの相似則が成り立つから（m は模型）

$$\frac{UL}{\nu} = \frac{U_m L_m}{\nu} \quad \longrightarrow \quad \frac{12L}{\nu} = \frac{U_m L/10}{\nu} \quad \therefore \quad U_m = 120\ \text{マイル}/h$$

2.2　力学的相似則

流れの状態をレイノルズ数という無次元量で分類しました。2 つの流体のレイノルズ数が等しいということは，力学的に相似な状態にあるということも述べました。つまり，流体力学で「力学的相似」と言えば，”**その流れを特長づける無次元数が一致していること** ”ということになります。たとえば高層マンションに吹く風の流れは，レイノルズ数が同じであれば小さな模型にふく風の流れから推計できますし，海流のような地球規模の流れも、水道から流れでる細い水流であっても、レイノルズ数が同じであればその流れの状態は同じになるのです。レイノルズの相似則により，大きいスケールの現象を小さなスケールの模型実験で推定できることになります。つまり，実物も模型も同じ状態のもとにあると評価できる指標として無次元数をとりあげるわけです。いずれにしても，このような凄い武器ですので，もう少し力学的相似則について触れておくことにします。

2.2.1　次元解析

無次元数を求めるのに次元解析という手法を使います。この威力を知るために，以下に具体的に，粘性率 μ の粘性流体中を速度 U で運動する半径 a の球体に働く抗力 D を次元解析の手法で求め，得られた式がストークス[4]の式と合致するということを見てみます。

非圧縮性の流体内を運動する物体は，流体から抗力 D を受けますが，この抗力の大きさは流体の密度 ρ，流体の粘性係数 μ，物体の速度 U，物体の代表面積 S に関係することが実験より知られています。そこで抗力を次のように表します。

$$D = k\rho^\alpha S^\beta U^\gamma \mu^\delta \tag{2.5}$$

ここで k は無次元の比例定数です。ここで（2.5）を次元についの方程式で表します。抗力 D の次元は MLT^{-2}，密度 ρ は ML^{-3}，速度 U は LT^{-1}，粘性係数 μ は $ML^{-1}T^{-1}$ ですから

$$MLT^{-2} = [\,ML^{-3}\,]^\alpha\,[\,L\,]^{2\beta}\,[\,LT^{-1}\,]^\gamma\,[\,ML^{-1}T^{-1}\,]^\delta \tag{2.6}$$

[3] これを幾何学的相似と呼んでいます。
[4] アイルランドの数学者、物理学者（1819 年 8 月 13 日 - 1903 年 2 月 1 日)

となります。両辺の各単位の次元が等しいとすると

$$M：1 = \alpha + \delta, \quad L：1 = -3\alpha + 2\beta + \gamma - \delta, \quad T：-2 = -\gamma - \delta$$

となり，これから α,β,γ を δ で表すと，$\alpha = 1 - \delta, \quad \beta = 1 - \delta/2, \quad \gamma = 2 - \delta$ が得られます。これを（2.5）に入れると

$$D = k\rho^{1-\delta} S^{1-\delta/2} U^{2-\delta} \mu^{\delta} = k\rho U^2 S \left(\frac{\mu}{\rho\sqrt{S}U}\right)^{\delta}$$

となります。ここで $\sqrt{S}$ は長さの次元となりますから，この代わりに物体の代表長さ ℓ を使うと

$$D = k\rho U^2 S \left(\frac{\mu}{\rho\sqrt{S}U}\right)^{\delta} = k\rho U^2 S \left(\frac{\mu}{\rho\,\ell\, U}\right)^{\delta} = k_1 \frac{\rho U^2}{2} S \left(\frac{\mu}{\rho\,\ell\, U}\right)^{\delta} \tag{2.7}$$

となります。k_1 は無次元の定数です。（2.7）の右辺の括弧内の項の逆数は（2.4）のレイノルズ数であることがわかります。

$$R_e = \frac{\rho\,\ell\, U}{\mu} = \text{慣性力} \div \text{粘性力} \tag{2.8}$$

R_e が非常に小さい場合には，慣性力を無視できますから，抗力 D には ρ が含まれなくなります。そこで（2.7）の δ を 1 とおくと ρ を消すことができます。また，S/ℓ は長さの次元をもつので，これを改めて ℓ とすると（2.7）は

$$D = k_2 \ell \mu U \quad (k_2\text{: 無次元の定数}) \tag{2.9}$$

となります。ところで，粘性率 μ の粘性流体中を速度 U で運動する半径 a の球体に働く抗力 D は，$R_e \leq 1$ の場合，次のストークスの式で表されることが知られています。

$$D = 6\pi a \mu U \tag{2.10}$$

実験から k_2 を求めると 6π に近い値が得られ，<u>次元解析と実験結果のみから</u>ストークスの式（ℓ として球の半径 a をとる）が得られることになります。

2.2.2　バッキンガム（Buckingham）のπ定理

次元解析ではバッキンガムのπ定理というのが基本的指針となります。この定理は次のように表されます。

バッキンガムのπ定理

「1 つの物理現象において関与する物理量が a 個存在し，これら物理量に基本物理量（長さ L，質量 M，時間 T など）が b 個関係しているとき，この物理現象は $c = (a - b)$ 個のπナンバーと呼ばれる無次元量の関係として表すことができる。」

いいかえると，必要な測定物理量の数と基本単位の個数（3 個：M, L, T）の差だけπナンバーと呼ばれる無次元数が存在する，ということで，全体の次元が整合的であるためには，その他の物理量が基本物理量を用いて無次元化されなければならない，となります。早速この定理を使ってレイノルズ数を導出してみましょう。

レイノルズ数の導出　粘性流体の基本的物理量として，密度 ρ，粘性率 μ，速度 U，長さ L をとり，基本物理量として質量 M，長さ L，時間 T をとります。そうすると無次元数πナンバーの数は $4 - 3 = 1$ で 1 個となります。この無次元数を π と書いて，そのもっとも一般的な形を

$$\pi = U^{\alpha} L^{\beta} \rho^{\gamma} \mu^{\delta} \tag{2.11}$$

とします。（2.11）の右辺の次元は

$$\pi = [LT^{-1}]^{\alpha} L^{\beta} [ML^{-3}]^{\gamma} [ML^{-1}T^{-1}]^{\delta} = L^{\alpha+\beta-3\gamma-\delta} M^{\gamma+\delta} T^{-\alpha-\delta}$$

となります。πナンバーま無次元数ですから以下の等式が成り立ちます。

$$\mathrm{L}：\ \alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 0, \quad \mathrm{M}：\ \gamma + \delta = 0, \quad \mathrm{T}：\ -\alpha - \delta = 0$$

これは未知数が4個で方程式が3個のため，このままでは解は求まりませんが，無次元数を何乗しても無次元数のままですから，一般性を失うことなく $\alpha = 1$ とすることができます。そうすると $\alpha = 1\,, \beta = 1\,, \gamma = 1\,, \delta = -1$ が得られ，これを（2.11）に入れると

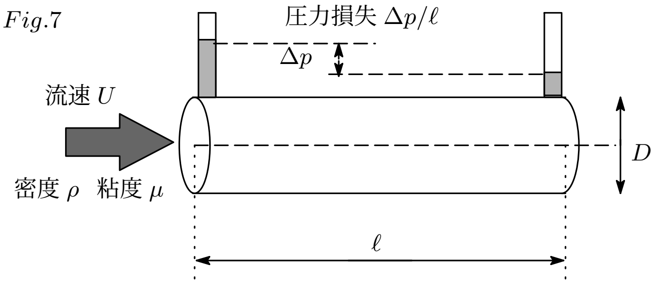
$$\pi = U^1\, L^1\, \rho^1\, \mu^{-1} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu} = R_e \tag{2.12}$$

となって，1個のπナンバーであるレイノルズ数が求まりました。

※註：基本的物理量として，たまたま密度，粘性率，速度，長さを選択したからうまくいったと思われるムキがおられるかも知れませんが，そうではなく，他の物理量の組合せを選んでもπナンバーはレイノルズ数となります。ちなみに速度，長さ，圧力 $[MLT^{-2}]$，動粘性係数 $[L^2T^{-1}]$ を選択してもレイノルズ数はでてきます。興味のある方はぜひ試してみてください。

管内流れの圧力損失　次の問題に取り組みましょう。直径 D の円管内に密度 $\rho[kg/m^3]$，粘度 $\mu[kg/m \cdot s]$ の流体が速度 $U[m/s]$ で流れているとします。長さ ℓ の円管の両端における圧力損失を表す無次元式を求めてみましょう。

Fig.7



円管の単位長さあたりの圧力損失（$\Delta p/\ell$）は，円管の直径 D，流体の密度 ρ，流体の粘性率 μ，流速 U の4個の物理量が関係するとします。したがって，必要な物理量としては合計5個となります。基本物理量として，質量 M，長さ L，時間 T の3個をとると，π定理により無次元数の数πナンバーは2となります。つまり2個の無次元数で記述されるということになります。さて，圧力損出が次式で表せると仮定します。

$$\Delta p/\ell = kD^{\alpha}\, U^{\beta}\, \rho^{\gamma} \mu^{\delta} \tag{2.13}$$

そうすると両辺の次元は

$$ML^{-2}T^{-2} = L^{\alpha}\,[\,LT^{-1}\,]^{\beta}\,[\,ML^{-3}\,]^{\gamma}\,[\,ML^{-1}T^{-1}\,]^{\delta}$$

から M：$1 = \gamma + \delta$，　L：$-2 = \alpha + \beta - 3\gamma - \delta$，　T：$-2 = -\beta - \delta$ となり，これから α,β,γ を δ で表すと，$\alpha = -1 - \delta$，　$\beta = 2 - \delta$，　$\gamma = 1 - \delta$ が得られます。これをもとの変数間の関係式（2.13）に入れると

$$\Delta p/\ell = kD^{-1-\delta}\, U^{2-\delta}\, \rho^{1-\delta} \mu^{\delta} = k\left(\frac{U^2\rho}{D}\right)\left(\frac{DU\rho}{\mu}\right)^{-\delta}$$

これから

$$\frac{\Delta p D}{\rho U^2 \ell} = k\left(\frac{DU\rho}{\mu}\right)^{-\delta} \tag{2.14}$$

と2個のπナンバーで表すことができました。（2.14）の左辺の $\Delta pD/\rho U^2\ell$ に1/2をかけたものはファニングの管摩擦係数[5]と呼ばれています。また右辺はレイノルズ数です。ただし，巾のδの値は次元解析から求めることはできません[6]。尚，円管内の流れが層流の場合においては，圧力損失を理論的に導くことができて、その結果は（2.14）の $\delta = 1$ とした式と一致します。

[5] これは壁面のせん断応力を平均流速 U に対する動圧で無次元化したもので，せん断応力÷流入運動エネルギーとなります。
[6] π ナンバーが2以上の場合は，その巾を次元解析からは決定できません。

2.2.3　その他の力学的相似則

圧縮性流体の場合

音速近辺かそれ以上の速度で飛んでいる飛行機では，周りの空気の密度分布が無視できなくなり，密度 ρ が場所によって異なる圧縮性流体として取り扱われます。圧縮性流体では，流体の慣性力と圧力変化に伴う体積弾性率が重要なファクターとなります。流体の圧縮性による力が主要なもので，他の力が無視できる場合にこの相似則が使われます。

$$\begin{aligned}&\text{慣性力} = \text{質量} \times \text{加速度} = \rho U^2 L^2\\&\text{弾性力} = \text{弾性率} \times \text{面積} = K \times L^2 = \rho c^2 L^2 \quad (c = \sqrt{K/\rho})\end{aligned}$$

ここで U は代表速度，L は代表長さ，ρ は密度，K は流体の体積弾性率，c は音速を表します。そこでこの両者の比をとった無次元数は

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{弾性力}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\rho c^2 L^2} = \frac{U^2}{c^2} = M^2 \tag{2.15}$$

となり，**マッハ数**M が等しいことが力学的相似を得るための条件となります。

重力が重要な流れの場合

重力だけが主要な力で，他の力は無視できる場合，この相似則が使われます。

$$\begin{aligned}&\text{慣性力} = \text{質量} \times \text{加速度} = \rho U^2 L^2\\&\text{重力による力} = \text{質量} \times \text{重力加速度} = g\rho L^3 \quad (g:\text{重力加速度})\end{aligned}$$

この両者の比をとると

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{重力による力}} = \frac{\rho U^2 L^2}{g\rho L^3} = \frac{U^2}{gL} = (Fr)^2 \tag{2.16}$$

となり，$Fr = U/(gL)^{1/2}$ をフルード数[7]といいます。したがってフルード数が等しいことが力学的相似則を満たすための条件となります。

表面張力が効く流れの場合

液体の表面張力による力が主要なもので，ほかの力が無視できる場合，この相似則が使われます。

$$\begin{aligned}&\text{慣性力} = \text{質量} \times \text{加速度} = \rho U^2 L^2\\&\text{表面張力} = \text{単位長さあたりの表面力} \times \text{長さ} = \sigma L\end{aligned}$$

この両者の比をとると

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力}} = \frac{\rho U^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} = We \tag{2.17}$$

が得られます。この W_e を**ウェーバー数**と呼んでいます。液滴が気流中を流れる場合の変形挙動や，気泡や液滴の界面の安定性問題の整理に使われます。ウェーバー数 $Fr = U/(gL)^{1/2}$ が等しいことが力学的相似則を満たすための条件となります。
このほかいろいろな無次元数が知られていますが，興味のある方はご自分で調べてください。

例題－6 航空機が硬度 10,000m を速度 270m/s で飛行している。この流れを/10 のスケール模型を用いて風洞実験で調べるとき，風洞の風速はいくらに設定すればよいか。ただし，高度 10,000m での音速を 297m/s，風洞での音速を 340m/s とする。
答： 高速気流の圧縮性流体となりますので，2 つの流れでマッハ数が一致すればよいことになります。

$$M = U/c = 270/297 = U/340 \quad \therefore \quad U = 309m/s$$

例題－7 全長 150m のタンカーが 8.0m/s で航行している。このタンカーの造波抵抗[8]を全長 3m の相似模型を使って調べたい。模型の航行速度をいくらにすればよいか。

[7] 英国の物理学者 ウイリアム・フルード（William Froude、1810〜1879）
[8] Wikipedia：船が低速で航走している時は船が受ける抵抗の主体は粘性摩擦抵抗であるが、速度が上がれば造波抵抗が主体となってくる。粘性摩擦抵抗は船体周囲の水流と船体表面の摩擦による抵抗である。粘性圧力抵抗は後部で渦を作る時の圧力差によって後ろに引かれる抵抗である。造波抵抗は船の航走時に波を作るエネルギーの分だけ失われる抵抗であり、船の速度の 2 乗に比例して増す。

答： 実船と模型とでフルード数が一致していればよいので

$$Fr = U/\sqrt{gL} = U_m/\sqrt{gL_m} \quad \therefore \quad U_m = U\sqrt{L_m/L} = 8.0\sqrt{3/150} = 1.13m/s$$

（了）

お疲れ様でした。１回目のお話はここで終了することにします。