

流体力学講話・つまみ食い(その2)

KENZOU

2008年7月26日

♣ 流体力学のお話も2回目に入りました。1回目は流体というものをどう捉えるのかというお話から始めて、流体の種類、流れのふる舞い、そしてよく知られているレイノルズ数という相似則の話まで進めました。2回目は、完全流体の基礎方程式を中心に話を進めようと思います。流体の運動状態をどのように表すかということで、ラグランジュの立場とかオイラーの立場というのがあります。ちょっと先走って概略説明しておきますと、ラグランジュ的な立場というのは、質点系の力学のように注目する流体粒子が時間とともにどのように動いていくか、流体粒子の位置を $x(t), y(t), z(t)$ と時間の関数として表すという立場で、もう一方のオイラー的な立場というのは、特定の流体粒子の運動を追いかけるのではなく、ある着目した位置を通過する流体粒子の運動を考えるという立場になります。したがって例えば流速は $u = u(x, y, z)$ と表します。これは場の理論の立場ですね。さて、粘性のある流体は後回しにして、まずは簡単な粘性のない完全流体の運動方程式を導出します。それから流れというのは流体粒子(先ほどから流体粒子といっていますが、これは米粒のような Solid のイメージではなく、流体の中の微小な体積要素、いわば流塊のようなものをイメージしてください)の並進運動、回転運動に加え、ひしゃげた運動の合成であることをみて、最後に渦について少し触れます。それでははじめます。

目次

3 完全流体の基礎方程式	2
3.1 ラグランジュの方法とオイラーの方法	2
3.1.1 ラグランジュの方法	2
3.1.2 オイラーの方法	3
3.2 連続方程式(質量保存の法則)	3
3.2.1 ラグランジュの方法による連続方程式の導出	3
3.2.2 オイラーの方法による連続方程式の導出	4
3.3 運動方程式(運動量保存の法則)	5
3.3.1 オイラー的立場からの運動方程式の導出	5
3.3.2 ラグランジュ的立場からの運動方程式の導出	7
3.4 熱力学的エネルギーの方程式(エネルギー保存の法則)	8
3.4.1 状態方程式	8
3.4.2 熱力学的エネルギーの方程式	8
3.5 境界条件	9
3.5.1 固定表面での境界条件	9
3.5.2 変形する境界面での境界条件	9
3.6 流れの図化	10
3.6.1 流線・流跡線・流管	10
3.7 流体粒子の運動	11
3.8 渦運動と渦なし運動	13
3.8.1 速度ポテンシャル	13

=====

3 完全流体の基礎方程式

流体の運動を記述するには、流体内部の各点¹で任意の時刻に速度 v （流速3成分）、密度 ρ 、温度 T の5つの物理量を指定することにより、流体の運動が完全に記述できることとなります。逆にいうと、流体の運動状態を決める変数の数は5個ですから、これらを決定するためには5個の方程式を立てる必要があります。ところで、任意の物理現象において、質量保存則（連続の式）、運動量保存則、エネルギー保存則（熱力学第1法則）という保存則が知られています。質量とエネルギーはスカラー量ですからそれぞれ1個、運動量はベクトル量ですから3個の関係式をもってあり、合計5個の量に対して保存則が成り立っています。この保存則を使うことによって、結局5個の未知量が原理的に決定できることとなります。ということで、流体の運動に関して保存則を具体的に表したものが流体力学の基礎方程式となり、それを解くことによって流体の運動を決定することができるようになります。

3.1 ラグランジュの方法とオイラーの方法

流体の運動状態を表す方法としてラグランジュの方法とオイラーの方法という2通りの方法があります。ラグランジュの方法は、流体を構成する個々の粒子を時々刻々追跡することにより流体全体の運動を捉えるという立場で、座標位置 x, y, z は時間の関数 $x \equiv x(t), y \equiv y(t), z \equiv z(t)$ となります。一方のオイラーの方法は、任意時刻 t において、空間の各点で流れをウォッチするという立場で、流れに関する物理量は位置座標 (x, y, z) の関数となります²。例えば速度は $v \equiv v(x, y, z)$ のように表されます。これはいわゆる“場”の立場ということになります。それではラグランジュの方法とオイラーの方法をみていきましょう。

3.1.1 ラグランジュの方法

時刻 $t = 0$ 、いわゆる初期条件で流体粒子の座標を (a, b, c) とします。この粒子が任意の時刻 t で座標 (x, y, z) の点にきたとすると、 x, y, z は a, b, c, t の関数として

$$\begin{aligned}x &= f_1(a, b, c, t) \\y &= f_2(a, b, c, t) \\z &= f_3(a, b, c, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

と表すことができます。そして関数 f_1, f_2, f_3 の具体的な形が分かれば、流体の運動は完全に知ることができます。(3.1)の a, b, c は物質座標と呼ばれますが、流体は連続体ですので、注目している連続体としての微小部分、つまり“粒子”を明確にしておかないとすぐごっちゃになってわけがわからなくなりますが、これを防ぐために付けたラベルと思えばいいでしょう。したがって、 $t = 0$ での粒子の位置座標は物質座標として便利な選び方の1つではありますが、必ずしもそれが唯一の選び方というものでもありません。

さて、ラグランジュの方法における速度、加速度の定式化をみてみます。流体粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r}(x, y, z)$ とすると、速度は

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)\tag{3.2}$$

で与えられます。ここで $\partial/\partial t$ は物質座標 (a, b, c) を一定に保っての時間微分です。(3.2)をさらに t について微分すると加速度ベクトルが得られます。

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)\tag{3.3}$$

ラグランジュ微分とオイラー微分

時間微分について、流体粒子に付随する物理量が流体の運動とともに時間的にどう変化するかということは、流れを考察していく上で重要な問題です。流体粒子に付随する物理量の流れに沿っての時間変化、時間微分をラグランジュ微分（あるいは物質微分）と呼び、 D/Dt で表します。一方、空間のある固定点でみたときの物理量の時間変化、つまり時間微分をオイラー微分と呼び、 $\partial/\partial t$ で表します。

¹ 点といっても質点ではなく、流体内の微小部分を仮想的な粒子とみなします。これを流体粒子と呼びます。

² x, y, z はラグランジュの方法の場合とことなり、独立変数となります。

3.1.2 オイラーの方法

オイラーの方法は、任意の時刻 t において、空間の各点 $r(x, y, z)$ で流速 v や圧力 P 、密度 ρ などの物理量がどんな値をもつかウオッチして流れのようすを掴むという方法で、流れを表す物理量を x, y, z の関数として調べようというものでした。いま、流体粒子に付随した1つの物理量 F がオイラーの方法で x, y, z の関数として与えられたとします。ある時刻 t で点 $r(x, y, z)$ にあった流体粒子が、微小時間 Δt 後に点 $r + v\Delta t = (x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$ に達したとします。このとき、流体粒子とともに移動してみた物理量 F の時間変化 ΔF は

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}u\Delta t + \frac{\partial F}{\partial y}v\Delta t + \frac{\partial F}{\partial z}w\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + O((\Delta t)^2)\end{aligned}\quad (3.4)$$

となります。したがって、 F のラグランジュ微分は

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}\quad (3.5)$$

となり、 F は任意の物理量ですから (3.5) より F をはずすと

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\quad (3.6)$$

となって、ラグランジュ微分とオイラー微分の関係が得られます。

先ほど、ラグランジュの方法のところ、速度は $v = dr/dt$ で与えられることをみました。ラグランジュ微分で再度確かめておきましょう。 F として流体粒子の位置 $r(x, y, z)$ をとります。

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u \frac{\partial x}{\partial x} + v \frac{\partial x}{\partial y} + w \frac{\partial x}{\partial z} = u, \quad \frac{Dy}{Dt} = v, \quad \frac{Dz}{Dt} = w \quad \therefore \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{v}$$

となって、ラグランジュの方法では $D/Dt = \partial/\partial t$ であることがわかります。

	ラグランジュの方法	オイラーの方法
D/Dt	$\partial/\partial t$	$\partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$

速度 v の時間微分は加速度ですが、速度のラグランジアン微分は加速度を α として

$$\alpha = \frac{Dv}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}^2}{Dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\quad (3.7)$$

となります。それでは、次に質量保存則、いわゆる連続方程式の導出に取り組むこととします。

3.2 連続方程式 (質量保存の法則)

3.2.1 ラグランジュの方法による連続方程式の導出

連続の方程式 (質量保存則) をラグランジュの方法で導出します。各辺の長さが $\delta x, \delta y, \delta z$ の微小体積要素の流体粒子を考えます。流体の密度を ρ とすると、流れに伴ってその微小体積 δV の質量は流体の変形にはよらず一定ですから

$$\frac{D}{Dt}(\rho\delta V) = 0\quad (3.8)$$

となります。微分を実行し、整理していくと

$$\frac{D\rho\delta V}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\delta V}{Dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}\quad (3.9a)$$

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{D}{Dt}(\delta x \delta y \delta z) = \frac{1}{\delta x} \frac{D\delta x}{Dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{D\delta y}{Dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{D\delta z}{Dt} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\quad (3.9b)$$

が得られます。ここで $\delta V \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.10)$$

となりますから (3.9a) は

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.11)$$

となります。この式は、流体粒子に伴う密度変化は、体積変化を伴う $\nabla \cdot \mathbf{v}$ のみによって生じることを示しています。非圧縮流体の場合は密度の時間変化はゼロですから

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.12)$$

となります。これに加えて、非圧縮性流体の場合、時間的に流れが変化する非定常流に対しても連続方程式は見かけ上時間に依存しないということになります。

ラグランジュ微分は $D/Dt = \partial/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{v}$ でしたから (3.11) をさらに変形していくと

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.13)$$

となって、連続の方程式が得られます (すぐあとのオイラーのところでもできますが、この方程式はオイラーの連続方程式と呼ばれます)。 $\rho \mathbf{v}$ は質量流速と呼ばれます。

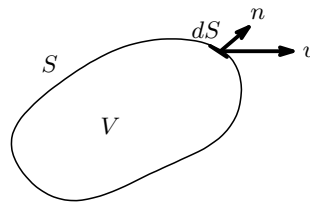
3.2.2 オイラーの方法による連続方程式の導出

流れの中に、空間に固定した任意の閉曲面 S を考えます。 S に囲まれた領域を V とすると、任意の時刻で V に含まれる質量は

$$\iiint_V \rho dV \quad (3.14)$$

となります。

Fig.8



単位時間当たりの質量変化は³、

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad (3.15)$$

で、この質量変化は流体が表面 S を通して領域 V に流れ込む、あるいは流れ出ることによって起こると考えられます。表面 S の面積要素 dS に垂直な単位法線ベクトルを \mathbf{n} をとると、 dS を通って単位時間に流出する質量は流速を \mathbf{v} として $\rho \mathbf{v}_n dS$ となります。したがって S 全面を通っての全流出量は、全表面積にわたっての積分となりますから

$$\iint_S \rho \mathbf{v}_n dS \quad (3.16)$$

となります。これは領域 V からでていく全流出量ですから、これにマイナス符号をつけたものが (3.15) に等しいとなりますから

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \mathbf{v}_n dS \quad (3.17)$$

³ ここでは積分を先に済ませるので積分値は時間のみの関数となっていますので、時間微分は常微分となります。

ここで面積積分と体積積分を結びつけるガウスの定理⁴を使って整理すると

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (3.18)$$

となります⁵。この式が任意の領域で成り立つには被積分関数が恒等的にゼロでなければならないから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.19)$$

となって、連続の方程式が得られました。これはオイラーの連続方程式と呼ばれています。

3.3 運動方程式（運動量保存の法則）

3.3.1 オイラー的立場からの運動方程式の導出

流体内に領域 V を考えます。 V に含まれる運動量は $\iiint_V \rho \mathbf{v} dV$ ですから、単位時間当たりの V に含まれる流体の運動量の時間的变化は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV \quad (3.20)$$

となります。この時間的变化を起こさせる要因を考えてみます。いま、流体の各部分には単位質量あたり $K(X, Y, Z)$ の外力が作用しているとすると、体積要素 dV に作用する外力（体積力）は $\rho K dV$ となります。また、 V の外側にある流体からは $-\int_S p n dS$ の圧力による力を受けています。マイナスの符号は微小面積 dS に作用する $p dS$ の大きさの圧力が $-n$ の方向に向いていることを意味します。ということで注目する流体の V に作用する力は、これらの合力ですから

$$\iiint_V \rho K dV - \int_S p n dS \quad (3.21)$$

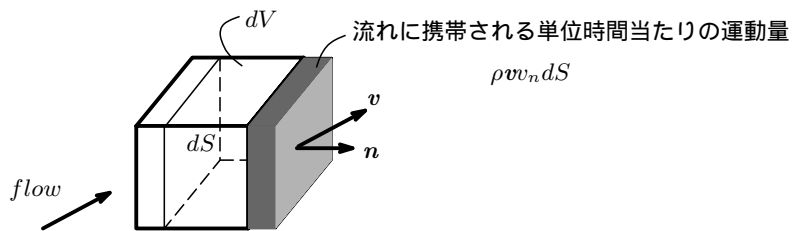
となります。

次に、流体が流れる際に運動量を携帯していくことによる運動量の変化を考慮する必要があります。面積要素 dS を通って流出する流体の単位時間当たりの体積は $v_n dS$ ですから、それに携帯される運動量は $\rho v v_n dS$ となります。したがって、表面 S を通して V に流入する単位時間当たりの運動量は

$$-\int_S \rho v v_n dS \quad (3.22)$$

ということになります。

Fig.9



以上のことを整理すると、運動量保存の法則は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{v} dV = \iiint_V \rho K dV - \int_S (p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} v_n) dS \quad (3.23)$$

⁴ ガウスの定理： $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$

⁵ 時間微分は被積分関数に直接作用しますから偏微分になります。尚、空間積分と時間微分が交換できるのをレイノルズの輸送定理というらしいです。

ここで (3.22) の式を成分に分けて書くと, i 成分 ($i = 1, 2, 3$) は

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho K_i dV - \iint_S (pn_i + \rho v_i v_n) dS \quad (3.24)$$

となります。ここでガウスの定理より導かれる公式

$$\iint_S Q n_i dS = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} dV \quad (3.25)$$

を使うと (3.24) の右辺の面積積分の第 1 項は

$$\iint_S pn_i dS = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \quad (3.26)$$

第 2 項は, アインシュタインの規約⁶を使って $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \sum_{k=1}^3 v_k n_k \equiv v_k n_k$ と書けるので

$$\iint_S \rho v_i v_n dS = \iint_S \rho v_i v_k n_k dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) dV \quad (3.27)$$

となる。これらを使うと (3.24) の積分は

$$\iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) - \rho K_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \right) dV = 0 \quad (3.28)$$

となって, 被積分関数をゼロとおくと

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.29)$$

が得られます。(3.29) をさらに展開すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) &= \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_i v_k + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k + \rho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) v_i + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

となり, これを (3.29) に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) v_i - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここで連続の方程式 (3.19)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0$$

を使うと (3.30) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = K_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.31)$$

となる。これがオイラーの方法で表した運動方程式となります。(3.31) を手を抜かずにと書くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.32)$$

⁶ 1 つの項に同じ添字が 2 度現れた場合は, その添字について総和をとる。

となります。また、ラグランジュ微分を使うと

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (3.33)$$

と簡潔に書くことができます。外力 \mathbf{K} としては、普通様な重力は使われ、その場合、鉛直方向に z 軸をとると

$$\mathbf{K} = (0, 0, -g) \quad (3.34)$$

となります。(3.32) は、非圧縮性、圧縮性に限らずすべての非粘性流体に対して成り立ちます⁷。

3.3.2 ラグランジュ的立場からの運動方程式の導出

オイラーの方法の場合、空間に固定した領域 V における流体の単位時間当たりの運動量の変化は外力と内力の合力に加え、流体が流れる（運動量の携帯）ことによる領域 V への単位時間当たりの運動量の変化とバランスしているということから運動方程式を導出しました。この“運動量の携帯”という項がオイラーの方法を特長付けています。一方、ラグランジュの方法の場合は、流体粒子の動きを時々刻々追いかける方法です。体積要素 dV の流体の運動量は $\rho v dV$ 、この運動量の時間変化はニュートンの第2法則により、この部分に作用している力に等しいからラグランジュ微分を使って

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho v dV &= \iiint_V \rho \mathbf{K} dV - \iint_S p n dS \\ &= \iiint_V \rho \mathbf{K} dV - \iiint_V \nabla p dV \end{aligned} \quad (3.35)$$

となります。最後の変形ではガウスの定理を使いました。(3.35) は任意の V について成り立つので、積分記号をとりはずし、整理すると

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (3.36)$$

となります。この式は(3.33)と同じですね。

例題 - 8 定常流れの場合の運動方程式を解け。

答：流体内の任意の位置 s における流体の速度を q とすると、完全流体の運動方程式は(3.32)より一般に次式で与えられる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial s} = F - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (3.37)$$

定常流れの場合、 $\partial q / \partial t = 0$ であるので

$$q \frac{\partial q}{\partial s} = F - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} dq^2 + \frac{1}{\rho} dp - F ds = 0$$

流体が非圧縮性の場合、 $\rho = \text{const}$ となるので、上式を積分すると

$$\frac{1}{2} q^2 + \frac{p}{\rho} - \int_0^s F ds = \text{const}$$

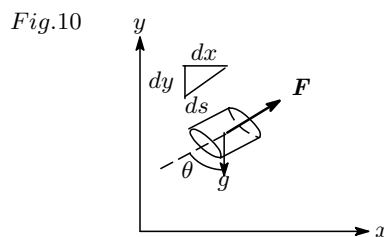


Fig.10

⁷ 粘性流体の運動方程式はナビエ・ストークスの式と呼ばれます。これは第 x 回目（笑い）でお話しする予定です。

外力として重力のみ作用しているとすると $F = -g \cos \theta = -gdy/ds$ であるので

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} - \int_0^s F ds \longrightarrow \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gy = const \longrightarrow \frac{q^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + y = const \quad (\gamma = \rho g)$$

とよく知られたベルヌイの式が得られる。

3.4 熱力学的エネルギーの方程式 (エネルギー保存の法則)

3.4.1 状態方程式

連続の流体を記述する 5 個の方程式のうち、連続の方程式 (3.19) と運動方程式 (3.36) で 4 個の方程式が得られました。残る 1 個の方程式は熱力学的エネルギー保存則を利用することが考えられます。エネルギー保存則は、熱力学第 1 法則として知られており、これは、古典力学のエネルギー保存則を普遍化したエネルギー保存則です。ある系になされる仕事を δW 、系に流入する熱量を δQ とすると、その系の内部エネルギー E と運動エネルギー K の増加 dE, dK は

$$dQ = dE + dK - dW \quad (3.38)$$

という関係が成立⁸します。また、熱力学第 2 法則より、準静的変化に対しては

$$dQ = TdS \quad (3.39)$$

と、 dQ は絶対温度 T とエントロピーの全微分 dS で表されることは周知の通りです。流体の運動は (3.38) と (3.39) の条件のもとに起こりますが、具体的に流体の運動を調べていく上ではいくつかの条件を仮定します。

- (1) 等温変化 外界の温度が一定という条件化で、流体が比較的ゆっくり流れており、流体全体が熱平衡状態にあると考えられる場合には、流体は全体を通じて温度一定で、かつ時間的には等温変化をおこないます。この場合は、独立に変化する熱力学的な変数は 1 個だけとなり、密度と圧力は関数関係で結ばれます。例えば理想気体のボイル-シャルルの法則

$$p = (R/m)\rho T \quad R: \text{気体定数}, m: \text{分子量}$$

に代表されるように、等温的な流れでは $p \propto \rho$ となって、圧力は密度 ρ のみによって決まります。

- (2) 等エントロピー変化 また、いわゆる断熱的条件下 ($dQ = 0$) では $dQ = TdS$ で状態変化は等エントロピー変化となります。この場合、圧力と密度の関係は

$$p \propto \rho^\gamma, \quad \gamma: \text{比熱比 } C_p/C_v \quad (3.40)$$

となります。ちなみに γ は、He や Ar のような 1 原子分子では $\gamma = 5/3$, O_2, N_2 のような 2 原子分子では $\gamma = 7/5$, CO_2 などの 3 原子分子, CH_4 などの多原子分子では $\gamma = 4/3$ です。

- (3) バロトロピー流 一般に、密度 ρ が圧力 P だけに依存する流体をバロトロピー流 (barotropic flow) といいます。非圧縮性流体は当然バロトロピー流です。

$$\rho = f(p) \quad (3.41)$$

3.4.2 熱力学的エネルギーの方程式

流体内に単位体積あたり発熱量 Q の熱源があり、また熱流 q があるとします。流体の微小体積 ΔV のエントロピーは $\rho S dV$ ですので、単位時間当たりの熱量の変化はエントロピーを S をすると $T \frac{D}{Dt}(\rho S \Delta V)$ となります。これは、流体の熱源による発熱量 $Q \Delta V$ と熱流 q による "熱の携帯量" $\nabla \cdot q \Delta V$ の和ですから⁹

$$T \frac{D}{Dt}(\rho S \Delta V) = (Q - \nabla \cdot q) \Delta V$$

⁸ 状態変数 E, K との区別を明確にする点から $\delta Q, \delta W$ と書かれることもありますが、ここでは特に実害もないので区別しないことにします。

⁹ (3.25) 参照。

とかけます。 $\rho\Delta V$ は流体の質量で、これは一定ですから、微分の外に出して式を整理すると

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = Q - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.42)$$

が得られます。これが熱力学的エネルギー方程式です。通常、気体は熱伝導性が悪いので、熱源や熱流が存在しない場合は断熱的、つまり等エントロピー変化という仮定が成り立つことが知られています。

3.5 境界条件

運動方程式を解く場合、微分方程式の初期条件あるいは境界条件を設定しなければなりません。ここでは境界条件について概観することします。

3.5.1 固定表面での境界条件

流れの中に固定された固体、あるいは流体の中を固体が動く場合の境界条件ということになります (Fig.11-1)。固体表面の1点における流速を $\mathbf{v}(u, v, w)$ 、固体の速度を $\mathbf{v}'(u', v', w')$ 、また、その点における法線ベクトルを $\mathbf{n}(l, m, n)$ とします。ここで n, l, m は方向余弦です。流体と固体の相対速度の法線成分は、もし $v_n > v'_n$ であれば流体は固体から離れていき、その間に真空を生じさせることになり、逆に $v_n < v'_n$ であれば、流体は固体の中に入り込んでいくことになり、流体が出入りできない固体表面であればこのようなことは起こりえません。したがって、この場合の境界条件は

$$v_n - v'_n = (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} = l(u - u') + m(v - v') + n(w - w') = 0 \quad (3.43)$$

となります。特に固体が静止している場合は $\mathbf{v}' = 0$ であるので

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = lu + mv + nw = 0 \quad (3.44)$$

となります。

3.5.2 変形する境界面での境界条件

魚が尻尾をくねらせて泳ぐとか、水と油のように互いに混ざり合わない2種の流体が隣り合っているような場合などがこの境界条件に相当します。境界面の形を

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (3.45)$$

という曲面の式で表します。この場合も、境界面上での各点での流体の境界面に対する相対速度の法線成分はゼロとなりますから、相対速度は境界面の接平面方向を持つこととなります。したがって、ある瞬間に境界面上にあった流体粒子は、微小時間 Δt の間、境界面に沿って動くこととなります。時刻 t での流体粒子の位置を $rX(x, y, z)$ 、流速を $\mathbf{v}(u, v, w)$ とすると、 $t + \Delta t$ 後には $r + \mathbf{v}\Delta t$ の位置にいます。この位置も境界面上の位置になりますから (3.45) より

$$F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) = 0 \quad (3.46)$$

となります。両辺を Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - F(x, y, z, t)}{\Delta t} = \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.47)$$

(3.45) を t で微分すると

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) F = \frac{DF}{Dt} \quad (3.48)$$

ですから、結局

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (3.49)$$

となり (3.45) と (3.49) が変形する境界面での境界条件となります (Fig.11-2)。

Fig.11-1

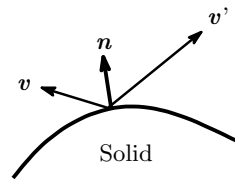
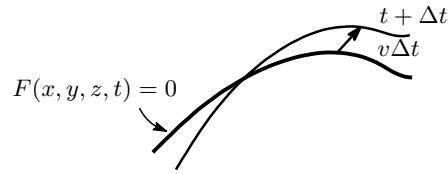


Fig.11-2



3.6 流れの図化

流れの様子を図で描くと非常にわかりやすくなります。一般に利用される曲線として流線 (streamline)・流跡線 (path line) があり、流線については流管 (stream tube) という概念も使われます。

3.6.1 流線・流跡線・流管

流線というのは、流体の流れに沿って引いた曲線で、その上の各点での接線がその点における流速ベクトル v の方向に一致するものです。流れの中に x, y, z の直角座標を取り、任意の点での流速の成分を u, v, w とすると、すべての流れにおいて

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.50)$$

が成立します。これはオイラー的なものといえます。

流跡線というのは、ある特定の流体粒子に着目してその粒子が通過してきた経路を描いた曲線です。これはラグランジュ的なものといえます。なお、定常流の場合は、流線と流跡線は一致します。

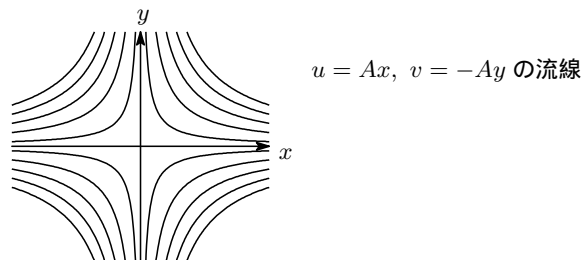
流管というのは、流体中に任意の閉曲線をとって、この閉曲線を通る流線を考えると1つの管ができます。この管を流管といいます。定常流では、流管の形は時間的に不変ですが、非定常流の場合は流管は時々刻々変化しますので、この場合は各瞬間における流れの方向を示すだけとなります。

例題 - 9 非圧縮性流体の2次元流れで、速度成分が $u = Ax, v = -Ay$ ($A > 0$) で与えられる流れの流線を求めよ。

答：(3.50)より

$$\frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{-Ay} \quad \rightarrow \quad \log x = \log y + C \quad \therefore xy = \text{const}$$

流線は x, y 軸を漸近線とする直角双曲線となる。



例題 - 10 非圧縮性流体の2次元流れにおいて、速度成分が $u = ay, v = bx$ を満足する流線の方程式を求めよ。

答：(3.50)より

$$\frac{dx}{ay} = \frac{dy}{bx} \quad \rightarrow \quad bxdx - aydy = 0 \quad \therefore bx^2 - ay^2 = \text{const}$$

3.7 流体粒子の運動

流体粒子の運動を考えるにあたって、簡単化して微小な流体の小球を考えます。その球の中心を原点 O として、球内の任意の点 P の座標を $r(x, y, z)$ とします。微小な大きさを持つ粒子の運動は、重心に対する並進運動と回転運動で表されることは力学で周知のことと思います。流体の場合、これに加えてひずみによる運動が加わります。このあたりのことを以下に見ていきましょう。 P 点での流速 v は r の関数で、 v を原点周りにテイラー展開すると

$$v = v_0 + \left[x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 + z \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \right] + \dots \quad (3.51)$$

となります。 v_0 は中心 O での流速です。高次の微量を無視して、速度 v を成分に分けて書くと

$$v = v_x i + v_y j + v_z k \equiv v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ として、

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 &= x \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} i + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} j + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} k \right) = x(a_{11} i + a_{21} j + a_{31} k) \\ y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 &= y \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} i + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} j + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} k \right) = y(a_{12} i + a_{22} j + a_{32} k) \\ z \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 &= z \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} i + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} j + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} k \right) = z(a_{13} i + a_{23} j + a_{33} k) \end{aligned}$$

となるので、これを (3.51) に入れると

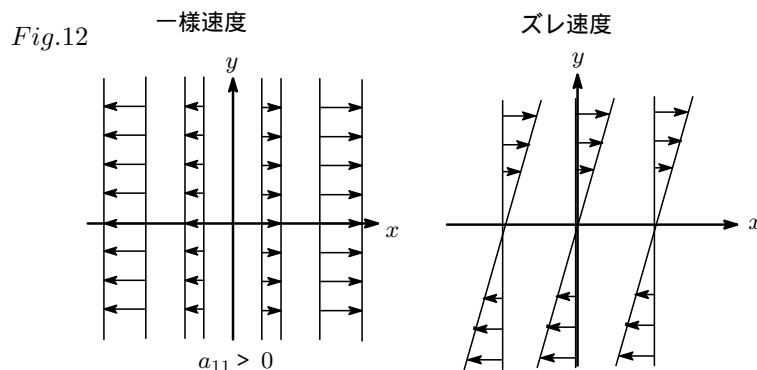
$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_{11} x i + a_{12} y i + a_{13} z i \\ &\quad + a_{21} x j + a_{22} y j + a_{23} z j \\ &\quad + a_{31} x k + a_{32} y k + a_{33} z k \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\text{ただし, } a_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)_0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

となって、流速 v は合計 9 種類の速度と流体粒子の並進速度 v_0 の合成で、詳細に見ると次のようになります。

- $a_{11} x i$: x 軸方向に向いて速度の大きさは距離 x に比例 ($a_{11} > 0$: 一様な伸び, $a_{11} < 0$: 一様な縮み)。
- $a_{22} y i$: y 軸方向に向いて速度の大きさは距離 y に比例。符号により伸びと縮み。
- $a_{33} z i$: z 軸方向に向いて速度の大きさは距離 z に比例。 "
- $a_{12} y i$: x 軸方向に向いているが、大きさは距離 y 、つまり xz 平面からの距離に比例 (ズレ速度)。
- $a_{13} z i$: x 軸方向に向いているが、大きさは距離 z 、つまり xy 平面からの距離に比例 (")
- ⋮

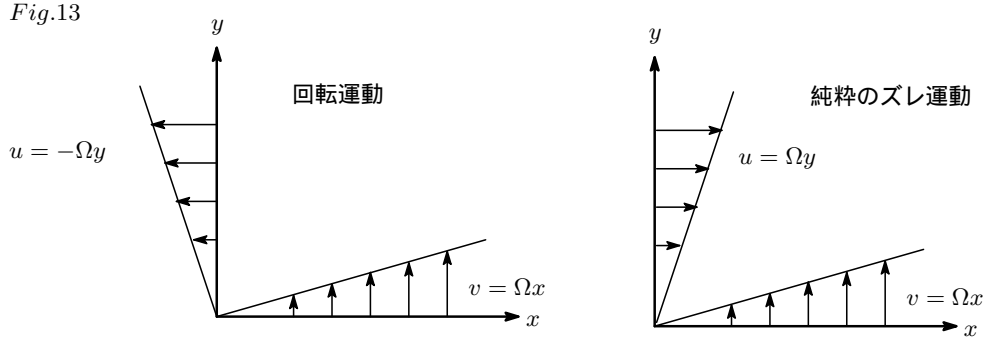
ということで、3 種類の距離に比例する一様な速度と 6 種類のずれ速度の合成であることがわかります。



ズレ速度を見やすい形に整理して

$$\begin{aligned}
 a_{12}y\mathbf{i} + a_{21}x\mathbf{j} &= \Omega_z(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(x\mathbf{j} + y\mathbf{i}), & \Omega_z &= \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}), & \gamma_{xy} &= (a_{21} + a_{12}) \\
 a_{13}z\mathbf{i} + a_{31}x\mathbf{k} &= \Omega_y(z\mathbf{i} - x\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\gamma_{zx}(z\mathbf{i} + x\mathbf{k}), & \Omega_y &= \frac{1}{2}(a_{31} - a_{13}), & \gamma_{zx} &= (a_{31} + a_{13}) \\
 a_{23}z\mathbf{j} + a_{32}y\mathbf{k} &= \Omega_x(y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) + \frac{1}{2}\gamma_{yz}(y\mathbf{k} + z\mathbf{j}), & \Omega_x &= \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}), & \gamma_{yz} &= (a_{32} + a_{23})
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

とすると、第1項目の Ω_z の項は z 軸周りの角速度 Ω_z の回転を表し¹⁰、第2項の $(1/2)\gamma_{xy}(x\mathbf{j} + y\mathbf{i})$ は、 x 軸と y 軸の成す角が単位時間あたり γ_{xy} だけ減少するような運動、つまり正方形がひし形にひしゃげるような運動を表します。



(3.52) を整理すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \Omega_x(y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) + \frac{1}{2}\gamma_{yz}(y\mathbf{k} + z\mathbf{j}) + \epsilon_x x\mathbf{i} \\
 &\quad + \Omega_y(z\mathbf{i} - x\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\gamma_{zx}(z\mathbf{i} + x\mathbf{k}) + \epsilon_y y\mathbf{j} \\
 &\quad + \Omega_z(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(x\mathbf{j} + y\mathbf{i}) + \epsilon_z z\mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \Omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \Omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.55}$$

ここで、流速の速度成分は原点0での流速であることに注意してください。上の表記では速度成分の添字0は省略しています。さて(3.54)の構成をみると速度 \mathbf{v}_0 の並進運動に加えて、角速度 Ω ($\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$)の回転、ひしゃげるような純粋のズレ運動 (γ_{ij})、 x, y, z 軸方向の一様な伸び縮み運動 (ϵ_i)を同時におこなっていることがわかります。ということで、流体の運動を総括すると、流体粒子はその形を変形させながら流れ、回転する小さな独楽の集団運動とみなすことができ、また粘性を考慮する場合は独楽自身が伸び縮みしたりひしゃげたりすると考えるべきだということになります¹¹。

¹⁰ 角速度ベクトルを Ω とすると、ベクトル \mathbf{A} を回転軸まわりに回す時の時間的変化率は $\mathbf{A}/dt = \Omega \times \mathbf{A}$ 。角速度ベクトルが z 軸を向いている場合、 $\Omega \times \mathbf{A} = (-\Omega A_y, \Omega A_x, 0) = \Omega(A_x \mathbf{j} - A_y \mathbf{i})$ となる。

¹¹ 運動中に接線応力の現れる流体を粘性流体と呼びました(講話・その1参照)。

3.8 渦運動と渦なし運動

流体が変形せずに1点を中心に回転する流れを渦流れとよび、流速 v の rot をとったものを渦度 ω (vorticity) といいます。

$$\begin{aligned}\omega &= \text{rot} v = (\xi, \eta, \zeta) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.56)$$

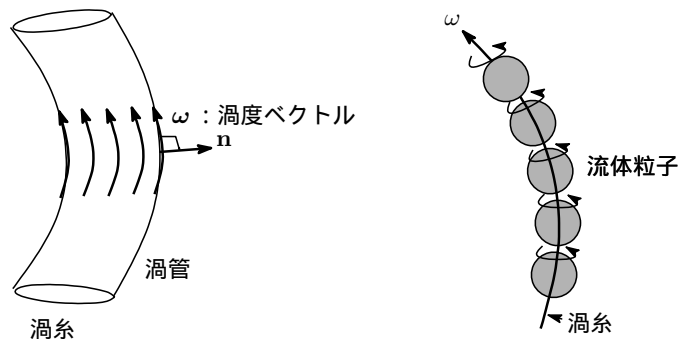
渦度と回転角速度 Ω の関係は (3.55) より

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega \quad (3.57)$$

となります。 $\omega=0$ は渦なし、 $\omega \neq 0$ なら渦あり、あるいは渦運動をするといえます。回転運動をする流体が柱上の管を形成するとき、これを渦管(vortex tube)と呼び、渦管に含まれる流体部分を渦糸 (vortex filament) といいます。また、渦糸の沢山並んだ面を渦面(vortex sheet)といえます。流線を (3.50) で定義したように、渦線の任意の点における接線が渦度ベクトルに平行であるような曲線が渦線となります。渦線の方程式は次式で与えられます。

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \quad (3.58)$$

Fig.14



註：流体の微小部分は独楽のように回転しており、Fig.14の右図のように数珠つなぎになって回転する細長い流体の部分が得られます。これが渦糸で、数珠の糸が渦線です。ラグランジュの渦定理（第3話に登場予定）によれば、完全流体ではこの数珠つなぎになった流体部分は、数珠自身の形が運動中どのように変わっても、いつでも数珠糸を軸として回転続けることとなります。例題-12も参照ください。

3.8.1 速度ポテンシャル

渦なしの流れでは

$$\text{rot} v = 0 \quad (3.59)$$

ですから、スカラーポテンシャル ϕ が存在し、速度ベクトル v は

$$v = \nabla \phi \quad (3.60)$$

と表せます。この ϕ を速度ポテンシャルと呼んでいます。成分にわけて書くと

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.61)$$

となります。 $\phi = \text{const}$ で表される曲面を等ポテンシャル面といえます。等ポテンシャル面上の法線ベクトルを n とすると、

$$n \parallel \nabla \phi \quad \longrightarrow \quad n \parallel v$$

ですから，流線は等ポテンシャル面に直交します。また，

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n}$$

と書けるので¹²

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = q \quad (3.62)$$

ここで q は速度の大きさ ($q = |\mathbf{v}|$) です。ということで，速度ポテンシャルの法線方向の微分は流速の大きさを与えることがわかります。

例題 - 11 密度一定の流体について 2 次元オイラー方程式より次の渦度方程式を導け。

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_z = 0, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

答：密度 ρ が一定で外力が作用しない 2 次元オイラー方程式は (3.32) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.64)$$

(3.63) と (3.64) の両辺に $\partial/\partial y$, $\partial/\partial x$ をかけると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

(3.66) から (3.65) を差し引き，密度が一定ということから $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$ を使うと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

となる。ここで $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ について整理すると

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \omega_z + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0 \quad (3.68)$$

流体は非圧縮性なので連続の方程式 (3.12) より $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ がなりたつから，上式は

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_z = 0$$

となる。

例題 - 12 2 次元理想流体の流れ (非粘性流体) においては $d\omega_z/dt = 0$ となることを示せ。ただし，外力はポテンシャル U より導かれるものとする。

答：2 次元オイラー方程式は (3.32) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.70)$$

¹² 方向微分は $\nabla \phi$ と方向ベクトル ℓ を使って $d\phi/d\ell = (\nabla \phi) \cdot \ell$ で表される。

例題-11 と同じ処方で整理すると (3.68) を得る。非圧縮性流体であることを考慮すると

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0$$

を得る。 ω_z の時間微分は

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

であたえられるので、これは上式よりゼロである。完全流体では、渦が存在すればその渦は消えないし、はじめに渦がなければ新しく発生することもない。流体に粘性が存在すると渦度は拡散していく。

例題 - 13 2次元流れの速度が $u = 2xy \mathbf{i} + (x^2 - y^2) \mathbf{j}$ であるとき、この流れは渦なしか。

答：2次元流れの渦度は ω_z のみ関係するので

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (2x - 2x) = 0$$

であるから渦なし流れである。

例題 - 14 非圧縮性流体の流れの成分が $(u, v, w) = (u, x^2 + y^2 + z^2, -yz - zx - xy)$ で与えられるとき、速度ベクトルの第1成分 $u(x, y, z)$ はどのような関数であるか。

答：非圧縮流体は連続の方程式 (3.12) より

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

これに流れの成分を入れると $\partial u / \partial x = x - y \rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 - xy$

例題 - 15 オイラーの運動方程式はガリレイ変換で不変であることを示せ。

答：ガリレイ変換は2つの座標系 $(x, y, z), (x', y', z')$ の相対速度を $U(U, V, W)$ とすると

$$x' = x - Ut, \quad y' = y - Vt, \quad z' = z - Wt, \quad t' = t \quad (3.71)$$

で表される。また、速度は(??)を t で微分して

$$u' = u - U \quad v' = v - V, \quad w' = w - W$$

を得る。さらに時間で微分すると2つの座標系の相対速度 U は一定だから

$$du'/dt = du/dt \quad dv'/dt = dv/dt, \quad dw'/dt = dw/dt$$

となって、加速度はガリレイ変換で変わらない。オイラーの方程式 (3.36) の左辺の $D\mathbf{v}/Dt$ は流体の加速度で、加速度はガリレイ変換にたいして不変であるので、結局(??)は変換後もそのまま成り立つことになる。

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

註：ニュートン力学の運動方程式 $\mathbf{F} = m\alpha$ は加速度しかでてこないのがガリレイ変換に対して運動方程式は不変となります。このことを「ニュートン力学はガリレイ変換に関して共変な理論である」といっています。

例題 - 16 $u = ay, v = 0, w = 0$ という速度場 ($a > 0$) が与えられたとき、ズレ運動と回転運動に分解せよ。また渦度を求めよ。

答：(3.55) よりズレ運動と回転速度はそれぞれ

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

であるから、与えられた速度成分を入れると $\gamma_{xy} = a, \Omega_z = -\frac{a}{2}$ 、渦度は (3.57) より $\omega_z = 2\Omega = -a$ となる。

(了)

お疲れ様でした。2回目のお話はここで終了します。振り返ると、つまみ食いのはずが今井功「流体力学（前編）」を結構詳細にフォローしているような感じで、3回目は「つまみ食い」の主旨に則っておりある程度端折りながら話を進めようと思います。しかしどうなることやら。。



図 1: <http://linn.jugem.cc/?eid=748> より拝借