

流体力学講話・つまみ食い(その3)

KENZOU

2008年8月2日

♣ 流体力学のお話も3回目となりました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話, 2回目は, ラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出, 境界条件, 流線・流管と流体粒子の運動に伴う渦に関する話でした。3回目は2回目で得られた完全流体の運動方程式の活用や有名なベルヌイの定理の話, そして2回目で少し触れた渦の話としてラグランジュの渦定理等まで話を進めたいと思います。それでははじめます。

目次

4	運動方程式の展開	2
4.1	渦なしの流れ	2
4.2	ベルヌイの定理の応用 - 定常流の場合 -	3
4.2.1	気体への応用	4
4.3	ベルヌイの定理の応用 - 非定常流の場合 -	5
4.3.1	一様な太さの管の中を流れる非定常流	5
4.3.2	断面が緩やかに変化する管の中の非定常流	7
4.3.3	流線曲率の定理	7
4.4	ラグランジュの渦定理	8
4.5	渦度と循環	9
4.5.1	循環	9
4.5.2	渦管の強さ	10
4.5.3	ケルビンの循環定理	11
A	付録(参考)	12
	空間曲線	12
	方向微分係数	13
	ストークスの定理	13

=====

4 運動方程式の展開

オイラーの運動方程式を便利な形に書き換えることから始めます。オイラーの運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (4.1)$$

でした。ベクトル解析の公式 $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ を使うと

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \\ (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x^2}{\partial x}, \frac{\partial v_y^2}{\partial y}, \frac{\partial v_z^2}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \nabla q^2 \quad (q = |\mathbf{v}|) \\ \therefore (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \frac{1}{2} \nabla q^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \end{aligned}$$

となるので、オイラーの運動方程式は

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{2}\nabla q^2 + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}) \quad (4.2)$$

と書けます。この方程式を出発点とします。

一般的な流体として、密度 ρ が圧力 p だけの関数であるバロトロピー流体をとりあげ、次のような P という圧力関数を導入します。

$$dP = \frac{dp}{\rho} \quad \longrightarrow \quad P = \int^p \frac{dp}{\rho} \quad (4.3)$$

そうすると

$$\nabla P = \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (4.4)$$

となり (4.2) は

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \nabla \left(P + \frac{1}{2}q^2 \right) + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.5)$$

となります。

4.1 渦なしの流れ

渦なし流れの場合には速度ポテンシャル ϕ が存在し、速度 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

と表されます (第2話 §3.8.1 参照)。運動方程式は

$$\mathbf{K} = \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P \right) \quad (4.6)$$

となります。外力 \mathbf{K} がスカラー関数の勾配 ∇ で与えられますから、渦なし流れの場合の \mathbf{K} は保存力でなければならないこととなります。そこで外力のポテンシャルを U とすると $\mathbf{K} = -\nabla U$ となるので運動方程式 (4.2) は

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P + U \right) = 0 \quad (4.7)$$

となります。ここで括弧内の関数を ϕ とすると (4.7) はいたるところの流れの場で $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = 0$ であることとなりますから、関数 ϕ は時間 t だけの関数ということとなります。そこで (4.7) を積分し、積分定数を時間 t だけの任意関数 $f(t)$ とおくと

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + P + U = f(t) \quad (4.8)$$

が得られます。(4.8) は圧力方程式とか一般化したベルヌイの定理と呼ばれます。

4.2 ベルヌイの定理の応用 - 定常流の場合 -

保存力場での定常的な流れは $\partial v / \partial t = 0$, $\mathbf{K} = -\nabla U$ ですから (4.5) は

$$\nabla \left(\frac{1}{2} q^2 + P + U \right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (4.9)$$

となります。この式の

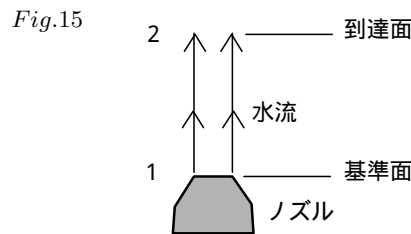
$$H = \frac{1}{2} q^2 + P + U \quad (4.10)$$

をベルヌイ関数と呼ぶことにします。渦なし流れ ($\boldsymbol{\omega} = 0$) , あるいは渦線が流線と一致 ($\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}$) する場合は, $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ となって $H = \text{const}$ となります。(4.10) の右辺第1項は単位質量のもつ運動エネルギー, 第2項は圧力によって蓄えられるポテンシャルエネルギーとし, 第3項は外力により位置エネルギーですから, $H = \text{const}$ は流線上でのエネルギー保存則を表しています。一様な重力場で非圧縮性流体が運動する場合には $P = p/\rho$, $U = gz$ とおいて

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2 + \rho g z = \text{const} \quad (4.11)$$

が得られます。これはよく知られたベルヌイの定理です。上の議論からわかるように, const は流線ごとに異なる値をとること, また, 渦なし流れでは const は流れの場をとおして一定値を取ることに留意してください。

例題-17 垂直上方に向けたノズルより水を噴出させる。ノズルの出口における水の速度を 20m/sec とすれば, 水の最高上昇高さは何 m になるか。ただし, 空気と水との摩擦は無視する。



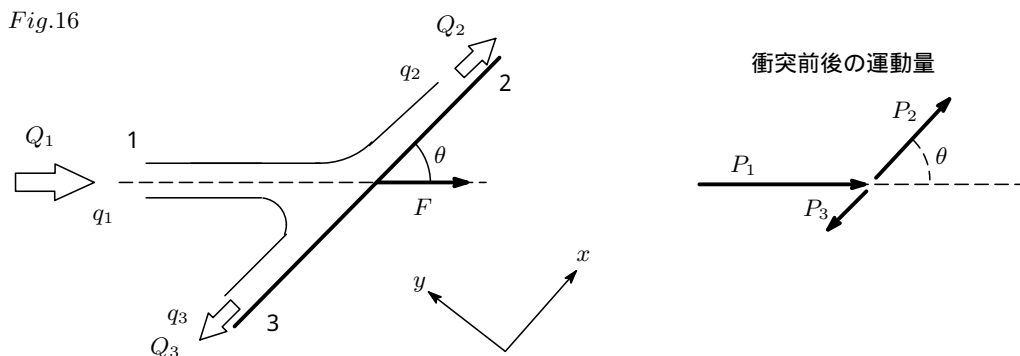
答: ノズルから噴出された流れは定常なのでベルヌイの式を使うことができる。ノズルの噴出口での速度, 圧力, 高さをそれぞれ v_1, P_1, z_1 とし, 最高上昇高さでの速度, 圧力, 高さをそれぞれ v_2, P_2, z_2 とすると

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$\therefore z_2 - z_1 = \frac{1}{2g} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

圧力についてはともに大気圧に接しているので $P_1 = P_2$ 。最高到達点では $v_2 = 0$ であるので, 上式に $v_1 = 20$ を入れると $z_2 - z_1 = 20.4\text{m}$

例題-18 密度 ρ , 体積流量 Q_1 , 流速 q_1 の水の噴流がこれと θ の角度をなす平板に衝突し, Fig.16 のように2と3の方向に分かれるとする。体積流量 Q_2, Q_3 を求めよ。また, 噴流が板に作用する噴流方向の力の成分を求めよ。板と水との摩擦はなく, 重力は無視できるものとする。



答： x, y 座標軸を Fig.16 のようにとる。噴流は定常流で広がっていないので、噴流内の圧力は一様に大気圧に等しいと考えることができる。連続の式より

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (4.12)$$

1 と 2 , 1 と 3 の間にベルヌイの定理を適用すると

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho q_1^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho q_2^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho q_3^2 \quad \therefore q_1 = q_2 = q_3 \quad (4.13)$$

噴流が板に当たる前後での運動量保存則を立てると、板に当たる前の x 軸方向の噴流の運動量は $\rho Q_1 q_1 \cos \theta$ で、板に衝突後 2 と 3 の方向に分かれ運動量はそれぞれ $\rho Q_2 q_2, -\rho Q_3 q_3$ になるので、運動量保存則より

$$\rho Q_1 q_1 \cos \theta = \rho Q_2 q_2 - \rho Q_3 q_3 \quad (4.14)$$

が得られる。(4.13) と (4.14) より

$$Q_2 - Q_3 = Q_1 \cos \theta \quad (4.15)$$

(4.12) と (4.15) より体積流量 Q_2, Q_3 は

$$Q_2 = (1 + \cos \theta)Q_1/2, \quad Q_3 = (1 - \cos \theta)Q_1/2$$

と求まる。噴流方向の分圧 (F) は、衝突前後の運動量の単位時間当たりの変化で与えられるから、図より $F = P_1 - (P_2 \cos \theta - P_1 \sin \theta)$ となる。 $P_1 = \rho Q_1 q_1, P_2 = \rho(1 + \cos \theta)Q_1 q_2/2, P_3 = \rho(1 - \cos \theta)Q_1 q_3/2$ であるから、板にかかる噴流方向の力の成分は

$$F = \rho Q_1 q_1 - \rho \{(1 + \cos \theta)q_2/2 - (1 - \cos \theta)q_3/2\} Q_1 \cos \theta = \rho Q_1 q_1 \sin^2 \theta$$

となる。

4.2.1 気体への応用

理想気体で断熱法則にしたがう場合を考えます。これは §3.4.1 の (3.40) で取り扱いました。

$$p = k\rho^\gamma \quad (k: \text{比例定数}) \quad (4.16)$$

と仮定すると圧力関数 P は

$$P = \int \frac{k\gamma\rho^{\gamma-1}}{\rho} dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (4.17)$$

で与えられます。ただし、 $p = 0$ のとき $P = 0$ としました。通常、気体の流れでは外力の影響は無視し $U = 0$ とおきます。そうするとベルヌイの定理は

$$\frac{1}{2}q^2 + P = \text{const} \quad (4.18)$$

となります。したがって、断熱変化をする気体では

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma^2-1} c = \text{const}, \quad (4.19)$$

となり、ここで c は音速で、次式で表されます。

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho} \quad (4.20)$$

流れのよどみ点 (流速 $q = 0$ となる点) での状態を添字 0 で表すと (4.19) は

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{\gamma-1} c^2 = \frac{1}{\gamma-1} c_0^2 \quad (4.21)$$

となるので、これから

$$\frac{c^2}{c_0^2} = 1 - \frac{q^2}{q_m^2}, \quad q_m = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_0 \quad (4.22)$$

が得られます。これから、流速 q は q_m を超えることない、 q_m は流速の最大値であることがわかります。
(4.16) と (4.20) から ρ と p は

$$\rho \propto c^{2/(\gamma-1)}, \quad p \propto \rho^\gamma \propto c^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

と見積もれるので (4.22) より

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{q^2}{q_m^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{q^2}{q_m^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.23)$$

となり、これから

$$q = q_m \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

が得られます。これから、よどみ圧 p_0 と静圧 p を測定すれば気流の速度 q を求めることができます。

4.3 ベルヌイの定理の応用 - 非定常流の場合 -

ベルヌイの定理の適用範囲は定常流に限られています。非定常流でそれに変わるものが (4.8) の圧力方程式、いわゆる一般化したベルヌイの定理となります。ただし、これは渦なし運動から導かれた方程式で、渦のある流体には適用できないことに留意¹してください。渦なしの流れにのみ適用できます。

Fig.17 に示す管の中を流体が一樣な流速分布で流れているものとします。流速ベクトル v は、管軸に平行でその大きさ q は管軸に沿った長さ s だけの関数とします。渦なし流れとすると速度ポテンシャル ϕ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = q(s), \quad \rightarrow \quad \phi = \int q(s) ds \quad (4.25)$$

で定義できます。

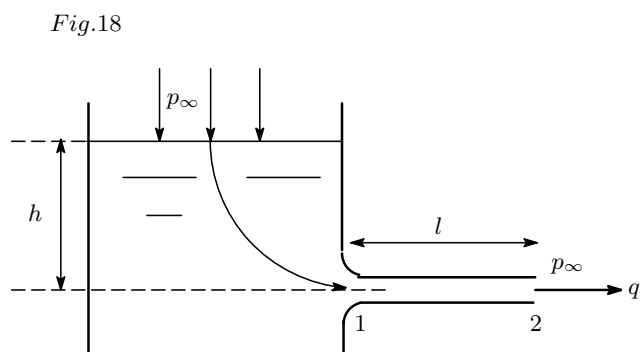
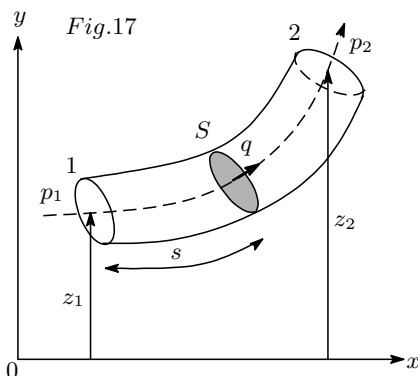
4.3.1 一樣な太さの管の中を流れる非定常流

断面積一定の管を流れる流体の流量は $qS = Q$ で、非定常流では Q は時間 t だけの関数になります。したがって、流速は時間 t だけの関数となり速度ポテンシャルは (4.25) より $\phi = q(t)s$ となります。

一樣な重力場における非圧縮性流体の運動を記述する圧力方程式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{ds}{dt}\right) s + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (4.26)$$

となり、これは管内の流体の非定常運動を記述する基礎方程式となります。いまの場合の一樣な太さの管の中の流れを記述するには矢印の右側の方程式を使います。



¹ 渦がある場合は、渦流によるエネルギー損失が発生するため、圧力方程式は成り立たなくなる。

Fig.17で断面1での圧力を p_1 , 高さを z_1 とすると基礎方程式より

$$\dot{q}s_1 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \dot{q}s + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz \quad (4.27)$$

が成り立つので、これから

$$p - p_1 = -\rho g(z - z_1) - \rho \dot{q}(s - s_1) \quad (4.28)$$

が得られます。(4.28)の右辺第1項は高さの差で決まる静水圧で、また、 $\rho \dot{q}$ は全長にわたって一定ですから、管内の圧力分布は静水圧を除いて管軸長に比例して直線的に変化することがわかります。また、速度 \dot{q} は、断面2での圧力を p_2 とすると(4.27)より

$$\dot{q} = -\frac{1}{s_2 - s_1} \left\{ \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) \right\} \quad (4.29)$$

で求められます。

例題-19 Fig.18に示す、容器にとりつけた長さ l の水平な管の一端を急に開いた場合、ここから流出する液体の速度がどのように変わるか求めよ。ただし、容器の液面は常に一定の高さを保つようにする。また、管と液体との摩擦は無視する。

答：管の一端を急に開けた場合、その瞬間は流速ゼロで、次第に流速を増し、ある短い時間の経過後定常流に達すると考えられる。この初期の非定常流での速度変化を求める。管の入り口を1, 出口を2とすると $z_1 = z_2 = 0$, $p_2 = p_\infty$, $s_2 - s_1 = l$ として(4.29)より

$$\dot{q} = \frac{1}{l\rho}(p_1 - p_\infty) \quad (4.30)$$

ただし、大気圧を p_∞ とおいた。次に p_1 は液面と管の入り口1との間でベルヌイの定理を適用すると、液面の高さは一定に保たれているから

$$p_\infty + \rho gh = p_1 + \frac{1}{2}\rho q^2 \quad (4.31)$$

が成り立つ。(4.30)と(4.31)より

$$\dot{q} = \frac{1}{2l}(q_\infty^2 - q^2), \quad (q_\infty = \sqrt{2gh}) \quad (4.32)$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q_\infty^2 - q^2} = \int_0^t \frac{1}{2l} dt \quad \rightarrow \quad \frac{1}{q_\infty} \tanh^{-1} \left(\frac{q}{q_\infty} \right) = \frac{t}{2l}$$

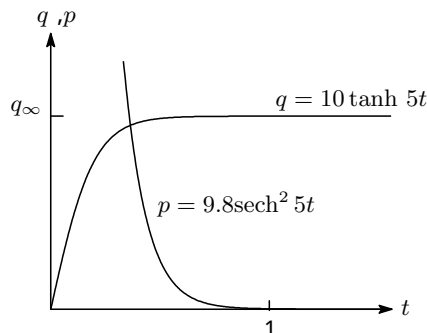
$$\therefore q = q_\infty \tanh \frac{t}{2T}, \quad (T = l/q_\infty : \text{代表的時間スケール})$$

流速 q は指数関数的に定常値 q_∞ に近づく。また、入り口1での圧力 p_1 は(4.31)より

$$p_1 = p_\infty + \rho gh \left(1 - \tanh^2 \frac{t}{2T} \right) = p_\infty + \rho gh \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2T} \quad (4.33)$$

で与えられ、 $t = 0$ で静水圧 $p_\infty + \rho gh$ で合ったものが指数関数的に大気圧 p_∞ まで低下する。参考として Fig.19 を乗せておきます。これは $q_\infty = 10$, $p_\infty = 0$, $l = 1$, $h = 1$ とおいたものです。

Fig.19



4.3.2 断面が緩やかに変化する管の中の非定常流

管の太さが一定でない場合は、断面積 S は s の関数となります。流速と断面積の関係は $q(s, t)S(s) = Q(t)$ となり、流速 q は場所 s と時間 t の関数として

$$q = \frac{Q(t)}{S(s)} \quad (4.34)$$

と表されます。速度ポテンシャルは (4.25) より

$$\phi = \int q ds = Q(t) \int \frac{ds}{S(s)} \quad (4.35)$$

となり、これを (4.26) の圧力方程式に入れると

$$\dot{\phi} \int \frac{ds}{S} + \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{S^2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (4.36)$$

これがいま場合の非定常運動を記述する基礎方程式となります。管内の圧力分布は、したがって

$$p - p_1 = -\rho g(z - z_1) - \rho \dot{Q} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{S} - \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \quad (4.37)$$

また、加速度 \dot{Q} は

$$\dot{Q} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{S} + \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (4.38)$$

で与えられます。

例題-20 例題 19 の問題を断面積が変化する管の流れ（非定常流）として議論せよ。

答：容器と管を合わせて 1 本の管と考える。容器の液面を断面 1，管の出口を断面 2 とし、管の断面積を S_0 ，長さを l とする。 $p_2 = p_1 = p_\infty$ ， $z_2 - z_1 = -h$ ，また $S_1 \rightarrow \infty$ として $S_2 = S_0$ とすると (4.38) より

$$\dot{Q} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{S} + \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{S_0^2} - gh = 0 \quad (4.39)$$

が得られる。ここで左辺第 1 項の積分は容器の断面積を $S_1 \rightarrow \infty$ としたから容器内の経路 s については被積分関数はゼロとなり、結局管の部分のところの積分だけが残る。

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{S} \rightarrow \int_0^l \frac{ds}{S_0} = \frac{l}{S_0}$$

流量 Q は $Q = S_0 q$ で与えられるから、方程式を整理すると

$$l\dot{q} + \frac{1}{2} q^2 - gh = 0 \rightarrow \dot{q} = \frac{1}{2l}(q_\infty^2 - q^2) \quad (q_\infty = \sqrt{2gh}) \quad (4.40)$$

となって、例題-19 の (4.32) の式に帰着する。あとの議論は例題-19 と同じになる。

註：容器の断面が緩やかどころか急に管の断面に減少するので、表題の「断面が緩やかに変化する」ケースと異なるではないかと不信に思われたムキもおられると思います。断面 S はある長さ s で不連続的に変化しますが、容器の断面積を $S = \infty$ とすることで $\int ds/S$ の積分がゼロになり、不連続的な変化をうまくクリアーしていると考えますが、いかがでしょうか。

4.3.3 流線曲率の定理

一般化して、縮む流体の定常流を考えます。ただし、外力 K の作用はないとします。運動方程式は第 2 話の (3.33) より

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.41)$$

Fig.20

R : 流線の曲率半径

\mathbf{n} : 流線の法線ベクトル

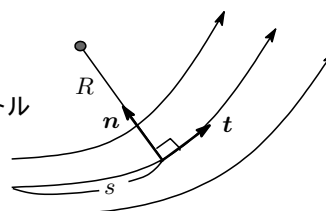


Fig.20 のように 1 つの流線を考え、それに沿った長さを s 、接線方向の単位ベクトルを t 、流速を q とします。ベクトル解析によれば方向微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial s} = t \cdot \nabla f \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} = t \cdot \nabla \quad (t \text{ は } s \text{ の方向単位ベクトル})$$

で与えられますから、 $v = qt$ として

$$(v \cdot \nabla)v = q \frac{\partial}{\partial s}(qt) = q \frac{\partial q}{\partial s} t + q^2 \frac{\partial t}{\partial s}$$

となります。 n を流線の法線ベクトル、 R を曲率半径、 κ を曲率とすると

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{R} n, \quad \kappa = \frac{1}{R} \quad (4.42)$$

となるので、これらを (4.41) に入れて整理すると

$$\nabla p = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial q^2}{\partial s} t - \rho q^2 \kappa n \quad (4.43)$$

となります。この式を見ると圧力 ∇p のベクトル成分は s 方向の単位ベクトル t と法線方向の単位ベクトル n でつくる平面内に存在し、その圧力勾配成分は

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial q^2}{\partial s}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\kappa \rho q^2 \quad (4.44)$$

となります。(4.44) の 2 つ目の式は流線が曲がっている場合、法線方向の圧力低下は流速の 2 乗と流線曲率の積に等しいという流線曲率の定理として知られています。質点系の力学では例えば円運動する場合、遠心力に釣り合う向心力のおかげで質点は向こうへ飛んでいかずにすみますが、流体の場合この向心力は曲率の中心に向かう圧力勾配力であるということになります。流線曲率の定理により回転を与えらボールが変化球となることや、流れる水道水にスプーンの凸曲面を近づけるとスプーンが水道水に引き寄せられるといった現象が説明できます。余談はこのくらいにして (4.44) の第 1 式をみてみます。流体の密度が圧力だけの関数であるバロトロピー流体とすると (4.3) の圧力関数 P を導入すると

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho \int^p \frac{dp}{p} \right)$$

となるので、第 1 式は結局

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\int^p \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad P + \frac{1}{2} q^2 = \text{const} \quad (4.45)$$

となり、流線 s に沿って積分すればベルヌイの定理が得られます。

4.4 ラグランジュの渦定理

渦運動は第 2 話の §3.8 で渦度 ω の 2 倍が回転角速度 Ω を与えることをみました。質点系の力学では角運動量の保存則がありますが、流体力学でそれに相当するものが以下に述べるラグランジュの渦定理と呼ばれるもので、完全流体では渦は不生・不滅であるという内容です。

外力は保存力のみとし ($K = -\nabla U$)、密度 ρ が圧力 p だけの関数であるバロトロピー流体を考えます。オイラーの運動方程式は (4.5) より

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \left(P + U + \frac{1}{2} q^2 \right) + v \times \omega$$

となります。両辺の rot をとると $\text{rot}(dv/dt) = \partial \omega / \partial t$ 、 $\text{rot} \cdot \nabla = 0$ であるので

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}(v \times \omega) \quad (4.46)$$

が得られます。

$$\left. \begin{array}{l} \text{ベクトル解析の公式: } \text{rot } v \times \omega = v(\nabla \cdot \omega) - \omega(\nabla \cdot v) + (\omega \cdot \nabla)v - (v \nabla \cdot \omega) \\ \text{第 2 話 (3.6): } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \\ \text{第 2 話 (3.13): } \nabla \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{array} \right\}$$

より (4.46) は

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \quad \because \left(\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \right) \\
 \therefore \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

また,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

であるので (4.47) は整理すると

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \tag{4.48}$$

となります。(4.47) (4.48) を渦度方程式といいます。完全流体の微小な球状の流体部分をとると、その運動は外力と周囲の流体の圧力の作用で運動しますが、外力は球の中心(重心)に作用し、圧力は球の表面に直角に作用するので、球の中心の周りにはモーメントが発生しません。つまり、微小球の中心周りの角運動量は運動中不変に保たれることとなります。もし、ある瞬間に微小球が回転していなければ、いつまでも回転しないし、逆に、最初に回転していれば、いつまでも回転し続けます。つまり、完全流体では渦の生成消滅はありません。これがラグランジュの渦定理とよばれるものです。念のため、ラグランジュの渦定理を式で説明すると、 $t=0$ で $\boldsymbol{\omega} = 0$ (渦なし) であったとすると (4.48) より

$$\left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \right]_{t=0} = \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=0} \cdot \nabla \right\} \mathbf{v} = 0 \tag{4.49}$$

で、微小時間 Δt の後では

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=\Delta t} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=0} + \left[\frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \right]_{t=0} \times \Delta t = 0 \tag{4.50}$$

となり、やはり $\boldsymbol{\omega} = 0$ です。逆に、 $t=0$ で $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ であれば、仮にある時刻に $\boldsymbol{\omega} = 0$ になったとすると、それより以前、突き詰めていくと $t=0$ で $\boldsymbol{\omega} = 0$ でなければならないということになり矛盾します。

4.5 渦度と循環

4.5.1 循環

流体中に一つの閉曲線 C をとり、 C に沿っての線積分

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C v_s ds = \oint_C (u dx + v dy + w dz) = \oint_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \oint_C d\phi \tag{4.51}$$

を閉曲線 C に沿っての循環 (circulation) といい、 $\Gamma(C)$ で表します。ここで v_s は流速ベクトル \mathbf{v} の閉曲線 C に対する接線方向の成分です。 ϕ は第2話で登場した速度ポテンシャルです。ストークスの定理(付録参照)により、面積積分に置き換えると

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{v})_n dS \tag{4.52}$$

となり、 $\text{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$ を入れると

$$\Gamma(C) = \iint_S \boldsymbol{\omega}_n dS = \iint_S \boldsymbol{\omega} dS \tag{4.53}$$

と表され、循環を渦度で表すことができます。つまり、循環は閉曲線 C の内部を通過する渦度の大きさの総和ということになります。これから、閉曲線内が渦なしの流れであれば $\Gamma(C) = 0$ となります。また、循環は渦を取り巻く閉曲線の大きさによって変わりません²。以下にこのことを見てみます。

² 渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の発散 $\text{div} \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \text{rot} \mathbf{v} = 0$ なので、1つの渦管の任意の断面を通る渦度の総量はどこでも同じになります。

Fig.21-1 に示すように、渦管を取り巻く閉曲線 C (循環 Γ) の周りに任意の閉曲線 C' をとり、この閉曲線に沿っての循環 $\Gamma'(C')$ を考えます。閉曲線 C と C' との間を線分 AB で結び、 $C' \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow (-C) \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C'$ の経路を通る閉曲線についての循環を $\Gamma_{C'(-C)}$ とします。

Fig.21-1

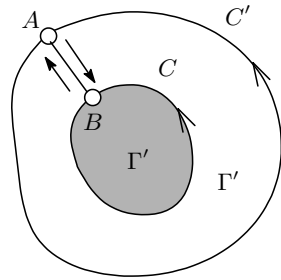
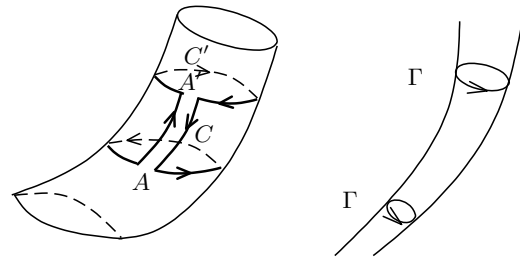


Fig.21-2



この閉曲線内で渦運動がないとすると $\Gamma_{C'(-C)} = 0$ で、一方

$$\begin{aligned} \Gamma_{C'(-C)} &= \int_{C'} + \int_{AB} + \int_{-C} + \int_{BA} = \Gamma' + \int_{AB} + \int_{-C} - \int_{AB} = \Gamma'(C') - \Gamma(C) = 0 \\ \therefore \Gamma'(C') &= \Gamma(C) \end{aligned} \quad (4.54)$$

となつて、渦を取り巻く閉曲線の大きさによって循環は変わらないことがわかります。言い換えると、循環は渦管に固有の量である、ということになります。いま、平面上の閉曲線についてみましたが、一般に曲面上の閉曲線についても全く同様に成立します。渦管³の任意の断面 AC の循環を Γ 、 $A'C'$ の循環を Γ' とします。そして Fig.21-2 に示すような閉局面 $AA'C'A'ACA$ を考えます。そうすると、この閉曲面に沿った循環は $\iint_S \omega_n dS$ で、渦管を貫く渦はないので $\omega_n = 0$ となり、この循環はゼロとなります。一方、閉曲線上の線積分を分解すると

$$\begin{aligned} \int_{AA'} + \int_{A'C'A'} + \int_{A'A} + \int_{ACA} &= -\Gamma(C') + \Gamma(C) = 0 \\ \therefore \Gamma(C') &= \Gamma(C) \end{aligned} \quad (4.55)$$

ということで、循環は閉曲線 C の選び方によらないと上で結論したことと同じになります。

4.5.2 渦管の強さ

いま、ある決まった時刻について 1 本の渦管を考えます。1 本の渦管の側面に沿って渦管を一周する閉曲線 C についての循環をとると、その値は閉曲線 C の選び方によらない、その渦管の固有の量であるということのみてきました。そして、循環は渦度 \times 面積で与えられました。渦管が十分細い場合を考えます。そうすると渦管の断面上で ω_n はほぼ一定とみなせますので渦管の断面積を σ とすると

$$\Gamma(C) = \iint_S \omega_n dS = \omega \iint_S dS = \omega \sigma \quad (4.56)$$

と書けます。循環 $\Gamma(C)$ は 1 本の渦管を通して一定値をとりますから、この値は渦の強さを表すものと考えることができます。そこでこの値を渦管の強さということにします。とすると、1 本の渦管については、固有の渦の強さがありますので、渦管の細いところは (断面積が小さい) 渦度 ω が強く (流体粒子の自転の角速度が大きい、激しく回転している)、渦管が太いところでは渦度が弱いということになります。太い渦管の場合には、多数の細かい渦管に分割して考えればよいわけで、

$$\Gamma(C) = \iint_S \omega_n dS = \sum \omega \sigma \quad (4.57)$$

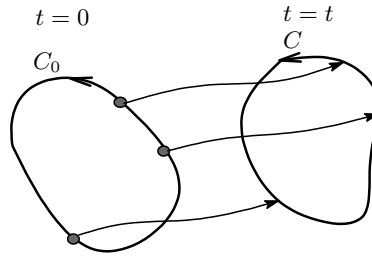
³ 渦管：閉曲線 C を構成する渦線によって作られる管のこと。

となります。つまり、任意の閉曲線 C にそっての循環は、 C を通り抜ける渦管の強さの和に等しいということになります。したがって、細い渦管としてすべて同じ渦管の強さのものをとっておけば、循環 $\Gamma(C)$ は C を通り抜ける渦管の数を表すことになります。

4.5.3 ケルビンの循環定理

ケルビンの循環定理は「粘性のないバロトロピー流体が保存力の元に運動する場合、循環は時間的に一定不変に保たれる。」というものです。渦管のダイナミクスを考えます。そのために、循環の時間的変化を見てみきましょう。時刻 $t = 0$ で閉曲線 C_0 上にあった流体粒子が時間の経過とともに移動し、任意の時刻 t に閉曲線 C をつくるものとします。 C に沿ってとった循環 $\Gamma(C)$ の時間変化を考えます。

Fig.22



物理量の流れに沿っての時間変化ですからラグランジュ微分をとります⁴。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \Gamma(C) &= \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) \\ \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.58)$$

外力 \mathbf{K} は保存力でバロトロピー流体としているので、オイラーの運動方程式は (4.1) と (4.4) より

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla(U + P), \quad \mathbf{K} = -\nabla U, \quad P = \int \frac{dp}{\rho} \quad (4.59)$$

また、閉曲線 C 上の接近した 2 点を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とすると、 $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ であるので

$$\frac{D}{Dt} d\mathbf{r} = \frac{D}{Dt} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = d\mathbf{v} \quad (4.60)$$

となり (4.58) は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) &= -\nabla(U + P) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = -d(U + P) + d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = d\left(\frac{1}{2}q^2 - U - P\right) \\ \therefore \frac{D}{Dt} \Gamma(C) &= \left[\frac{1}{2}q^2 - U - P \right]_C \end{aligned} \quad (4.61)$$

添字の C は閉曲線 C を一周した時の変化を意味します。なお、流速 q 、圧力 P は閉曲線 C 上の場所の 1 価関数で、外力のポテンシャル U も通常 1 価関数と考えられるので、一周したとき元に戻りますから変化はゼロとなり、したがって

$$\Gamma(C) = \text{const} = \Gamma(C_0) \quad (4.62)$$

となって、循環は渦管の運動によっても不変に保たれることになります。これをケルビンの循環定理といいます。その他、ヘルムホルツの渦定理というのがありますが、これも要するに渦の循環の強さは一定不変であるということを行っています。

ラグランジュの渦定理、ヘルムホルツの渦定理、ケルビンの渦定理と沢山でてきましたが、整理すると次にように要約されます。

⁴ 第 2 話 § 3.1 参照。

- 渦ははじめからなければ途中から生じることはない。また途中で消滅することもない。(渦の不生不滅)
- 1本の渦管の強さ(循環)はどの断面でも等しい。循環は渦管に固有の量である。
- 渦は引き延ばされると強さを増し縮まると弱くなる。

(了)

お疲れ様でした。渦の話で少し目が回ってきましたので3回目のお話はここで終了します。

3回目では、定常流の場合に成り立つベルヌイの式(流体力学といえばベルヌイの方程式かといわれるほど有名ですね)、そして非定常流の場合には一般化したベルヌイの式、つまり圧力方程式と呼ばれるもので記述できることから、第2話で少しふれた渦の話に入り、完全流体では渦は生成消滅しないというラグランジュの渦定理(流体の場合の角運動量保存則)、そして最後に循環と渦管の強さの話とケルビンの渦定理、ヘルムホルツの渦定理まで進みました。ところで、渦糸や渦管のイメージはつかまれましたか。私はなかなかイメージが掴めなくて(いまだに怪しい)、そのうちなんとかなるだろうとうち遣っていたものですが、今井功「流体力学(前編)」におもしろい例え話が載っていたので、少し長いですがご参考までにここに引用しておきます。

「いま、ざるにウナギを入れた状態を想像してみよう。ウナギはどれも自分自身を軸として自転しながら(実際にはこのような運動はしないだろうが)曲がりくねって動いているとする。このウナギの1匹1匹が渦糸に相当し、ウナギの集団が渦運動をしている流体の部分に対応するのである。ウナギといっても、伸縮自在で、伸びて細くなれば自転の速度を増し、太く短くなれば時点の速度を減少するような仮想的なものを考えなければならない。渦の不生不滅というのは、ウナギが突然出現することも消滅することもないということに対応する。」

尚、付録は第3回目を読むのに参考になる程度の大雑把なもので、詳しいことは適当なベクトル解析のテキストを読んでください。

A 付録(参考)

空間曲線 曲線上の任意の1点の位置ベクトルを r とすると、曲線 C は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\text{A.1})$$

で表されます。 t はパラメータで $a < t \leq b$ の部分の長さを曲線 C の弧長といい、 s で表します。弧長 s は次のようにして求められます。曲線 C の区間 $[t_0, t]$ 内の微小区間 $PQ : [t, t + \Delta t]$ の弧長は線分 \overline{PQ} で近似されますから

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

$$\therefore ds = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{A.2})$$

$$\therefore s = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad (\text{A.3})$$

パラメータ t は s の関数と考えられますから、曲線は曲線の長さ s を使って

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad (\text{A.4})$$

と表すことができます。

Fig.A-1

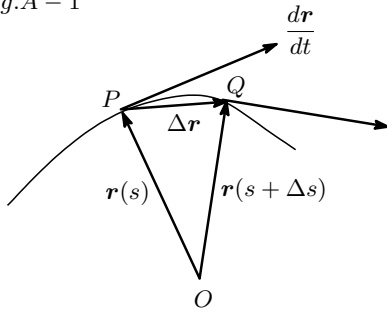
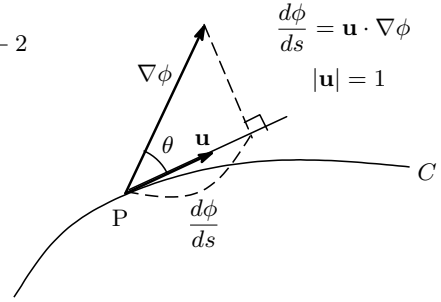


Fig.A-2



いま, s の増分を Δs , それに対応する r の増分を Δr , $s + \Delta s$ に対応する曲線上の点を Q とすると $\Delta r = \overrightarrow{PQ}$ であるので, $\frac{\Delta r}{\Delta s}$ は s の増加する向きに向かうベクトルとなります。 $\Delta s \rightarrow 0$ の極限をとりそれを t とすると

$$t = \frac{dr}{ds} \tag{A.5}$$

t を曲線の接線ベクトルといいます。点 Q における接線ベクトルと点 P における接線ベクトルのなす角を $\Delta\theta$ とすると

$$\kappa = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \tag{A.6}$$

は, 曲線の長さに対する接線の向きの変化率を表します。この κ を曲線の曲率といいます。曲率の逆数 $\rho = 1/\kappa$ を曲率半径といいます。

方向微分係数 スカラー関数 $\phi(x, y, z)$ の点 P における方向単位ベクトルを u とします。点 P を通り u を方向ベクトルとする直線を点 P からの距離 s を用いて $r(s)$ で表わすと, 点 P における関数 ϕ の u 方向の方向微分係数は

$$\frac{\partial\phi(r(s))}{\partial u} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(p + su) - \phi(p)}{s} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = u \cdot \nabla\phi \tag{A.7}$$

また, 関数 $\phi(x, y, z)$ の単位法線ベクトルを n とすると, 法線方向に対する ϕ の方向微分係数を $d\phi/dn$ とすると

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dn} n \tag{A.8}$$

となります。

ストークスの定理 線積分を面積積分に変換する定理

$$\int_C v \cdot dr = \iint_S (\text{rot}v) \cdot ndS \tag{A.9}$$

Fig.A-3

