

流体力学講話・つまみ食い(その4)

KENZOU

2008年8月9日(9/6:一部追記)

♣ 流体力学のお話も4回目となりました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理などまで進みました。4回目はしばらく渦とおさらばして非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話を進めていこうと思います。この講では, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要なものができます。それらの内容と2次元流体への応用についてみていくことにします。それでははじめます。

目次

5	非圧縮性2次元流体の渦なし運動	2
5.1	流れ関数と流線	2
5.2	複素速度ポテンシャル	3
5.2.1	速度ポテンシャル	3
5.2.2	複素速度ポテンシャルと複素速度	4
5.2.3	一様な流れ	5
5.2.4	角を回る流れ	6
5.2.5	湧き出しと吸い込み	6
5.2.6	半無限物体	7
5.2.7	2重湧き出し	8
5.2.8	渦糸	9
5.3	静止円柱を過ぎる一様な流れ	11
5.3.1	円柱周り流れ・その1(循環のない場合)	11
5.3.2	円柱周り流れ・その2(循環のある場合)	13

=====

5 非圧縮性 2次元流体の渦なし運動

5.1 流れ関数と流線

非圧縮性の 2次元流体は第 3 話 (3.12) の連続の方程式より

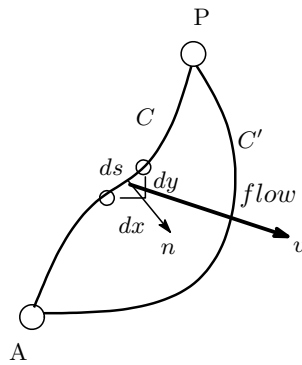
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

で、この場合任意関数 $\psi(x, y)$ をつかって

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.2)$$

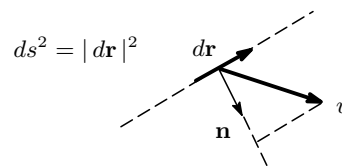
とおくと、連続の方程式は自動的に満たされます。この ψ を流れ関数といいます。なぜそのような名前が付くのかを以下にみます。流れの中に任意の 2 点 A, P をとり、 A, P を結ぶ曲線 C を考えます。

Fig.23



C への接線方向成分: $d\mathbf{r}/ds = (dx/ds, dy/ds)$

これを時計回りに 90 度回転させると法線方向成分が求まる
法線方向成分 $\mathbf{n} = (dy/ds, -dx/ds)$



そして、 AP を左から右に通過する単位時間当たりの流量を $\psi(C)$ とすると

$$\psi(C) = \int_A^P v_n ds \quad (5.3)$$

となります。また、 AP を結ぶ任意の曲線 C' をとると、 C を通過した流量は質量保存則により曲線 C' を通過する流量 $\psi(C')$ と同じになります。いま、点 A を固定すると ψ は点 P だけに関数になりますが、結局、 ψ は 2 点を結ぶ曲線を左から右に通過する単位時間当たりの流量を表していること になります。これが流れ関数という名前の由来です。点 A における流れ関数を ψ_A 、点 P における流れ関数を ψ_P 、その間を流れる流量を Q とすると、 Q は

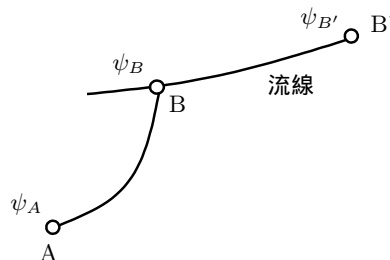
$$\int_A^P v_n ds = \int_A^P (v_x n_x + v_y n_y) ds = \int_A^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds = \int_A^P d\psi = \psi_P - \psi_A \quad (5.4)$$

となり、点 AP を結ぶ曲線の経路には無関係となります。 A を固定し、点 P の座標を (x, y) とすると流れ関数は x, y の関数となり、曲線

$$\psi(x, y) = \text{const} \quad (5.5)$$

は流線を表します。というのは、Fig.24 で点 A, B, B' での流れの関数をそれぞれ $\psi_A, \psi_B, \psi_{B'}$ とし、 B, B' を通る曲線を流線とします。

Fig.24



曲線 AB , ABB' を通る流量をそれぞれ Q , Q' とすると

$$Q = \psi_B - \psi_A, \quad Q' = \psi_{B'} - \psi_A$$

となるが, BB' は流線であるので BB' を通過する流量はありません。したがって, AB を通過する流量 Q は ABB' を通過する流量 Q' に等しくなるので

$$Q = Q', \quad \psi_B - \psi_A = \psi_{B'} - \psi_A, \quad \therefore \psi_B = \psi_{B'} = \text{const}$$

となつて, $\psi = \text{const}$ の示す曲線は流線を表します。

2次元流れの渦度 ω は

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.6)$$

となつて, 渦度ベクトルは z 軸と平行であることがわかります。また, 渦度は流れ関数と

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = -\nabla^2 \psi \quad (5.7)$$

との関係があり, 特に渦なしの流れでは, 流れ関数は

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (5.8)$$

となつてラプラスの方程式を満たす調和関数となります。

5.2 複素速度ポテンシャル

5.2.1 速度ポテンシャル

流体内の任意の点における x, y 軸方向の速度成分 (分速度) をそれぞれ u, v とすると

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5.9)$$

を満足する関数 $\phi(x, y)$ が必ず存在し, $\phi(x, y)$ の勾配が速度を与えることから, ϕ を速度ポテンシャルと呼んでいます。 ϕ の存在は次のようにして確認できます。いま $u dx + v dy$ がある関数 $\phi(x, y)$ の全微分で表されるとします。

$$u dx + v dy = d\phi$$

一方

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

ですから, $u = \partial \phi / \partial x, v = \partial \phi / \partial y$ をそれぞれを y と x で微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

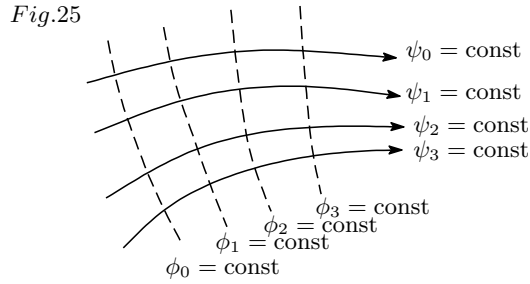
となつて (5.9) で与えられる ϕ は必ず存在することになります。 $\phi = \text{const}$ で示される曲線を等ポテンシャル線といいます。

次に (5.9) を連続の方程式 (5.1) に入れると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (5.10)$$

となつて速度ポテンシャルもラプラスの方程式を満たす調和関数であることがわかります。ところで, ラプラスの方程式を満たす2つの解を仮に ϕ_1, ϕ_2 とするとその線形結合 $\phi = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$ (C_1, C_2 : 任意の定数) もラプ

ラスの方程式の解になります。これは重ね合わせの原理と呼ばれていますが、あとでこの原理を活用しますので覚えておいてください。



[註]

等ポテンシャル線と流線は常に直交します。等ポテンシャル線を $\phi(x, y) = \text{const}$, 流線を $\psi(x, y) = \text{const}$ とします。それぞれを x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)_\phi &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)_\phi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)_\psi &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)_\psi \end{aligned}$$

両式を掛け算すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right)_\phi \left(\frac{dy}{dx} \right)_\psi$$

となります。(5.2) と (5.9) より

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

となるので, これを上式に入れると

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_\phi \left(\frac{dy}{dx} \right)_\psi = -1$$

となって等ポテンシャル線と流線の接線は常に直交するので, 両曲線は常に直交することになります。

速度ポテンシャル ϕ と流れの関数 ψ を極座標表示した場合の両者の関係式を導きます。

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \theta = u \cos \theta + v \sin \theta \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} \sin \theta = -v \cos \theta + u \sin \theta \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial y} r \cos \theta = r(-u \sin \theta + v \cos \theta) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial y} r \cos \theta = r(v \sin \theta + u \cos \theta) \\ \therefore \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = v_r, \quad \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta \end{aligned}$$

5.2.2 複素速度ポテンシャルと複素速度

流速 $v(u, v)$ を流れ関数と速度ポテンシャルをつかって表すと

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{5.11}$$

となります。この関係式は、複素関数

$$f = \phi + i\psi \quad (5.12)$$

の正則条件を決める コーシー・リーマンの関係式 といわれます。このような複素関数を考えると複素関数論の知識を活用することができるので非常に見通しがよくなります。この $f(z)$ を複素ポテンシャル（複素速度ポテンシャル）と呼んでいます¹。 $f = f(z)$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial(x+iy)}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \text{同様にして} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{df}{dz} \quad (5.13)$$

$$\therefore \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\phi + i\psi)}{\partial x} = u - iv \quad (5.14)$$

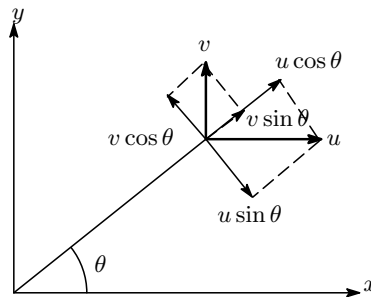
が得られます。この式

$$\frac{df}{dz} = u - iv \quad (5.15)$$

の右辺を $u - iv$ を共役複素速度といい, $u + iv$ を複素速度といいます。

2次元流れで流れの半径方向の速度を u_r , 円周方向の速度を u_θ とし, 複素速度ポテンシャルとの関係を調べます。

$$\begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ u_\theta &= u \sin \theta - v \cos \theta \end{aligned}$$



そうすると

$$\begin{aligned} u_r - iu_\theta &= (u \cos \theta + v \sin \theta) - i(u \sin \theta + v \cos \theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)(u - iv) = e^{i\theta} \frac{df}{dz} \\ \therefore \frac{df}{dz} &= (u_r - iu_\theta) e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (5.16)$$

となります。

5.2.3 一様な流れ

複素速度ポテンシャル $f(z)$ が

$$f(z) = Uz \quad (U: \text{実数}) \quad (5.17)$$

で与えられる流れを調べましょう。共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = u - iv = U \quad (5.18)$$

となって, $u = U, v = 0$ となって, これは x 軸に平行な一様な流れを表します。一様流が x 軸に対して角度 θ 傾いたながれの複素速度ポテンシャルを調べると, 流速を (u, v) , 速度の大きさを U とすると

$$u = U \cos \theta, \quad v = U \sin \theta \quad \longrightarrow \quad u - iv = U(\cos \theta - i \sin \theta) = Ue^{-i\theta}$$

¹ 複素ポテンシャルは一度に2つの物理量が取り扱えるので便利です。数学的な展開は複素関数論の知識を利用すればいいわけで。。

となるので、共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = u - iv = Ue^{-i\theta} \quad \longrightarrow \quad f = Ue^{-i\theta}z$$

右の項で積分定数が付きますが、これはポテンシャルの任意定数でゼロとおいても問題ありません。

5.2.4 角を回る流れ

複素速度ポテンシャル $f(z)$ が

$$f(z) = Az^n \quad (A > 0, n > 0)$$

で与えられる流れを調べましょう。共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = nAz^{n-1}$$

となります。この流れを調べるには流線の形を見るのが便利ですから、極形式に移行して $z = re^{i\theta}$ として

$$f = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \phi + i\psi \quad \longrightarrow \quad \phi = Ar^n \cos n\theta, \psi = Ar^n \sin n\theta$$

特に $\psi = 0$ なる流線は

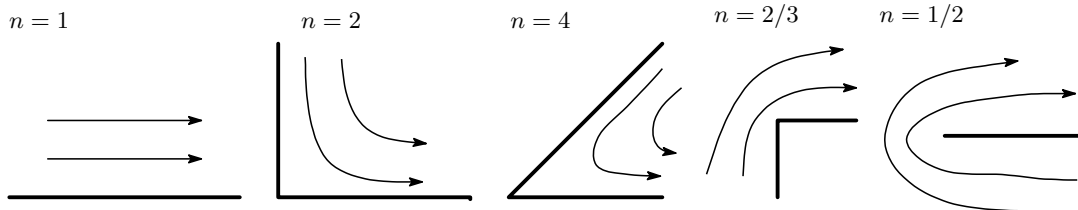
$$\theta = k\frac{\pi}{n}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

で与えられ、これは原点から放射される方向の直線で、 x 軸の正の部分と、これを角度 π/n だけ正負の向きに次々と回転してえられるものとなります。 $\psi = c$ ($c > 0$) の流線は

$$r = \left(\frac{c}{A}\right)^{1/n} \frac{1}{(\sin n\theta)^{1/n}}$$

で与えられます。 $n = 1$ の場合は一様流ですが、 $n = 2, 4, \dots$ と変えていくといろいろな角の流線を描くことがわかります。

Fig.26



5.2.5 湧き出しと吸い込み

原点を中心として単位時間に Q の流量が放射状に湧き出し (source) ている 2 次元の流れを考えます。半径 r 方向と円周方向の分速度をそれぞれ u_r, u_θ とすると流量 Q は $Q = 2\pi r u_r$ ですので、 $u_r = Q/2\pi r, u_\theta = 0$ となります。この流れの速度ポテンシャルは極座標で表すと²

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad (5.19)$$

となります。とすると

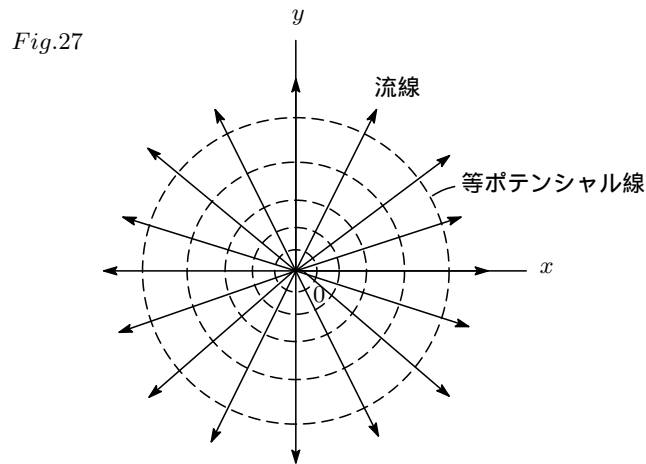
$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi = \frac{Q}{2\pi} \log r + c(\theta), \quad \phi = c(r), \quad \text{ただし } c(\theta), c(r) \text{ は } \theta, r \text{ の関数とする}$$

となり、この式を満足する速度ポテンシャル ϕ の式として

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \log r \quad (5.20)$$

² 半径方向の単位ベクトルを e_r 、 θ 方向のそれを e_θ とすると $\nabla = e_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + e_\theta \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$

が得られます。尚、 Q を湧き出しの強さ といっています。



次に、流れ関数で u_r, u_θ を表すし、同様にして ψ を求めると

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, u_\theta = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \rightarrow \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (5.21)$$

となります。したがってこの系の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} (\log r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi} \log r e^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi} \log z \quad (5.22)$$

となります。 $f(z)$ は原点 $z = 0$ に特異点を持ちます³ので、原点では正則でなく、したがってラプラスの式も成り立ちません。

さて、いままで湧き出しで $Q > 0$ としてきました。逆に、 $Q < 0$ の場合には原点に吸い込まれる流れになり、このような流れの場合を吸い込み (sink) といっています。いずれにしても、この流れの共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{Q}{2\pi z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta} = \frac{Q}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (5.23)$$

となります。また、流れの半径方向の速度 u_r と円周方向の速度 u_θ は (5.16) より

$$\frac{df}{dz} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta} = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta} \rightarrow u_r = \frac{Q}{2\pi r}, u_\theta = 0$$

[註] 流れ関数 ψ は流量を表していました。流れ関数を原点を囲む任意の閉曲線上で反時計方向に一周する線積分をとると

$$\oint d\psi = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = Q$$

となって、たしかに流れ関数の原点周りの周回積分で単位時間当たりの流量 Q がでてきました。

5.2.6 半無限物体

一様流れの中に湧き出しのある場合の流れを考えます。一様流は速度 U で x 軸に平行に流れており、原点 O に湧き出しがあるとします。この流れの複素速度ポテンシャルは、重ね合わせの原理により

$$f(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi} \log z \quad (5.24)$$

で与えられます。 z を極座標で表して ($z = r e^{i\theta}$)、速度ポテンシャルと流れ関数を求めると

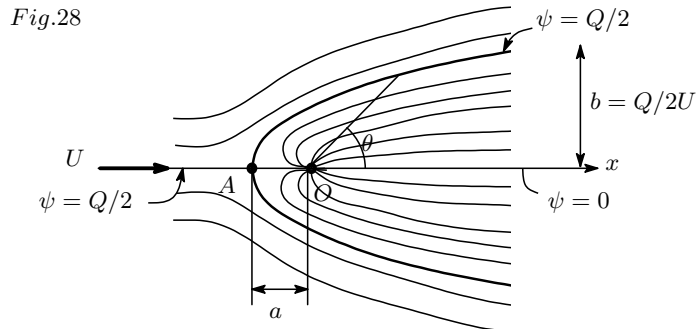
$$f(z) = U r e^{i\theta} + \frac{Q}{2\pi} \log r e^{i\theta} = \left(U r \cos \theta + \frac{Q}{2\pi} \log r \right) + i \left(U r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \right) \quad (5.25)$$

³ 正確には分岐点による特異点ということになります。興味があれば「解析接続」や「分岐点とリーマン面」のレポートを参照ください。

となるので、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{Q}{2\pi} \log r, \quad \psi = Ur \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (5.26)$$

と求められます。



いま、 x 軸に沿った流速を u_x とすると、速度ポテンシャルより $\theta = 0, r = x$ とおいて

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = U + (Q/2\pi) \frac{1}{x} = U + m \frac{1}{x}, \quad (m = Q/2\pi) \quad (5.27)$$

となります。 u_x は $x = -m/U$ の位置でゼロとなり、この点は湧き出しによる速度と一様流速とがちょうど打ち消しあい流速がゼロになるよどみ点 ($x = -a$) を示しています⁴。

次に流れ関数は、 $\theta = 0$ では $\psi = 0$ で一定であり、一つの流線になっています。また $\theta = \pi$ では x 軸の負の部分になりますが、そこでは $\psi = Q/2$ とやはり一定で、それぞれ値が異なるため別の流線となっています。また、 $\theta \neq 0, \pi$ として $\psi = Q/2$ を流れの関数に入れると

$$r = \frac{Q}{2\pi U} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \quad (5.28)$$

が得られます。原点から湧き出した流体は $x \rightarrow \infty$ の十分下流では湧き出しの影響は無視でき一様流になっているとみなせるので (5.28) で示される流線は半無限に長い物体に一様流があたる時の流れを表しているものと考えることができます。 $x \rightarrow \infty$ でこの流れの厚みを $2b$ とすると

$$b = \lim_{\theta \rightarrow 0} r \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{2\pi U} (\pi - \theta) \right) = \frac{Q}{2U} = \pi a$$

となって、厚みは $2b = Q/U = 2\pi a$ となることがわかります。話を整理すると、原点から湧き出した流れは x 軸上の $x = -a$ 点で一様流とぶつかり流速ゼロとなる点を形成し、 x 軸の正の方向で一様流に押し流されてずっと遠方では一様流になるが、流線をよく見ると一様流の中にそれと平行に先端を丸めた半無限に長い板を置いた場合の流れと同じであるということになります。

[註] 速度ポテンシャル ϕ より流速の成分 (u, v) を求めておきます。

$$\begin{aligned} \phi &= Ux + \frac{Q}{2\pi} \log r \\ \therefore u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{Q}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} = U + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

5.2.7 2重湧き出し

同じ強さの湧き出しと吸い込みが無限に接近している場合を考えます。これを2重湧き出しといっています。さて、 x 軸上の $x = -a$ に Q の強さの湧き出しがあり、 $x = a$ に Q の強さの吸い込みがある場合の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z + a) - \frac{Q}{2\pi} \log(z - a) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{z + a}{z - a} \quad (5.29)$$

⁴ よどみ点は $df/dz = 0$ の根。(5.16) 参照

で与えられます。(5.29)を変形し, テイラー展開⁵すると a を微小として

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{1+(a/z)}{1-(a/z)} = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{a}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^3 \cdots \right] - \left[-\frac{a}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^3 \cdots \right]$$

$$\approx \frac{Q}{2\pi} \frac{2a}{z} \tag{5.30}$$

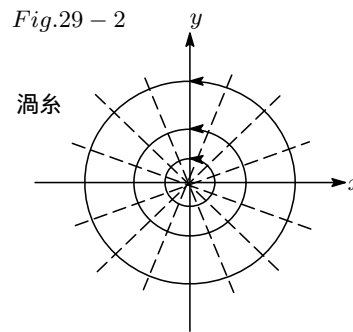
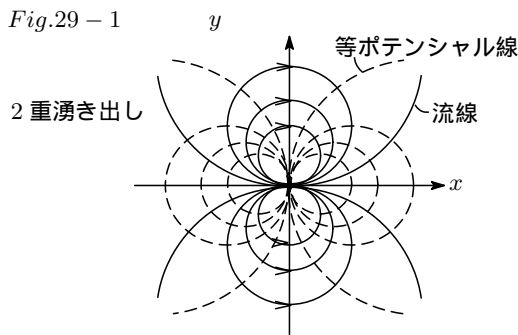
となります。ここで $m = 2aQ$ を一定に保ちながら距離 a を限りなくゼロに近づけた極限⁶をとると, 2重湧き出しの複素ポテンシャルは

$$f(z) = \lim_{2aQ \rightarrow m} \frac{Q}{2\pi} \frac{2a}{z} = \frac{m}{2\pi z} = \frac{m}{2\pi r} e^{-i\theta} \tag{5.31}$$

と得られます。 m は2重湧き出しの強さとか, 2重湧き出しのモーメントといわれます。速度成分 (u_r, u_θ) は(5.16)より

$$\frac{df}{dz} = -\frac{m}{2\pi r} \frac{1}{z^2} = -\frac{m}{2\pi r} \frac{1}{r^2} e^{-i2\theta} = -\frac{m}{2\pi r^2} (\cos \theta - i \sin \theta) e^{-i\theta} = (u_r - i u_\theta) e^{-i\theta}$$

$$\therefore u_r = -\frac{m}{2\pi r^2} \cos \theta, \quad u_\theta = -\frac{m}{2\pi r^2} \sin \theta$$



流れ関数 ψ は

$$f(z) = \frac{m}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \phi + i\psi \tag{5.32}$$

より

$$\psi = -\frac{m}{2\pi r} \sin \theta \tag{5.33}$$

となって, 流線 $\psi = \text{const}$ は $\sin \theta / r = \text{const}$ を満たす曲線で, これは原点で x 軸と接する円⁷となります (Fig.29-1)。また, 等ポテンシャル線は, これらの流線を xy 面内で直角に回転して得られる円群 (Fig.29-1の破線) となりますね。

5.2.8 渦糸

複素速度ポテンシャルが

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \quad (\Gamma: \text{実数}) \tag{5.34}$$

で与えられる流れを調べます。例によって極座標に移ると

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\log r + i\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log r = \phi + i\psi$$

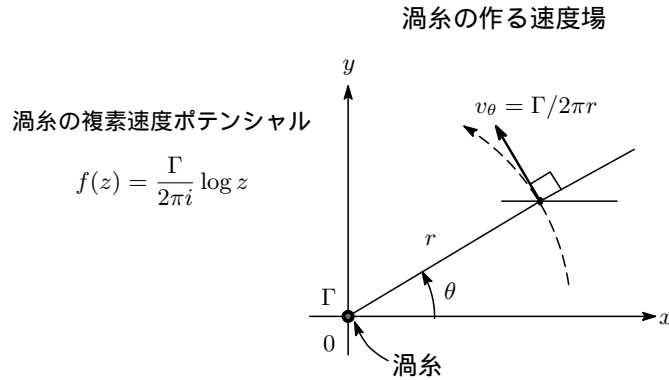
$$\therefore \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \tag{5.35}$$

⁵ $\log(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 \cdots, \quad |x| < 1$

⁶ 距離 a のみを小さくしていくと湧き出しと吸い込みが打ち消しあって外部には何の影響も及ぼさなくなります。しかし, $2aQ$ を一定に保つように距離 $2a$ と湧き出しの強さ Q の積を一定の有限値に保ちながら $a \rightarrow 0$ としていくわけです。双極子モーメントの考え方と同じですね。

⁷ $\psi = 1$ の場合, $\sin \theta = r, \quad r \sin \theta = r^2, \quad r \sin \theta = y, \rightarrow y = r^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + (y-1/2)^2 = (1/2)^2$

これから流線 $\psi = \text{const}$ は原点を中心とした円となることがわかります。また等ポテンシャル線は $\phi = \text{const}$ で原点を中心とする放射線になります (Fig.29-2)。



流速は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (5.36)$$

となつて、原点を中心として周速 $\Gamma/2\pi r$ の旋回流 となることがわかります。原点を囲む任意の閉曲線 C に沿つての循環を計算すると、第3話の §4.5 より

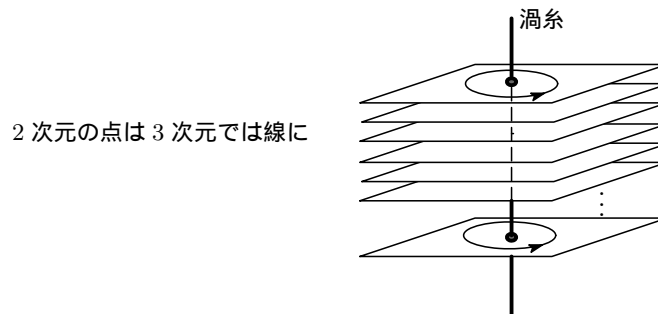
$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C v_s ds = \oint_C (u dx + v dy) = \oint_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) = \oint_C d\phi \quad (5.37)$$

となるので

$$\Gamma(C) = \left[\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right]_0^{2\pi} = \Gamma \quad (5.38)$$

が得られます。したがつて複素速度ポテンシャル $f(z) = (\Gamma/2\pi i) \log z$ は、原点に Γ の渦糸⁸があるときの流れを表していることとなります。尚、湧き出しの図 (Fig.27) と渦糸の図 (Fig.29-2) の違いに注意してください。

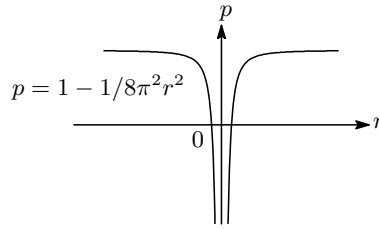
[註] 渦糸の複素速度ポテンシャルは特異点である原点 $z = 0$ を除いて正則ですから $z \neq 0$ の領域でラプラスの方程式を満たし、その領域では (5.8) により "渦なし" (渦度ゼロ) の流れとなります。渦がないのに渦糸とは妙な話に聞こえますが、実はこのケースの場合、渦度は特異点である原点に集中していることとなります。2次元上の1点は3次元に拡張すると1本の線になりますから、渦度を3次元で見れば一本の線上にあることになり、これが渦糸といわれる所以です。渦糸の流れは原点を除くと渦なし流れで、流体粒子の自転はありませんが、原点に対しては公転しています。渦度の概念はあくまで流体の微小部分に着目したもので、全体の流れが渦を巻いていることとは別ということを理解しておくことが重要です。



例題-21 静止した流体中に循環 Γ の2次元渦糸が原点にあるとき、そのまわりの圧力場はどうなっているか。
 答：原点から距離 r の流速は (5.36) より $v_\theta = \Gamma/2\pi r$ 。十分遠方では $r \rightarrow \infty$ であるので $v_\theta \approx 0$ 、距離 r の点での圧力を $p(r)$ として十分遠方での圧力を p_∞ としてベルヌイの式を適用すると $p(r)$ は

$$p(r) + \frac{1}{2} \rho v_\theta^2 = p_\infty \quad \longrightarrow \quad p(r) = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2}$$

⁸ 一つの渦管で渦管の強さを一定に保つたまま渦管の体積を0にした極限を渦糸と呼ぶ。で与えられる。



中心付近では圧力が急激に低下していることがわかる（台風の目とか）。

5.3 静止円柱を過ぎる一様な流れ

5.3.1 円柱周り流れ・その1（循環のない場合）

一様な流れの中に原点に湧き出しのある流れを「半無限物体」のところで見ましたが、この流れは一様流の中にそれと平行に先端を丸めた半無限に長い板を置いた場合の流れと同じでした。そこで、湧き出しの代わりに2重湧き出しを置けばどうなるかを以下にみていくことにします。

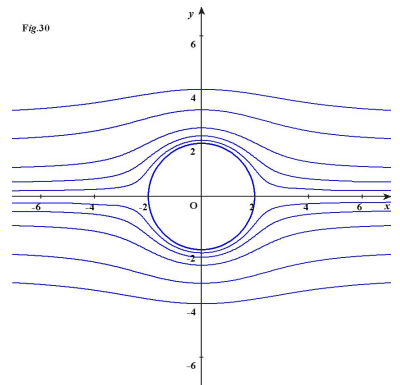
いま場合都合上、2重湧き出し強さを $m = 2\pi a^2 U$ としておきます。そうするとこの流れの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= Uz + \frac{m}{2\pi z} = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \\ &= U \left(r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) \\ &= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + iU \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (5.39)$$

となります。したがって流れ関数は、

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (5.40)$$

と得られます。 $r = a$ のとき、 $\psi = 0 = \text{const}$ となり、この流線は原点を中心とした半径 a の円を表します。流れ関数は定義より正の値ですから $r \geq a$ でなければならず、したがって $\psi = 0$ の流線は境界を表している、つまり一様な流れの中に半径 a の円柱を置いた場合の流れに相当すると考えられます。この流れの様子を $U = 1, a = 2$ として Fig.30 に示します⁹。尚、流線は円柱に近いほうから $\psi = 0.2, 0.5, 1, 2, 3$ としました。



[註] 球を過ぎる3次元一様な流れの流れ関数は

$$\psi = \frac{1}{2} U \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) \sin^2 \theta$$

で与えられます（註終り）。

共役複素速度は

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= u - iv = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \\ &= U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + iU \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\therefore u = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right), \quad v = -U \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta \quad (5.42)$$

となり、円柱表面上の速度は $r = a$ において

$$u = 2U \sin^2 \theta, \quad v = -2U \sin \theta \cos \theta$$

⁹ FunctionView というフリーの関数グラフソフトで描画。

で、 $\theta = \pm\pi/2$ で x 軸方向の流速 u は最速の $2U$ (一様流速の2倍) となります。また、 $r = a, \theta = 0, \pi$ の点では $u = v = 0$ で、この点はよどみ点となります。円柱表面での流速の大きさを q を求めるのに速度成分を極座標で表示すると

$$\begin{aligned}v_r &= u \cos \theta + v \sin \theta = 0 \\v_\theta &= -u \sin \theta + c \cos \theta = -2U \sin \theta\end{aligned}$$

で、速度の大きさは

$$q = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = |v_\theta| = 2U |\sin \theta| \quad (5.43)$$

となります。次に円柱周りの圧力分布は、円柱表面の点と円柱から遠く離れた点(一様流とみなせる領域)との間でのベルヌイの式で求めることができます。ベルヌイの式は

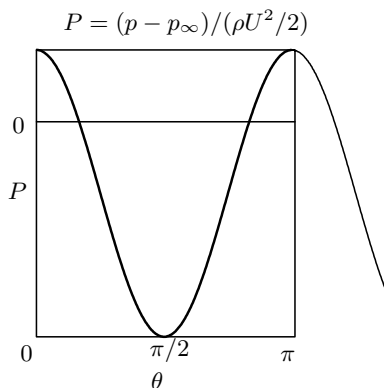
$$p + \frac{\rho}{2} q^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 = p_0 = \text{const} \quad (5.44)$$

となります。 p_∞ は無限遠方での圧力¹⁰、 p_0 はよどみ点での圧力で、これに(5.43)を入れると円柱表面上の圧力は

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (5.45)$$

と求められます (Fig.31)。

Fig.31



円柱にかかる圧力

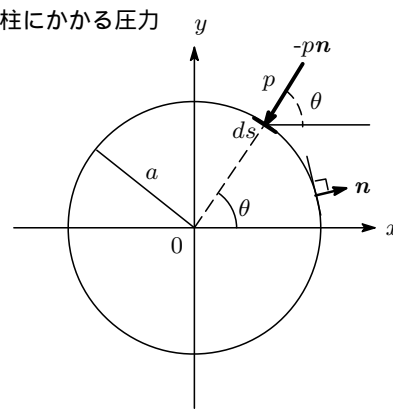


Fig.31 より、円柱表面上の圧力はよどみ点 $\theta = 0, \pi$ でもっとも高く ($p = p_\infty + (\rho/2)U^2$)、流速がもっとも早い $\theta = \pi/2$ で圧力が最も低くなる ($p = p_\infty - (3\rho/2)U^2$) ことがわかります。また、円柱にかかる圧力の合力を $P(P_x, P_y)$ として n を円柱表面の単位法線ベクトルとすると、 P は

$$P = - \oint p n ds \implies P_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta, P_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta, \quad \mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta), ds = a d\theta$$

で与えられます。この式に(5.45)を入れて積分を実行すると $P_x = 0, P_y = 0$ となります¹¹。圧力分布が上下(前後)対称で、力の向きは上下(前後)の部分でそれぞれ反対方向に向いているのでトータルするとゼロになり、円柱には流れの抵抗力が働かないということになります¹²。もっとも、実際の流れでは粘性の影響で境界層剥離などが発生し、円柱表面上の圧力分布は前後対称とはならず円柱に抵抗は働きます。

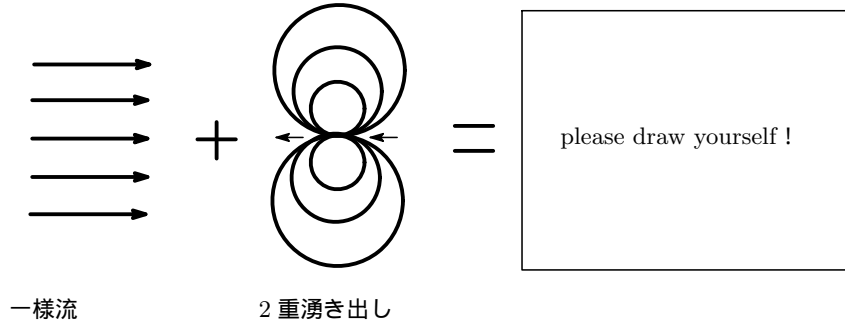
[独り言] 一様流の中に1個の湧き出しがあった場合は先端が丸まった半無限に長い板と平行に流れる流れとなった。いまの場合、湧き出しと吸い込みがペアになっており、吸い込みの効果で拡がる流れが抑えられ、棒 円柱になるというイメージだな。2重湧き出しでなく湧き出しと吸い込みが有限の距離を隔ててあるばあいは、流線はランキン(Rankine)の卵形という曲線で表されるとのこと(詳細は今井功「流体力学(前編)」P88を参照)。なるほどという感じだが、最初に吸い込みがあり後で湧き出しのあるような場合はどうなるか? また、半無限のケースで湧き出しでなく吸い込み($Q < 0$)だったらという問題が気にはなるが、今は先を急ぐ(?)のでホッタラカシにしておく。。。興味のある方はぜひ追求してみてください。

¹⁰ 大気圧下であれば大気圧

¹¹ 積分計算サービス: <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>

¹² これはダランベールのパラドックスといわれています。

【一様流と2重湧き出しの重ね合わせ】



5.3.2 円柱周り流れ・その2 (循環のある場合)

「一様な流れ」と「2重湧き出し」に「渦糸」の旋回流 ($\Gamma < 0$: 時計回りとする) を重ね合わせた流れを考えてみましょう。2重湧き出しと渦糸はともに原点にあるとします。この流れは、2重湧き出しと渦糸の流線を重ね合わせたものとして表されます。したがって、この流れを概観すると、渦糸は時計回りに旋回流をつくるので円柱の上半面での流れは加速され、一方、下半面では流れが減速されます。その結果、ベルヌイの定理により円柱の上側では圧力が低下し、逆に下側では圧力が上昇するので、円柱は上方に揚力を受けるということになります。

さて、この流れの複素ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z = U \left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log re^{i\theta} \\ &= \left\{ U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma_C}{2\pi} \theta \right\} + i \left\{ U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi} \log r \right\} \\ &= \phi + i\psi \quad (\Gamma_C = -\Gamma) \end{aligned} \quad (5.46)$$

速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma_C}{2\pi} \theta$$

これから速度の動径方向成分と周方向の成分は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.47)$$

$$v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi r} \quad (5.48)$$

となります。また、流れ関数 ψ は

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi} \log r \quad (5.49)$$

で、共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = u - iv = u \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma_C}{2\pi z} \quad (5.50)$$

$$= \left\{ U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + \frac{\Gamma_C}{2\pi r} \sin \theta \right\} + i \left\{ U \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi r \cos \theta} \right\} \quad (5.51)$$

と得られます。流れのようすを見るために、よどみ点 z_s を求めます。 z_s は $df/dz = 0$ の根 ($u = v = 0$) として求められますから (5.50) より

$$z_s = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{i\Gamma_C}{2\pi U} \pm \sqrt{4a^2 - \frac{\Gamma_C^2}{4\pi^2 U^2}} \right\} = -\frac{i\Gamma_C}{4\pi U} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma_C}{4\pi U} \right)^2} \quad (5.52)$$

が得られ、よどみ点は2個あることがわかります。根号内为正, ゼロ, 負の3つの場合で流れの様子は3通りに分かれます。

(1) $4\pi aU < \Gamma_C$ の場合

この場合は, $|z_s| = \left(-\frac{i\Gamma_C}{4\pi U} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma_C}{4\pi U}\right)^2}\right) \left(-\frac{i\Gamma_C}{4\pi U} \mp \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma_C}{4\pi U}\right)^2}\right) = a$ となって, 円柱上によどみ点が2個あることとなります。

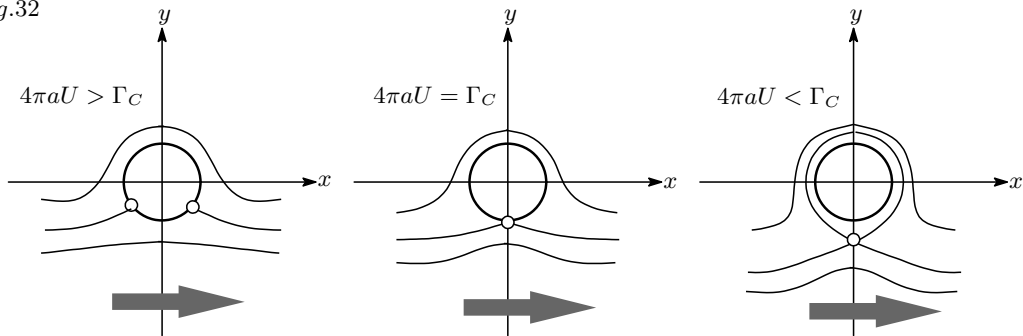
(2) $4\pi aU = \Gamma$ の場合

この場合は, $z_1 = z_2 = -i\Gamma_C/4\pi U = -ia$ となって, 円柱表面の最下端がよどみ点となります。

(3) $4\pi aU > \Gamma_C$ の場合

この場合は, $z_s = i(-\Gamma_C/4\pi aU \pm \sqrt{(\Gamma_C^2/16\pi a^2 U^2) - a^2})$ で z_s は純虚数となり, よどみ点は y 軸上(虚軸上)に存在します。 $z_1 = i(-\Gamma/4\pi aU - \sqrt{(\Gamma_C^2/16\pi a^2 U^2) - a^2})$ は虚軸下方の円の外部の点, $z_2 = -\Gamma/4\pi aU + \sqrt{(\Gamma_C^2/16\pi a^2 U^2) - a^2}$ は円の内部の点となるので, 実際に流れの中に現れるよどみ点は円外の1個となります。

Fig.32



次に圧力分布を求めます。円柱表面では $r = a$ だから, (5.46) より速度ポテンシャルは

$$\phi = 2aU \cos \theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi} \theta \quad (5.53)$$

となり, 円周周りの速度 v_θ は

$$v_\theta = \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta}\right)_{r=a} = -(2U \sin \theta - \Gamma_C/2\pi a) \quad (5.54)$$

となりますから, よどみ点での圧力を p_0 とすると, ベルヌイの定理より

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 \quad \longrightarrow \quad p = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 = p_0 - \frac{\rho}{2a^2} \{4a^2 U^2 \sin^2 \theta - 4aU(\Gamma_C/2\pi) \sin \theta + (\Gamma_C/2\pi)^2\} \quad (5.55)$$

と求められます。円柱にかかる圧力の合力を $P(P_x, P_y)$ とすると

$$P_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = 0, \quad P_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = -\rho U \Gamma \quad (5.56)$$

となります。流れが物体におよぼす力の流れ方向の成分を抵抗, 流れに直角方向の成分を揚力といますが, 円柱の場合抵抗はゼロで揚力は $-\rho U \Gamma$ であることがわかりました。

[註] 全く同様にして, 静止流体中を速度 U で走っている円柱が循環 Γ をもっている場合, 走っている方向に揚力 $\rho U \Gamma$ を受けます。これをクッタ・ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理と呼んでいます, この定理は第6話に登場しますのでお楽しみに。

Fig.33

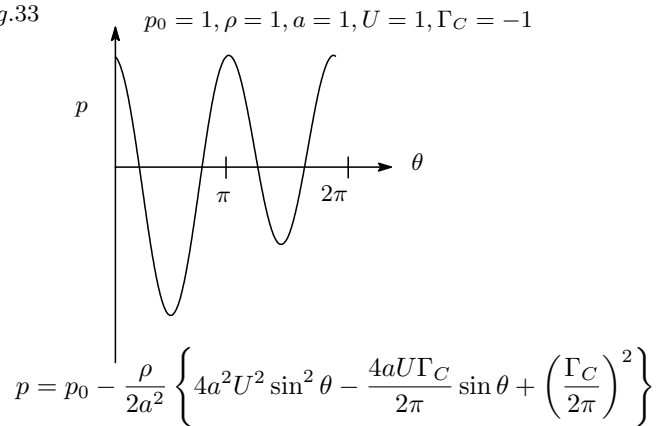


Fig.33 にみられるように、流れが加速される円柱の上側では圧力が低下し、流れが減速される円柱の下側では圧力が増大していることがわかります。

(了)

お疲れ様でした。いろいろな流れの圧力分布を求めているうちにこちらも相当圧力を感じ始めましたので(笑い)このあたりで第4話をお開きにすることにします。

[追記]

- § 5.2.1 速度ポテンシャルと流れ関数の極座標表示での関係を追記 (2008.9.6)
- § 5.2.2 複素速度ポテンシャルと流れの極座標成分との関係を追記。(＼)
- § 5.3.1 球のまわりの3次元流れの流れ関数を追記。(＼)
- § 5.2.5 u_r, u_θ の表記ミスを修正 (2008.9.8)

誤植のご指摘

2011.7.23 : (5.11) の正誤 Thank's yuki さん。

(誤) $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$

(正) $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$