

流体力学講話・つまみ食い(その10:最終回)

KENZOU

2008年9月14日

♣ 流体力学の花つまみ食い講話もとうとう最終回を迎えました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関した話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など, 4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念がでてきました。また, 静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は, 任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジュコフスキー定理, それから等角写像とその活用などの話題。6回目はカルマン(Karman)の渦列など, 渦の周りの流れの話題に触れました。第7回目は非圧縮性粘性流体の運動方程式, これは外力としてせん断応力等が登場するのでオイラーの運動方程式は適用できず, いわゆるナビエ・ストークスの方程式となりますが, このN-S方程式を2次元流体で導出し, 3次元に拡張しました。そして, N-S方程式の厳密解が得られる例(ハーゲン・ポアゼイユ流れなど)をとりあげました。第8話では x 軸に平行な乱流の話題に触れ, せん断応力の表式を求め, レイノルズ応力やブジネスクの仮定を経てプラントルの運動量輸送理論, 境界層理論のお話をしました。第9話では第8話の続きとして境界層剥離の話題に少し触れ, それから粘性流の「遅い流れ」, 有名なストークスの抵抗法則のお話をしました。第10回目は最終講として, 3次元の流体運動について少し触れたいと思います。2次元流れでは, 複素速度ポテンシャルを定義し, 複素関数論の知識を活用して流れを解明することができましたが, 3次元流れではそういううまい武器はなく, 速度ポテンシャル Φ に対するラプラスの方程式 $\nabla^2\Phi=0$ を何らかの方法で解いていくこととなります。一般的な話は大変重いので, ここでは非圧縮性の3次元流体の球の周りの流れについて簡単に触れ, 最後に(学生時代, 先輩が水槽と睨めっこしていたのを思い出しながら)水の波, 微小振幅波理論に少し触れて本講話の最終回とすることにします。それでは第10話をはじめます。

目次

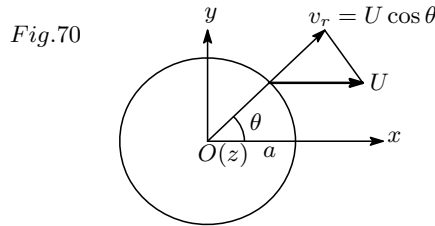
16 球のまわりの流れ	2
16.1 静止流体中を球が運動する場合のまわりの流れ	2
16.2 速度 U の一様な流れの中に球が固定されている場合のまわりの流れ	4
16.2.1 軸対称渦なし流れの「流れ関数」	6
16.3 Butlerの球定理	7
17 水の波(微小振幅波理論)	8
17.1 仮定と境界条件	8
17.2 速度ポテンシャルを求める	10
17.3 分散関係	11
17.3.1 浅水波と深水波	11
浅水波: $h/\lambda \ll 1$ の場合:非分散性	11
深水波: $h/\lambda \gg 1$ の場合:分散性	12
17.4 水の運動	12
17.4.1 群速度	13
17.4.2 定在波	14

=====

16 球のまわりの流れ

16.1 静止流体中を球が運動する場合のまわりの流れ

半径 a の球が静止流体中を運動する場合を考えます (渦なし流れ)。任意の時刻におけるその瞬間での球の運動方向を x とします。そして x 軸を極軸とする球面座標 (r, θ, φ) をとります。



球の速度を U として、 v_r を流速 v の動径方向の成分とすると

$$v_r = U \cos \theta \quad (16.1)$$

また、球からずっと遠方での流速はゼロということで、速度ポテンシャル Φ の満たすべき境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 & r > a \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= U \cos \theta & r = a \\ v = \nabla \Phi &\rightarrow 0 & r \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

となります。 ∇^2 の極座標表示は

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \end{aligned} \quad (16.3)$$

と表されます。流れは x 軸に関して対称な流れですから、 Φ は φ にはよらず関数の中に φ を含みません。そこで $\Phi = R(r)\Theta(\theta)$ と変数分離して (16.3) を作用させると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \Theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) R &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \frac{1}{R} &= - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \frac{1}{\Theta} = k \quad (k: \text{定数}) \end{aligned}$$

とおけます¹。そこでこの k を $l(l+1)$ とおいてやると上の等式は

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\Theta = 0 \quad (16.4)$$

という2つの2階常微分方程式に分離され、これらの一般解はそれぞれ

$$R = Ar^l + Br^{-l-1}, \quad \Theta = CP_l(\cos \theta) + DQ_l(\cos \theta) \quad (16.5)$$

で与えられます。ただし、 A, B, C, D は任意定数で P_l, Q_l は l 位の球面調和関数です²。

求める解は $\Phi = R(r)\Theta(\theta)$ ですが、一般に $P_l(z), Q_l(z)$ は $z = \pm 1$ に特異点を持つことが知られており ($\cos \theta = \pm 1$: つまり x 軸上)、 x 軸上に特異性を持つ解は不適当ということになります。ただ、 $l = n (n = 0, 1, 2, \dots)$

¹ Θ を含まない式と r を含まない式が等しいということは定数 k で結ばなければならないですね。… 確かどこかで同じようなケースがあったような。思い出せませんが。。。

² このあたりの展開は量子力学でお馴染みですね。

のときには $P_n(z)$ は z の n 次の多項式で与えられ、任意の z に対して正則になることが知られていますので³、これを使えば、求める解、つまり球の外部での渦なし流れの速度ポテンシャルは、 A_n, B_n を任意定数として

$$\Phi_n = (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.6)$$

あるいはそれらの重ね合わせ $\sum \Phi_n$ で与えられることになります。

尚、多項式 $P_n(z)$ は次式で与えられ

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad \dots$$

これらはルジャンドルの多項式 (Legendre's polynomial) と呼ばれています。

さて、無限遠での境界条件 ($\nabla \Phi \rightarrow 0 : r \rightarrow \infty$) より $A_n = 0$ でなければなりません。そうすると速度ポテンシャルは

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta) \quad (16.7)$$

となります。次に球面上での境界条件 ($\partial \Phi / \partial r = U \cos \theta : r = a$) を ($\partial \Phi / \partial r$) _{$r=a$} = $U P_1(\cos \theta)$ と書き改めると

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a} = -2B_1 a^{-3} P_1(\cos \theta) = U \cos \theta \longrightarrow B_1 = -\frac{1}{2} U a^3, \quad B_0 = B_2 = B_3 = \dots = 0$$

が得られ、最終的に求める速度ポテンシャルの解は

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{U a^3}{r^2} P_1(\cos \theta) = -\frac{1}{2} \frac{U a^3}{r^2} \cos \theta \quad (16.8)$$

となります。球が外力 F を受けて運動するものとする、 M を球の質量、 x を球の中心の位置ベクトルとして、運動方程式は

$$M \ddot{x} = F + P \quad (16.9)$$

で与えられます。そこで、球の運動によって引き起こされた (16.8) で表される流体のもつ運動エネルギー K を求めると、 $|\dot{x}| = U, v = \nabla \Phi$ より

$$\begin{aligned} K &= \iiint_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \rho \iiint_V (\nabla \Phi)^2 dV = \frac{\rho}{2} \iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \frac{\rho}{2} \iint_S \Phi v_n dS \\ &= \frac{\rho}{2} \iint_S \left(\frac{1}{2} U a \cos \theta \cdot U \cos \theta \right) dS = \frac{\rho}{4} U^2 a \iint_S \cos^2 \theta dS = \frac{\rho}{4} U^2 a \times 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \rho a^3 U^2 \end{aligned} \quad (16.10)$$

となります⁴。 n は流体から球の表面に向かう法線ベクトルで、いまの場合 $\partial \Phi / \partial n = -v_r$ です。一方、球自身の運動エネルギー は $K_0 = \frac{1}{2} M U^2$ であるので、この系全体の運動エネルギー T は

$$T = K_0 + K = \frac{1}{2} (M + M') U^2, \quad M' = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \quad (16.11)$$

となり、 M' はいわゆる仮想質量と呼ばれる⁵もので、球が流体中を運動することによる流体の慣性の影響で球の質量が M' だけ増加したように振舞います (M' はいまの場合、球がおしのけた流体の質量の $1/2$ に等しい)。

この系全体の運動エネルギーの増加分を dT とすると、これは外力 F が微小時間 dt の間になした仕事に等しいですから、球の微小変位を $dx = (dx/dt) dt$ とすると

$$F \cdot dx = dT = d \left[\frac{1}{2} (M + M') \dot{x}^2 \right] = (M + M') \dot{x} \cdot \ddot{x} dt = (M + M') \ddot{x} \cdot dx$$

³ 特異点を避けるやり方も量子力学でお馴染みと思います。詳しくは適当な QM のテキストを参照ください。

⁴ 体積積分を面積積分に換えるグリーンの公式 : $\iiint_V (\nabla \phi)^2 dV = \iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$ を使います。このとき、 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ は内向き勾配となります。

あるいはベクトル解析の公式より $(\nabla \phi)^2 = \nabla(\phi \nabla \phi), (\nabla \cdot \nabla^2 \phi = 0)$ を使うこともできます。

⁵ 流体中を物体が運動するときは、それにとまって流体がある程度動かされるために、その影響で物体の質量が見かけ上増加します。この増加分を誘導質量または仮想質量と呼んでいます。仮想質量は物体の形状に依存します。

となります。 dx は任意なので、上の式は

$$F = (M + M')\ddot{x} \quad (16.12)$$

となります。これが静止流体中での球の運動方程式です。圧力 P は (16.9) と (16.12) より

$$P = -M'\ddot{x} \quad (16.13)$$

と求められます。

具体的に、一様な重力場の中で静止している密度 ρ の流体中の密度 σ の球の運動を調べてみましょう。重力加速度を向きを考えて g とし、球の体積を V とすると球の質量と仮想質量 (球によっておしのけられた流体の質量の $1/2$) はそれぞれ

$$M = \sigma V, \quad M' = \frac{1}{2}\rho V$$

となります。球に働く外力は重力 Mg と浮力 $-\rho Vg$ ですから球の運動方程式は

$$\begin{aligned} Mg - \rho Vg &= (M - 2M')g = (M + M')\ddot{x} \\ \therefore \ddot{x} &= \frac{M - 2M'}{M + M'} = 2\frac{\sigma - \rho}{2\sigma + \rho}g \end{aligned} \quad (16.14)$$

となります。

さて (16.13) は、運動する球に作用する流体の力を運動エネルギーの考察から求めました。次に、球の表面に作用する圧力の計算から同じ表式を導出します。圧力方程式⁶ (拡張されたベルヌイの式) より

$$p - p_\infty = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 \right) \quad (16.15)$$

$p \equiv p - p_\infty$ として、球におよぼす流体の力 P は

$$\begin{aligned} P &= - \iint_S p n dS = -2\pi a^2 \int_0^\pi p \cos \theta \sin \theta d\theta = -2\pi \rho a^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= -2\pi \rho a^2 \int_0^\pi \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi \rho a^3 \dot{U} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{2}{3}\pi \rho a^3 \dot{U} = -\frac{2}{3}\pi \rho a^3 \ddot{x} \\ &= -2\pi \rho a^2 \int_0^\pi \frac{1}{2}q^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{\pi \rho a^2 U^2}{4} \int_0^\pi (3 \cos^3 \theta + \cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \\ \therefore P &= -\frac{2}{3}\pi \rho a^3 \ddot{x} = -M'\ddot{x} \end{aligned}$$

となって (16.13) と同じ表式が得られました。

[註] 円柱周りの2次元流れで円柱にかかる圧力の総和はゼロでした。これは上の式の $(1/2)q^2$ の項の寄与がゼロということと対応していると考えられます。結局 $\partial \Phi / \partial t$ の項が効いているのですね。速度ポテンシャルの時間変化はまわりの流体の慣性の影響を受けるということで仮想質量が顔をだすというか。。

16.2 速度 U の一様な流れの中に球が固定されている場合のまわりの流れ

次に、速度 U の一様な流れの中に半径 a の球が固定されている場合を考えます。球の中心を原点にとり、流れの方向に x 軸をとるとすると一様流の速度ポテンシャルは Ux となります。この系は、流体の球にたいする相対速度は $-x$ の方向で大きさは U なので、球の存在で引き起こされる速度ポテンシャルは (16.8) の符号を変えたものとなります。したがって系の速度ポテンシャルはこれらの重ねあわせですから

$$\Phi = Ux + \frac{1}{2} \frac{Ua^3}{r^2} \cos \theta = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (16.16)$$

⁶ 第3話 §4.1 参照。

となります。これから流速は

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (16.17)$$

この式を球形の気泡の運動にあてはめて考えてみましょう。この場合、 $\sigma \simeq 0$ と考えてもよいので、上式より $\ddot{x} = -2g$ となります。これから、気泡は速度 $v = -2gt$ の等加速度運動をすることがわかります。これは、鉛直上向きの一様な $2g$ の重力場における質点の自由運動と同じ運動を示していますね。また、球の表面での流速の大きさは

$$v_r = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{3}{2}U \sin \theta, \quad q = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_\theta| = \frac{3}{2}U |\sin \theta| \quad (16.18)$$

となります。2次元円柱の場合の最大速度は $2U$ でしたが⁷、球の場合は $(3/2)U$ となります。

次に、気泡に固定した座標系をとると、速度 U の一様流が気泡にあっていることとなります。Fig.71 のように気泡の前端を原点にとり、気泡の全面は半径 a の球面で表せるとします。気泡内の圧力を p_1 とすると、気泡表面で流体の圧力 p は p_1 となります。 q を気泡表面での流速とすると、ベルヌイの定理より

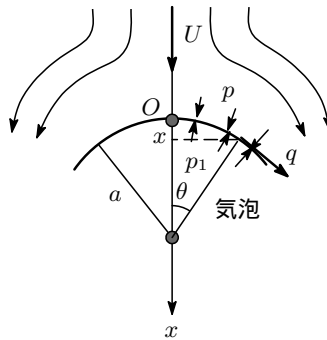
$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 - \rho g x = \text{const} = p_0$$

ここで p_0 はよどみ点 O での圧力で気泡の表面上にあるので $p_0 = p_1$ 、また、 $p = p_1$ なので、上式は

$$\frac{1}{2}\rho q^2 - \rho g x = 0$$

となります。

Fig.71



これから気泡表面での流速 q は

$$q = \sqrt{2gx} \quad (16.19)$$

となりますが、これは一様重力場での質点の自由落下運動における速度に等しいですね。

Fig.71 と (16.18) より、

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad q = \frac{3}{2}U \sin \theta$$

点 O の近くでは θ は小さいので

$$x \simeq \frac{a}{2}\theta^2, \quad q \simeq \frac{3}{2}U \theta \quad (\because \cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \sin \theta \simeq \theta)$$

と近似できるので (16.19) より

$$U = \frac{2}{3}\sqrt{ga} \quad (16.20)$$

が得られます。この気泡の上昇に対する理論式は実験結果を満足に表すことが知られています。気泡の上昇速度は半径の \sqrt{a} に比例するのですね (ビールの泡をよく観察してみましょう : 笑い)

⁷ 第4話 §5.3.1 参照。

16.2.1 軸対称渦なし流れの「流れ関数」

3次元の軸対称渦なし流れでは、速度ポテンシャル Φ が存在し、2次元流れでの流れ関数に対応するストークスの流れ関数 Ψ が定義できました⁸。速度の x, y 成分を u, v 、極座標成分を v_r, v_θ とすると

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & v &= -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ v_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, & v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

そして流線は2次元の場合と同様

$$\Psi(x, y) = \text{const} \quad (16.22)$$

で表されます。また、速度ポテンシャル Φ と速度成分の関係は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, & v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

これらの関係から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

が得られます。この関係を使うと、例えば流れ関数 Ψ がわかれば速度ポテンシャル Φ は(16.24)よりでてきます(vice versa)。ここで注意すべき点は(16.24)は2次元流れでのコーシー・リーマンの関係式(ϕ, ψ とも調和関数であった)に対応するものですが、 Ψ が調和関数ではないのでコーシー・リーマンの関係式は成り立ちません。したがって2次元流れのように複素ポテンシャルを定義し、複素関数論を使った理論を構成していくということができず、そこに3次元流れの解析的な取り扱いの難しさがあります。

《例-1》(16.24)の関係式を使って、球を過ぎるような流れの速度ポテンシャル Φ から流れ関数 Ψ を導出してみます。

$$\begin{aligned} \Phi &= U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \cdots \text{速度ポテンシャル} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, & \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= Ur^2 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \sin \theta, & \therefore \Psi &= \frac{1}{2} U \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \sin \theta, & \therefore \Psi &= \frac{1}{2} U \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

ということで、流れ関数がでてきました(積分定数はポテンシャルに直接効かないので省略)。

《例-2》次に流れ関数 Ψ から速度ポテンシャル Φ を導出してみます。

$$\begin{aligned} \text{流れ関数: } \Psi &= \frac{1}{2} U \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, & \therefore \Phi &= U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \sin \theta, & \therefore \Phi &= U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

ということで、速度ポテンシャルがでてきました(積分定数はポテンシャルに直接効かないので省略)。

ちなみに、球が静止流体中を流れる場合の速度ポテンシャル(16.8)から流れ関数 Ψ を求めると

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{Ua^3}{r^2} \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \Psi = -\frac{1}{2} \frac{Ua^2}{r} \cos^2 \theta \quad (16.25)$$

⁸ 第9話 §15.2.2 参照。

となります。 //

さて (16.24) から Ψ または Φ を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \therefore \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (16.26)$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (16.27)$$

が得られますが、 Φ と Ψ を支配する方程式が互いに異なることに注意が必要です (左辺第 3 項の符号が異なる)。速度ポテンシャル Φ は調和関数であるに対して Ψ は調和関数にはなりません。調和関数がそうでないかはラプラシアンをとればわかるので具体的に計算します。(16.23) と (16.24) から Ψ と Φ を消去していくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= -\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\ \therefore \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\ \therefore \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) &= 0 \iff \nabla^2 \Phi = 0 \text{ (ラプラスの方程式)} \end{aligned}$$

で、 Φ は調和関数であることがわかります。次に

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= -\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \\ \therefore \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) &= 0 \iff \text{ラプラスの方程式を満足しない!} \end{aligned}$$

ということで Ψ は調和関数でないことがわかりました。

16.3 Butler の球定理

Butler の球定理 (Butler's sphere theorem) というのを証明なしにあげておきます。これは、軸対称流れで、球が存在しない場合の流れ関数を $\Psi_0(r, \theta)$ とすると、球が存在するときの流れ関数は次式で与えられるというものです。

$$\left. \begin{aligned} \Psi(r, \theta) &= \Psi_0(r, \theta) + \Psi_1(r, \theta) \\ \text{ただし,} \\ \Psi_1(r, \theta) &= -\frac{r}{a} \left\{ \Psi_0 \left(\frac{a^2}{r}, \theta \right) - \Psi_0(0) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16.28)$$

ここで $\Psi(0)$ は、原点における Ψ_0 の値ということになります。この定理を使った例を次に示します。

球を過ぎる一様流を考えます。一様流は

$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} = U, \quad v = -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} = 0$$

与えられますので、これから流れ関数 Ψ_0 は

$$\Psi_0(r, \theta) = \frac{1}{2} U y^2 = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \rightarrow \Psi_0 \left(\frac{a^2}{r}, \theta \right) = \frac{1}{2} U \left(\frac{a^2}{r} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad \Psi_0(0) = 0$$

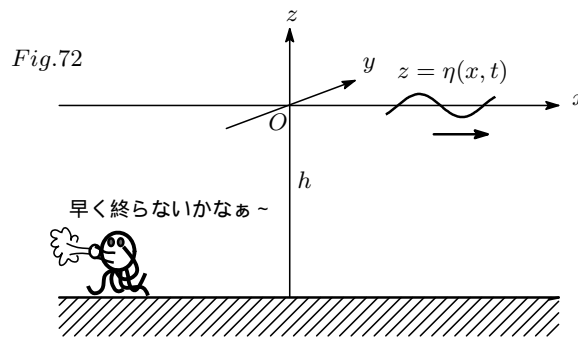
これを (16.28) に入れると

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2}U\frac{a^3}{r}\sin^2\theta, \quad \therefore \Psi = \frac{1}{2}U\left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right)\sin^2\theta$$

以上、簡単に計算できましたが、これは《例-1》で求めた結果と一致しますね。

17 水の波（微小振幅波理論）

最後に、水の波をとりあげます。水深が一定の水平な底の上にある水の表面に波が立っている、このような波は自由表面波と呼ばれます。自由表面波では粘性の影響は無視できるほど小さいので非圧縮性完全流体として取り扱えます。また、外力は重力だけとすると、重力は保存力ですのでラグランジュの渦定理により渦なし流れはずっと渦なし流れとなるので、結局、非圧縮性渦なし完全流体としての取り扱いができます。ということで流れはいわゆるポテンシャル流としての取り扱いが可能です。



17.1 仮定と境界条件

そこで、ここでは簡単のために波の振幅が水深および周期に比べて十分小さい微小振幅の1次元進行波について考えることにします⁹。水深は h とし水面上の波の進行方向を x 軸、それと垂直な方向に y 軸をとり、鉛直上方に z 軸をとります。必要な仮定と境界条件は以下の5点となります。

- (1) 速度 $v(u, w)$ は速度ポテンシャル ϕ で表すことができる。また、非圧縮性であるので速度ポテンシャルはラプラスの方程式を満足する (ϕ は調和関数)

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right), \quad \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (17.1)$$

- (2) 水底では底を突き抜ける水の動きはありませんから、境界条件として水底における下向き速度はゼロと考えると (図中のタコは無視すること: 笑い)

$$w = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0 \quad (17.2)$$

とおけます。

- (3) 水面の自由表面も境界条件の一つとなります¹⁰。水面の変位を

$$z = \eta(x, t)$$

と表し、これを変形すると境界面 (水面) は

$$F(z, x, t) = z - \eta(x, t) = 0 \quad (17.3)$$

⁹ これは「微小振幅波理論」と呼ばれています。

¹⁰ 第2話 §3.5.2「変形する境界面での境界条件」を参照。

という関数形で表せます。水面から水の粒子が飛びだすことなく、また、水面の曲面が連続であるためには微小時間 δt 後でも上式が成り立たねばならないので

$$F(x + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t) = 0 \quad (17.4)$$

(17.4) から (17.3) を差っ引いて δt で割り、その極限をとると¹¹

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{F(x + \mathbf{v}, t + \delta t) - F(z, x, t)}{\delta t} = \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F = 0$$

なります。右辺を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z, \eta)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla)F &= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) F = u \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \\ \therefore \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w = 0 \longrightarrow w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

となり、速度ポテンシャルで表すと

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (17.5)$$

となります。次に圧力方程式（一般化したベルヌイの定理）は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

と表すことができます。ここで水面の圧力はゼロという仮定をおくと

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = 0 \quad (z = 0) \quad (17.6)$$

(4) 振幅が極めて小さい微小振幅波とします。 $\eta \simeq 0$ とすると、水の粒子の速度 u, w も微量量となり (17.5) の右辺 2 次の項は無視できるので

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (z = 0) \quad (17.7)$$

また (17.6) から

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (z = 0) \quad (17.8)$$

となり、この 2 式から η を消去すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (17.9)$$

が得られます。

(5) 水面の波形は x 軸方向に進行する正弦波を仮定します¹²。

$$\eta(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \quad (17.10)$$

とします。ここで、 a : 振幅, k : 波数, ω : 振動数です。

以上で仮定と必要な境界条件の設定を終えます。

¹¹ 第 2 話 § 3.1.2 参照。

¹² 波の形状は現実には正弦波からずれており、振幅が増すと波の峯が尖り、谷が平になっていきます。このような波を Fourier 級で表したものをストークス波 (Stokes : 1847 年) と呼んでいます。

17.2 速度ポテンシャルを求める

解くべきターゲットの方程式と境界条件は次の通りです。

$$\left. \begin{array}{l} \text{渦なし流れ } (z \leq 0): \quad \nabla^2 \phi = 0 \\ \text{水底条件 } (z = -h): \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \text{水面条件 } (z = 0): \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \quad (17.11)$$

速度ポテンシャルの形を

$$\phi(x, z, t) = A(z) \cos(\omega t - kx) \quad (17.12)$$

と仮定し，ラプラスの方程式に入れると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -k^2 \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \left(\frac{\phi}{A} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \\ \therefore \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - k^2 A &= 0 \end{aligned} \quad (17.13)$$

となります。(17.13)の一般解はよく知られているように

$$A = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \quad (C_1, C_2: \text{定数}) \quad (17.14)$$

で与えられます。定数を決めるのに水底条件(17.2)を(17.10)に適用すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} &= k(C_1 e^{-kh} - C_2 e^{kh}) \sin(kx - \omega t) = 0 \longrightarrow C_1 e^{-kh} - C_2 e^{kh} = 0 \\ \therefore \quad C_1 &= C_2 e^{2kh} \end{aligned}$$

これから A は

$$\begin{aligned} A &= C_2 (e^{2kh} e^{kz} + e^{-kz}) = C_2 e^{kh} (e^{kh} e^{kz} + e^{-kh} e^{-kz}) = 2C_2 e^{kh} \frac{e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}}{2} \\ &= 2C_2 e^{kh} \cosh k(h+z) \end{aligned} \quad (17.15)$$

と求まり，速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = 2C_2 e^{kh} \cosh k(h+z) \cos(kx - \omega t) \quad (17.16)$$

ということになります。次に定数 C_2 は(17.8)より

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -2C_2 e^{kh} \frac{\omega}{g} \cosh(kh) \sin(kx - \omega t) \\ &= a \sin(kx - \omega t) \\ \therefore \quad C_2 &= -\frac{ag}{2\omega} \frac{1}{e^{kh}} \end{aligned}$$

となるので，求める速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = -\frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (17.17)$$

と無事求めることができました。

17.3 分散関係

次に振動数 ω (or 位相速度 v) と波数 k の関係を決める分散式を求めます¹³。 λ を波長, T を周期とすると, $k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi/T$ として (17.7) より

$$\frac{agk \sinh kh}{\omega \cosh kh} \sin(kx - \omega t) = \omega a \sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore \omega^2 = gk \tanh kh = gk \tanh \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) \quad (17.18)$$

$$\therefore \lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right) \quad (17.19)$$

$$\therefore v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (17.20)$$

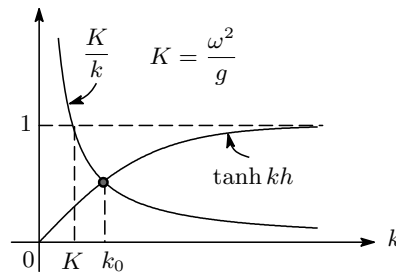
が得られます。位相速度 v は波長とともに変化することがわかります。

さて (17.18) の関係式は Fig.73 のようにグラフを描くとわかりやすくなります。

$$\left(\frac{\omega^2}{g} \right) \frac{1}{k} = \frac{K}{k} = \tanh kh \quad (K = \omega^2/g) \quad (17.21)$$

とします。 $\tanh kh$ は単調増加関数なので (17.21) を満たす k は Fig.73 のように必ず 1 点求まります。その点を $k = k_0$ とします。

Fig.73



水深が無限大 ($h \rightarrow \infty$) の時は $\tanh kh \rightarrow 1$ となり, $k_0 = K$ となります。一方, 水深が有限のときには必ず $K < k_0$ であるので, 水深が浅くなるにつれて波長はだんだん短くなるのがわかります。

17.3.1 浅水波と深水波

浅水波: $h/\lambda \ll 1$ の場合: 非分散性 波長 λ が水深 h に比べて十分大きい, あるいは水深が波長に比べて十分小さい場合です。この場合は

$$\tanh(2\pi h/\lambda) \sim 2\pi h/\lambda \quad (h/\lambda \ll 1) \quad (17.22)$$

と近似できます¹⁴。したがって波の伝播速度である位相速度 $v (= \omega/k)$ は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \quad (17.23)$$

となつて, 位相速度 v は水深 h だけで決まり波長 λ に関係しなくなるので, 波は 分散的でない こととなります。このような波を浅水波 (Shallow-water wave) と呼んでいます¹⁵。

¹³ 位相速度が波数の関数であれば (分散関係があれば), それぞれの波で速度が異なるので波の起伏は時間とともに分散しながら伝播し, 一方, 分散的でなければ波の初期の起伏は分散せずそのままの形で伝播します。

¹⁴ 水深 h が波長 λ の $1/100$ 以下で 1%, $1/20$ 以下で 5% 以下の誤差で成り立ちます。

¹⁵ 深い, 浅いといっても波長と水深の相対的なもので, 例えば地震で発生する津波は波長が 100Km を超えるといわれていますが, 津波の波長は海の水深 4~6Km に比べると十分大きいので浅水波ということになります。仮に水深を $h = 4\text{Km}$ とすると津波の速度は約 $v \simeq 700\text{Km/h}$ となり, 新幹線の平均速度を 200Km/h とすると 3.5 倍の速さになりますね。

深水波： $h/\lambda \gg 1$ の場合：分散性 波長 λ が水深 h に比べて十分小さい，あるいは水深が波長に比べて十分大きい場合です。この場合は

$$\tanh(2\pi h/\lambda) \sim 1 \quad (h/\lambda \gg 1) \quad (17.24)$$

と近似できます¹⁶。波長は (17.19) より

$$\lambda \simeq \frac{gT^2}{2\pi} \quad (17.25)$$

となって，波長は周期 T の 2 乗に比例し，水深 h は関係しないことがわかります。波の伝播速度である位相速度 $v (= \omega/k)$ は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (17.26)$$

となって，波長の平方根に比例 します。このように位相速度 v は波長 λ あるいは波数 k によって変化するので分散的 となります。このような波を深水波 (Deep-water wave) と呼んでいます。

17.4 水の運動

余談ですが，海水浴にいくとよく浮き輪遊びをしますね。浮き輪につかまって波に揺られ気分もぶかぶかしますが。。波は浜辺に向かって進んでいるのに浮き輪の当人は海面を Up/Dwon するだけで前進も後退もしない (というか体験上，微前進，微後退はしている)，ということをご経験されていると思います。水の波は物を運んでくれない？ 一体どうなっているのということで，ここでは波による水粒子の運動について調べることにします。

さて，速度は次式で与えられます。右辺は (17.18) を使って整理しています。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk \cosh k(h+z)}{\omega \cosh kh} \sin(kx - \omega t) = a\omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t) \quad (17.27)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk \sinh k(h+z)}{\omega \cosh kh} \cos(kx - \omega t) = a\omega \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (17.28)$$

これを時間 t で積分すると水粒子の移動距離 (x, z) が求まることにはなりますが，水粒子の位置 (x, z) は時間 t とともに刻々と変化しているため，単純に積分するわけにはいきません。そこで妥当な近似が必要になるわけですが，いま振幅は微小としているので水粒子の移動も微小と考えられます。水粒子の位置を $\mathbf{r}_0(t) = (x_0(t), z_0(t))$ で表すと¹⁷，速度 \mathbf{v} はその時間微分ですから

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$$

いま， \mathbf{r}_0 が時々刻々と変化し，その移動量がオイラー座標 $\mathbf{r} = (x, z)$ からみて微量 $d\mathbf{r}$ とすると，

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$$

と表せます。これを \mathbf{r} のまわりにテイラー展開すると

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{r}_0 + \frac{(d\mathbf{r})^2}{2!} \nabla^2 \mathbf{r}_0 + \dots = \mathbf{r} + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{r}_0 + \frac{(d\mathbf{r})^2}{2!} \nabla^2 \mathbf{r}_0 + \dots$$

となるので，両辺を時間 t で微分して 2 次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} &\simeq \frac{d\mathbf{r}}{dt} + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \right) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \nabla \mathbf{v} \\ &= \nabla \phi + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \nabla^2 \phi \\ &= \nabla \phi \end{aligned} \quad (17.29)$$

が得られ，これを積分してやると

$$\int \left(\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \right)_x dt = \xi = x_0 - x = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dt = a\omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \int \sin(kx - \omega t) dt = a \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t)$$

$$\int \left(\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \right)_y dt = \zeta = y_0 - y = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dt = a\omega \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \int \cos(kx - \omega t) dt = a \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t)$$

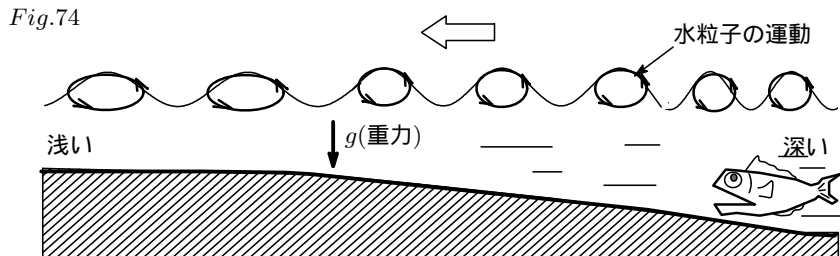
¹⁶ 水深 h が波長 $\lambda/2$ の半分より大きければ 1% 以下の誤差で成り立ちます。

¹⁷ 注目している水粒子の動きを追跡しますのでラグランジュの立場¹⁸となります。

となります。これを变形すると

$$\frac{\xi^2}{\left(a \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{\left(a \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\right)^2} = 1 \quad (17.30)$$

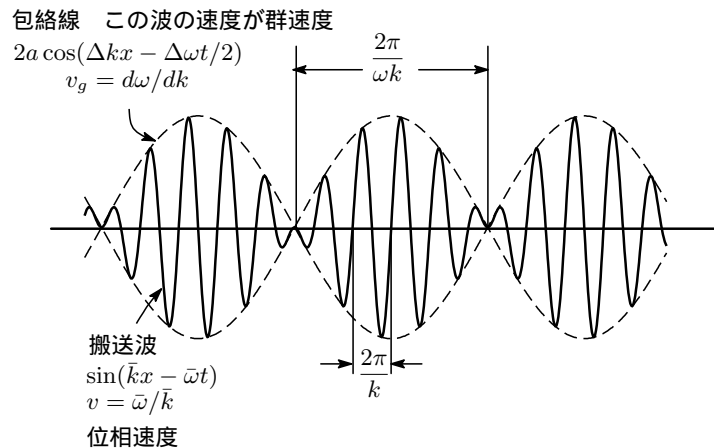
という楕円の方程式ができました。 $\cosh(x) > \sinh(x)$ なので、水粒子の運動の軌跡は長径を $a \cosh k(h+z)/\sinh kh$ 、短径を $a \sinh k(h+z)/\sinh kh$ とする進行方向に細長い楕円軌道を描くことがわかります。水深 h が浅いところほど楕円は扁平になります。ということで、冒頭の浮き輪の件ですが、水の "波" は伝播するが "水粒子" は移動しないので浮き輪も移動しないということになります。



17.4.1 群速度

いままでのお話は単一の周波数 ω と波数 k をもつ波についての話でした。ここではもう少し拡張して、同じ振幅の少し異なる周波数と波数をもつ波が重なり合っている状況を考えます。

Fig.75



$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta k = k_1 - k_2, \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

とにおいて、2つの波の重ね合わせは三角関数の加法定理をつかって

$$\eta(x, t) = a \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a \sin(k_2 x - \omega_2 t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta \omega t) \sin(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \quad (17.31)$$

と表されます。右辺の $2a \cos(\Delta k x - \Delta \omega t)/2$ は $\sin(\bar{k} x - \bar{\omega} t)$ という波(搬送波)の振幅変調を表す項ですね。この項が波の群(波群)を表し、波群の伝播速度を群速度(group velocity)と呼んでいます。群速度は次式で定義されます。

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kv}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (\because k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda) \quad (17.32)$$

分散関係式 (17.21) を使って群速度 v_g を計算してみます。

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= gk \tanh kh, & v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k} \tanh kh} \\
 2\omega \frac{d\omega}{dk} &= g \tanh kh + gk \frac{h}{\cosh^2 kh} \\
 &= g \tanh kh \left(1 + \frac{kh}{\cosh kh \sinh kh} \right) = g \tanh kh \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \\
 \therefore \frac{d\omega}{dk} &= \frac{g}{2\omega} \tanh kh \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{g}{2} \frac{\tanh kh}{\sqrt{gk \tanh kh}} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{1}{2} v \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \\
 \therefore v_g &= \frac{1}{2} v \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \tag{17.33}
 \end{aligned}$$

また、ロピタルの定理より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2kh}{\sinh 2kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh 2kh} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2kh}{\sinh 2kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh 2kh} = 0$$

なので、浅水波 ($h \rightarrow 0$) と深水波 ($h \rightarrow \infty$) での群速度はそれぞれ

$$\text{浅水波: } v_g = \frac{1}{2} v \quad (h \rightarrow 0) \tag{17.34}$$

$$\text{深水波: } v_g = v \quad (h \rightarrow \infty) \tag{17.35}$$

となります。これから 深水波では群速度は位相速度の半分 となり、浅水波では群速度は位相速度に等しい、ということがわかります。

17.4.2 定在波

「う~み~は~ひろいなあ~大きいなあ~」と防波堤などで釣りをしていると、海がず~っと遙か向こうまで拡がっておりその広大さに日頃のものよりも吹っ飛びますが、それはともかくとして、足もとの波の動きを見るとおよそ定位置でチャブチャブしているのがわかります。これは壁に向かって進んでくる波と壁で反射した波が重なり合ひ、定在波となっているのです。そこで定在波のことを少し調べてみることにします。

波の進行方向を x 軸にとります。波は壁で反射し、壁では速度がゼロということで次の境界条件が加わります。

$$\text{壁の境界条件: } \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \tag{17.36}$$

速度ポテンシャル ϕ は (17.17) で与えられましたが、再掲すると

$$\phi = -\frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \tag{17.37}$$

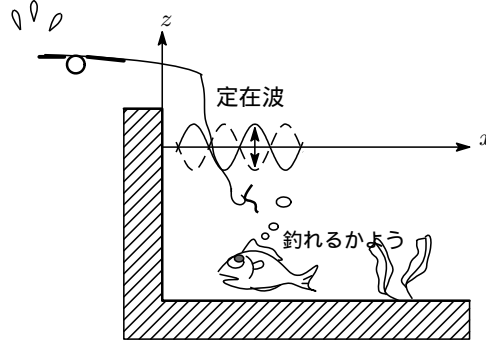
でした。これは進行波の速度ポテンシャルです。そこで、壁に向かって進んでくる波 (progressive wave) と壁で反射された波を重ね合わせた波の速度ポテンシャルは、それぞれの速度ポテンシャルの重ね合わせで表されるとしてそれを ϕ_K とすると

$$\begin{aligned}
 \phi_K &= -\left\{ \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) + \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(-kx - \omega t) \right\} \\
 &= -\frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \{ \cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t) \} \\
 &= -2 \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \cos \omega t \tag{17.38}
 \end{aligned}$$

となります。この速度ポテンシャルは壁の境界条件 (17.36) を満足します。

$$\left(\frac{\partial \phi_K}{\partial x} \right)_{x=0} = -\left(2k \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin kx \cos \omega t \right)_{x=0} = 0 \tag{17.39}$$

Fig.76



次に、波の波形 η ですが、これは水底の境界条件 (17.8) を使うとすぐ得られます。

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_K}{\partial t} \right)_{z=0} = 2a \sin kx \sin \omega t \quad (17.40)$$

この波形は座標部と時間部が分離しており、振幅は x に比例し時間に依存しない格好をしているので、この波は進行しない定在波 (standing wave)¹⁹であることがわかります。

定在波にはご周知のように振幅がゼロとなる節 (node) と最大になる腹 (loop) があり、その位置は (17.40) からそれぞれ

$$\text{節: } x = \frac{(n + 1/2)\pi}{k} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{腹: } x = \frac{n\pi}{k} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となります。これから防波堤の壁位置は振幅最大の腹に当たることがわかりますね (そいえば波は常に壁を這い上がるようにいたっけ。高波に教われないように注意しよ~っと: 笑い)

(了)

つまみ食い講話もなんとか最終回を迎えることができました。まあ、自分なりに十分時間をかけ、ゆっくり咀嚼してまた書くかもしれませんが、暫くは流体力学とおさらばします。お疲れ様でした~。

尚、毎度の注意ですが、私の理解の浅さにもとづく誤った記述やミススペル等を見つけられたらご自分で訂正いただくか、お手数でもお気軽にご一報いただけるとありがたいです。

それでは、またお会いできる機会を楽しみに ...

*GOOD LUCK !
SEE YOU AGAIN !*

2008.9.14
HENLOU

¹⁹ 定常波 (stationary wave) ともいわれます。