

流体力学講話・つまみ食い(その5)

KENZOU

2008年8月9日

♣ 流体力学のお話も5回目となりました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など, 4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念ができました。また, 静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は, 任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジューコフスキー定理, それから等角写像とその活用などを学びます。それでははじめます。

目次

6	ブラジウスの公式	2
6.1	運動量保存則(復習)	2
6.2	ブラジウスの第1公式	2
6.3	ブラジウスの第2公式	4
7	クッタ・ジューコフスキーの定理	5
8	ジューコフスキー変換	6
8.1	等角写像	6
8.2	ジューコフスキー変換	7
8.2.1	円柱を過ぎる流れ	8
8.2.2	平板を過ぎる流れ	9
	平板に働く揚力	11
	平板に働くモーメント	11

=====

6 ブラジウスの公式

前のセクションでは、外力が作用しない非圧縮性完全流体の2次元定常流れの中におかれた円柱の物体に流体がおよぼす力を求めました。具体的には、ベルヌイの定理から物体の表面に作用する圧力を求め、その圧力の合力で物体に及ぼす力を求めました。ここでは、運動量および角運動量の保存則を使って任意の物体におよぼす力を求める一般的な公式を導出することにします。これはブラジウス (Blasius) の公式と呼ばれます。その前に第2話・§3の運動量保存則を復習しておきましょう。

6.1 運動量保存則 (復習)

流体の中にある領域をとり、その領域内の全運動量の単位時間当たりの増加率¹は次式で与えられました。

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} v_n dS - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{K} dV \quad (6.1)$$

右辺第1項は領域 V の表面を横切って単位時間に流入する運動量 (流れに携帯される運動量) で、第2項は領域の外にある流体から受ける全圧力で第3項は領域内の流体に作用する全外力でした。いま、2次元流れで外力の作用がないとします。単位時間あたりの運動量の流れを dG として、上の式を微分形式で書くと次のようになります²。

$$dG = -(pn + \rho v v_n) ds \quad (6.2)$$

ここで、 \mathbf{n} は C の外向きの単位法線ベクトル、 v_n は速度の法線成分です。(6.2) を x, y 成分に分けます。 $\mathbf{n} = (dy/ds, -dx/ds)$ でしたから³

$$\mathbf{n} ds = (dy, -dx)$$

また、流れ関数を ψ とすると

$$v_n ds = d\psi$$

これらを (6.2) に入れると

$$\left. \begin{aligned} dG_x &= -p dy - \rho u d\psi \\ dG_y &= p dx - \rho v d\psi \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

と得られます。

6.2 ブラジウスの第1公式

上で単位時間あたりの運動量の流れの x, y 成分を求めました。この式を以下のように式を変形していきます。(6.3) の下の式に $-i$ をかけて上の式に加えると

$$dG_x - idG_y = -ip(dx - idy) - \rho(u - iv)d\psi \quad (6.4)$$

また、複素速度ポテンシャルと流れ関数の関係より

$$\begin{aligned} f &= \phi + i\psi, \quad \bar{f} = \phi - i\psi \quad \longrightarrow \quad \psi = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \\ d\psi &= \frac{1}{2i}(df - d\bar{f}) \quad \longrightarrow \quad d\psi = \frac{1}{2i} \left(\frac{df}{dz} dz - \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} d\bar{z} \right) \\ \frac{df}{dz} &= u - iv, \quad \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right) = \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} = u + iv \quad \longrightarrow \quad \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} = u^2 + v^2 = q^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

¹ ニュートンの運動方程式: $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, \mathbf{p} : 運動量, \mathbf{F} : 力

² 2次元流を考えているので面積素 dS は線素 ds になります。

³ 第4話 §5.1 参照

が得られます。よどみ点での圧力を p_0 とするとベルヌイの定理より

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho q^2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \quad (6.6)$$

となりますから、以上の式を整理すると

$$\begin{aligned} d(G_x - iG_y) &= -ipd\bar{z} + \frac{i}{2}\rho \frac{df}{dz} \left(\frac{df}{dz} dz - \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= -ipd\bar{z} + \frac{i}{2}\rho \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz - \frac{i}{2}\rho \left(\frac{df}{dz} \right) \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right) d\bar{z} \\ &= -ip_0 d\bar{z} + \frac{i}{2}\rho \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (6.7)$$

が得られます。物体に作用する力を $F(X, Y)$ とすると (6.2) より

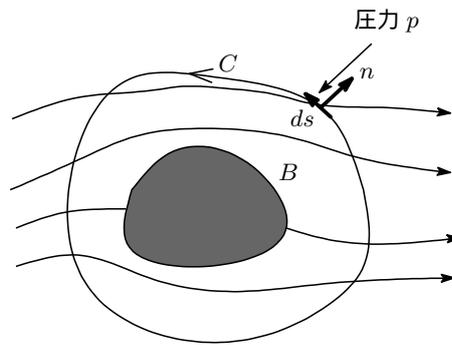
$$\mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{G} \quad \rightarrow \quad X = F_x = \oint_C dG_x, \quad Y = F_y = \oint_C dG_y \quad (6.8)$$

で与えられます。したがって

$$\begin{aligned} X - iY &= \oint_C d(G_x - iG_y) = -ip_0 \oint_C d\bar{z} + \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad \left(\because \oint_C d\bar{z} = [\bar{z}]_C = 0 \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

となります。(6.9) は、複素速度ポテンシャルから物体に働く力を求めるための一般的な式で、ブラジウスの第1公式と呼ばれます。閉曲線 C はコーシーの積分定理⁴により物体を囲む任意の閉曲線をとればよいこととなります(もちろん、閉曲線 C として物体表面の曲線をとってもいいわけです)。

Fig.34



例題-22 第4話の §5.3.2 で循環のある場合の円柱周りの流れの圧力分布を求め、その結果

$$P_x = 0, \quad P_y = -\rho U\Gamma \quad (6.10)$$

となった。これを運動量保存則から導け。

答：第4話の §5.3.2 より、円柱より十分はなれたところ(円柱を囲む半径 R の閉曲線を考える)での動径方向と周方向の速度成分は

$$\begin{aligned} v_r &\approx U \cos \theta, \quad v_\theta \approx -U \sin \theta + \frac{\Gamma_C}{2\pi R} \\ u &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

(6.2)(6.8) より

$$\begin{aligned} X &= \oint_C dG_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta - \int_0^{2\pi} \rho u u_r R d\theta \\ Y &= \oint_C dG_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta - \int_0^{2\pi} \rho v v_r R d\theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

⁴ 関数 $f(z)$ は閉曲線 C および C で囲まれた小域 D のすべての点で正則ならば $\int_a^b f(z) dz = 0$ の値は積分経路に依存しない。今の場合、 f は正則関数だから、何回微分しても正則関数になります。

を得る。無限遠方での流速は $U(= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2})$ で、その場所での圧力を p_∞ とする。ベルヌイの定理より

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \approx p + \frac{1}{2}\rho \left(U^2 - 2U \frac{\Gamma_C}{2\pi R} \sin \theta \right)$$

$$\therefore p = p_\infty + \frac{\Gamma_C}{2\pi R} \rho U \sin \theta \quad (6.12)$$

であるので、これらの式を (6.11) に入れて積分を実行すると $X = 0, Y = -\rho U \Gamma$ を得る。

例題-23 例題 22 をブラジウスの第 1 公式を使って求めよ。

答：複素ポテンシャル f から共役複素速度ポテンシャルを求めると

$$f = U \left(a + \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma_C}{2\pi} \log z$$

$$\frac{df}{dz} = U \left(a - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma_C}{2\pi z}$$

ブラジウスの第 1 公式 (6.9) より

$$X - iY = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left\{ U \left(a - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma_C}{2\pi z} \right\}^2 dz$$

$$= \frac{i}{2}\rho \oint_C \left\{ U^2 \left(1 - \frac{2a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4} \right) + \frac{iU\Gamma_C}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \frac{a^2}{z^3} \right) - \frac{\Gamma_C^2}{4\pi^2 z^2} \right\} dz$$

$$= \frac{i\rho iU\Gamma_C}{2\pi} 2\pi i = -i\rho U\Gamma_C$$

$$\therefore X = 0, Y = \rho U\Gamma_C = -\rho U\Gamma$$

ただし、次のコーシーの定理を使った。

$$\oint_C z^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ 2\pi i & (m = -1) \end{cases}$$

註：ブラジウスの第 1 公式を使うと簡単に求められますね！

6.3 ブラジウスの第 2 公式

次に物体に働く力のモーメントを求めます。モーメント中心 (原点) を物体の中にとっておきます。運動量のモーメントは角運動量ですから⁵、閉曲線 C 上の線素 ds を通して右から左に "流入する" 角運動量の流れを考えます。単位時間当たりの角運動量の流れは、したがって

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{G} = (y dG_z - z dG_y, z dG_x - x dG_z, x dG_y - y dG_x)$$

$$= (0, 0, x dG_y - y dG_x) \quad (6.13)$$

となり、複素表示をつかうと⁶

$$dM_z = -\text{Im}\{(x + iy)(dG_x - idG_y)\} = \text{Im}\left\{ ip_0 z d\bar{z} - \frac{i}{2}\rho \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\}$$

$$= \text{Re}\left\{ p_0 z d\bar{z} - \frac{1}{2}\rho \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\} = \frac{p_0}{2} d(z\bar{z}) - \frac{\rho}{2} \text{Re}\left\{ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\} \quad (6.14)$$

となります。したがって、物体に働く力のモーメント M_z は閉曲線 C に沿っての周回積分で与えられますから

$$M_z = \oint_C dM_z = \oint_C \frac{p_0}{2} d(z\bar{z}) - \frac{\rho}{2} \text{Re} \oint_C \left\{ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\}$$

$$= -\frac{\rho}{2} \text{Re} \oint_C \left\{ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\} \quad (6.15)$$

⁵ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

⁶ $\text{Re}(z d\bar{z}) = x dx + y dy = \frac{1}{2} d(z\bar{z})$

この式をブラジウスの第2公式と呼んでいます。被積分関数は正則ですから第1公式と同様に物体を囲む閉曲線 C のとり方は任意となります。

7 クッタ・ジューコフスキーの定理

第4話の§5.3.2の「円柱周りの流れ(循環のある場合)」のところで、静止流体中を速度 U で走っている円柱が循環 Γ をもっている場合、走っている方向に揚力 $\rho U \Gamma$ を受け⁷、クッタ・ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理と呼んで紹介しました。この定理はなにも円柱だけに限らず、任意形状の2次元物体について言うことが知られています。このことを、ブラウジウスの第1, 第2公式を使って示します。

いま、 x 軸方向に流れる一様流の中に2次元の物体がおかれていますとします。物体の内部に原点をとると、共役複素速度 df/dz は物体外部の領域で1価正則となり、 $1/z$ のべき級数 (z のローラン展開ですね) で展開される⁸ことが知られています。そうすると共役複素速度は

$$\frac{df}{dz} = U + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots \quad (7.1)$$

と展開でき、 $z \rightarrow \infty$ で $df/dz = U$ と一様な流れの流速 U になることがわかります。尚、展開係数 c_{-n} は一般に複素数です。この式を積分すると

$$f = Uz + c_0 + c_{-1} \log z - \frac{c_{-2}}{z} - \frac{c_{-3}}{z^2} \dots \quad (7.2)$$

これが物体の周りの一様流を表す複素速度ポテンシャルの一般形ということになります。 c_0 は積分定数で、その値を変えても流れの様子は変わりません(微分するとゼロ)。いま、物体を囲む任意の閉曲線 C をとり、その周回積分での f の変化をみると

$$\begin{aligned} \oint_C df &= \oint_C d\phi + i \oint_C d\psi = \Gamma(C) + iQ(C) \\ &= \oint_C U dz + \oint_C \frac{c_{-1}}{z} dz + \oint_C \frac{c_{-2}}{z^2} dz + \oint_C \frac{c_{-3}}{z^3} dz + \dots \\ &= c_{-1} 2\pi i \end{aligned} \quad (7.3)$$

ここで

$$c_{-1} = \frac{Q}{2\pi} + i \frac{-\Gamma}{2\pi} \quad (7.4)$$

とおくと(7.3)の右辺が成立することがわかります。尚、 Q は物体から流出する流量で、 Γ は物体の周りの(時計方向の)循環です。(7.1)の第1項は一様流、第2項は循環のある場合の円柱周りの一様流れに相当し、第3項は2重湧き出し、 z^{-3} 以降の項はより複雑な流れに対応し原点から離れるにしたがって急速に減衰する多重湧き出しの流れ⁹に相当することがわかります。ということで、ローラン展開の物理的な意味は「一様流の中におかれた物体の周りの流れは、物体の中の一つの点に湧き出し、渦、2重湧き出し、多重湧き出しをおくことで表すことができる」ということになります。

さて(7.1)をブラウジウスの第1公式に入れて、物体に働く力(X, Y)を求め、クッタ・ジューコフスキーの定理を示していきます。(7.1)より

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{2Uc_{-1}}{z} + (c_{-1}^2 + 2Uc_{-2})\frac{1}{z^2} + \dots \quad (7.5)$$

これをブラウジウスの第1公式(6.9)に入れ、コーシーの定理を使うと

$$\begin{aligned} X - iY &= \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left\{ U^2 + \frac{2Uc_{-1}}{z} + (c_{-1}^2 + 2Uc_{-2})\frac{1}{z^2} + \dots \right\} dz \\ &= \frac{i}{2}\rho \oint_C \frac{2Uc_{-1}}{z} dz = \frac{i\rho}{2} 2Uc_{-1} 2\pi i = -2\pi\rho U c_{-1} \\ &= \rho U (-Q(C) + i\Gamma(C)) \end{aligned} \quad (7.6)$$

⁷ 揚力：走行方向に対して垂直に働く力。

⁸ 拙稿「[対話] ローラン展開と留数・主値積分について」を参照ください。

⁹ このあたりは今井功「流体力学(前編)」P90を参照ください。

これから

$$X = -\rho U Q(C), \quad Y = -\rho U \Gamma(C) \quad (7.7)$$

が得られます。(7.7)の2つ目の式が第4話§5.3.2の[註]でお話したクッタ・ジューコフスキーの定理です。改めてこの定理を書いておくと

「強さ $-\Gamma$ の循環を有する円柱が速度 U の一様な流れの中におかれた場合、円柱には流れに垂直上方に $L = \rho U \Gamma$ で示される揚力 L が作用する。これをクッタ・ジューコフスキーの定理という。この定理は円柱だけでなく、一般に任意形状について成立する。」

ということになります¹⁰。

次に(7.7)の1つ目の式ですが、物体を囲む領域から湧き出しがある場合($Q > 0$)は物体に推進力が働き、逆に物体を囲む領域へ流れの吸い込みがある場合($Q < 0$)には、物体に抵抗が働くということになります。普通、物体から流体が湧き出したり吸い込まれたりすることはないので、 $Q = 0$ とおくことができます。すると $X = 0$ で抵抗はゼロとなります。

次に、ブラウジウスの第2公式を使って物体の原点まわりのモーメントを求めます。(6.15)より

$$\begin{aligned} M_z &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \left\{ \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \right\} = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \left\{ U^2 z + 2Uc_{-1} + \frac{(c_{-1}^2 + 2Uc_{-2})}{z} + \dots \right\} \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C \left\{ \frac{(c_{-1}^2 + 2Uc_{-2})}{z} \right\} dz = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ (c_{-1}^2 + 2Uc_{-2}) 2\pi i \} \\ &= -\pi \rho \operatorname{Re}(ic_{-1}^2 + 2iUc_{-2}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

ここで c_{-1} は(7.4)で与えられました。 c_{-2} も複素数ですから $c_{-2} = \operatorname{Re}(c_{-2}) + i\operatorname{Im}(c_{-2})$ と書くと(7.8)は

$$M_z = -\frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} + 2\pi \rho U \operatorname{Im}(c_{-2}) \quad (7.9)$$

となります。モーメントには2重湧き出しの項までが影響することがわかります。

8 ジューコフスキー変換

8.1 等角写像

いま、2つの複素平面を考え、一つを z 平面 ($z = x + iy$)、他方を ζ 平面 ($\zeta = \xi + i\eta$) とします。この2つの平面間の複素数 z と ζ の間に関数関係

$$z = g(\zeta) \quad (8.1)$$

があるとして、ここで $g(z)$ は正則な関数(解析関数)とします。(8.1)は $g(z)$ による z 平面から ζ 平面への写像といいますが、いま関数 $g(z)$ は正則なのでこの写像のことを等角写像¹¹といいますが、等角写像は「等ポテンシャル線は等ポテンシャル線に、流線は流線に写像し、循環および流出量は等角写像に際し不変」という特長をもちます

いま、 z 平面での複素速度ポテンシャルを $f(z)$ とすると(8.1)の関係式より新たな解析関数をつくることができ、それを $w(\zeta)$ とすると

$$f(z) = f(g(\zeta)) \equiv w(\zeta) \quad (8.2)$$

となつて、この新たな解析関数 $w(\zeta)$ は ζ 平面での複素速度ポテンシャルと考えることができます。したがって、仮に z 平面での流れが既知である場合、解析関数 g を適当に選べば ζ 平面上での複雑な流れを調べることができます。逆のことも当然いえるわけで、要するに複雑な流れを簡単な流れに焼きなおす手法が流体力学における等角写像のうまみということになります。これが流体力学で等角写像が重宝される理由ですね。それでは早速そのうまみを味わっていくことにします。

¹⁰ 揚力と抵抗は一樣流の方向に対して定義されます。つまり、揚力は一樣流に対して直角の方向に作用する力で、抵抗は一樣流に平行な方向に作用する力と定義されます。

¹¹ 等角写像の詳細なお話は「等角写像と流体力学への応用」を参照ください。

8.2 ジューコフスキー変換

解析関数 $z = g(\zeta)$ として

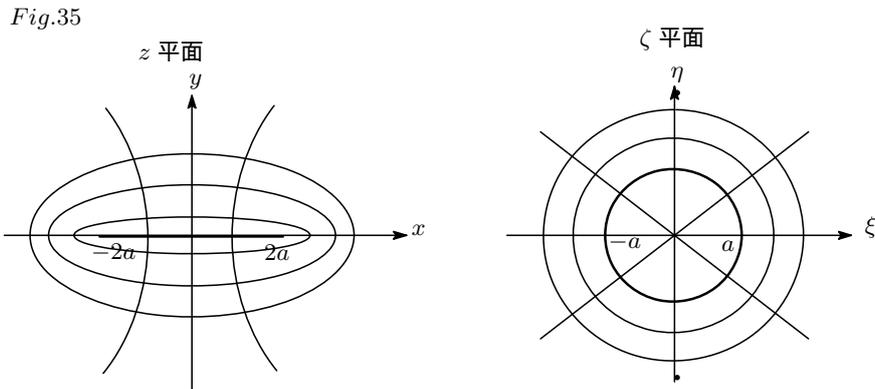
$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, \quad a > 0 \quad (8.3)$$

を考えます。この変換をジューコフスキー変換といいます。 ζ を極形式で表すと、 $\zeta = Re^{i\theta}$ として

$$z = x + iy = Re^{i\theta} + \frac{a^2}{R}e^{-i\theta} = \left(R + \frac{a^2}{R}\right)\cos\theta + i\left(R - \frac{a^2}{R}\right)\sin\theta \quad (8.4)$$

$$\therefore x = \left(R + \frac{a^2}{R}\right)\cos\theta \quad y = \left(R - \frac{a^2}{R}\right)\sin\theta \quad (8.5)$$

となります。



いま、 ζ 平面上の円 ($R = \text{const}$) は (8.3) でどのように変換されるのかを見てみます。まず、 $R = a$ (半径 a の円) は $x = 2a \cos\theta$, $y = 0$ となり、 x 軸上の $x = -2a \sim 2a$ (長さ $4a$ の平板) に写像されることがわかります。 $R > a$ のときは (8.5) より θ を消して

$$\frac{x^2}{\left(1 + \frac{a^2}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - \frac{a^2}{R}\right)^2} = 1 \quad (8.6)$$

となり、原点を中心とし、 x 軸を長軸として長径 $\left(R + \frac{a^2}{R^2}\right)$ 、短径 $\left(R - \frac{a^2}{R^2}\right)$ 、焦点 $(\pm 2a, 0)$ の楕円に写像されます。尚、 $R < a$ の場合、つまり ζ 平面上での半径 a の円の内部の点は $x = -2a \sim 2a$ の線上を除くすべての z 平面的領域に対応しますが、いまは円の外部に注目しているのでこのケースは除きます。 ζ 平面上の原点からでる半直線 $\theta = \text{const}$ は (8.5) の両辺を 2 乗して足すと

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 4a^2 \quad (8.7)$$

となって、先ほどと同じく焦点 $(\pm 2a, 0)$ の双曲線に写像されます。

これでジューコフスキー変換の概要がわかったので、流体力学に応用した場合のケースについて少しみてみます。 x 軸に平行な速度 U の一様流の中に x 軸に沿って長さ $4a$ の平板がおかれているとしてその複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = Uz \quad (8.8)$$

で与えられます。これをジューコフスキー変換 (8.3) によって ζ 平面にうつると、 ζ 平面での複素ポテンシャルは

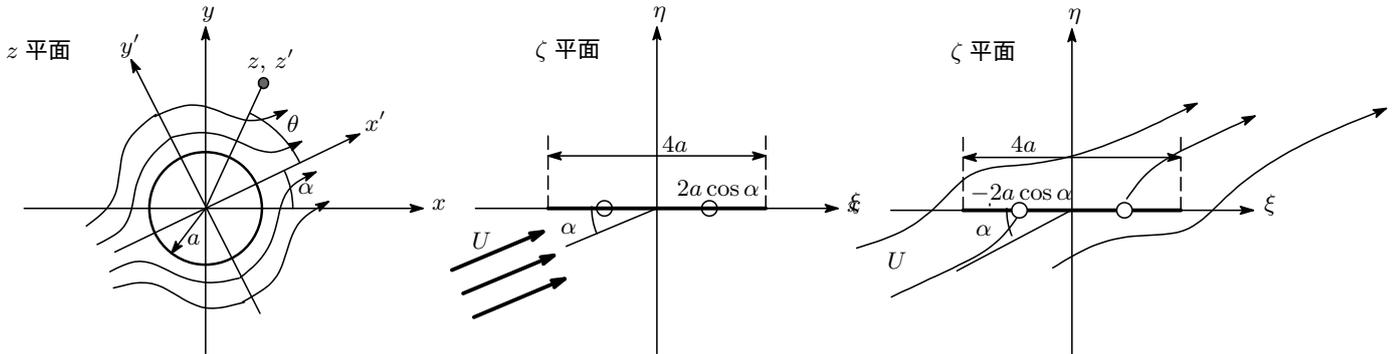
$$f = U \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (8.9)$$

で与えられ、これは既に §5.3.1 でみた円柱周りの流れの複素速度ポテンシャルとなります。つまり、簡単な複素速度ポテンシャルから円柱周りの流れを表す複素ポテンシャルが等角写像により求められたということになります。等角写像を使わず真正面から円柱周りの複素速度ポテンシャルを求めようとすると大変厄介なことになるので、これは大変貴重な方法ということになります。それでは、具体的な問題にあたってみましょう。

8.2.1 円柱を過ぎる流れ

z 平面の x 軸と角 α をなす速度の大きさ U の一様流 (x' 軸方向の一様流) の中に, 半径 a の円柱がおかれた場合の流れを調べます。

Fig.36



x' 軸方向に速度 U の一様な流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U \left(z' + \frac{a^2}{z'} \right)$$

与えられます。 $z' = ze^{-i\alpha}$ となりますから, 上式は

$$f(z) = U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) \quad (8.10)$$

となります。ジューコフスキー変換

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad (8.11)$$

により, z 平面上の半径 a の円は ζ 平面上の長さ $4a$ の平板に写像されます。(8.11) より

$$z = \frac{1}{2} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2})$$

となり¹², ζ 平面上での複素速度ポテンシャルを $w(\zeta)$ とすると

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= f(\zeta) = U \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2} e^{-i\alpha} + \frac{2a^2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}} e^{i\alpha} \right) \\ &= U (\zeta \cos \alpha - i \sqrt{\zeta^2 - 4a^2} \sin \alpha) \end{aligned} \quad (8.12)$$

となります。流れが平板にあたって流速がゼロとなるよどみ点は $dw/d\zeta = (dw/dz)(dz/d\zeta) = 0$ より $dw/dz = 0$ として求められるので

$$\frac{dw}{dz} = U \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad z_s = \pm a e^{i\alpha} \quad (8.13)$$

したがって, ζ 平面上でのよどみ点は

$$\zeta_s = z + \frac{a^2}{z} = \pm a (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \pm 2 \cos \alpha \quad (8.14)$$

となります。 ζ の十分大きなところでは (8.12) より

$$w(\zeta) = U \zeta \left(\cos \alpha - i \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\zeta^2}} \sin \alpha \right) \approx U e^{-i\alpha} \zeta \quad (8.15)$$

となり, ξ 軸と α の傾きをなす速度 U の一様流になります。

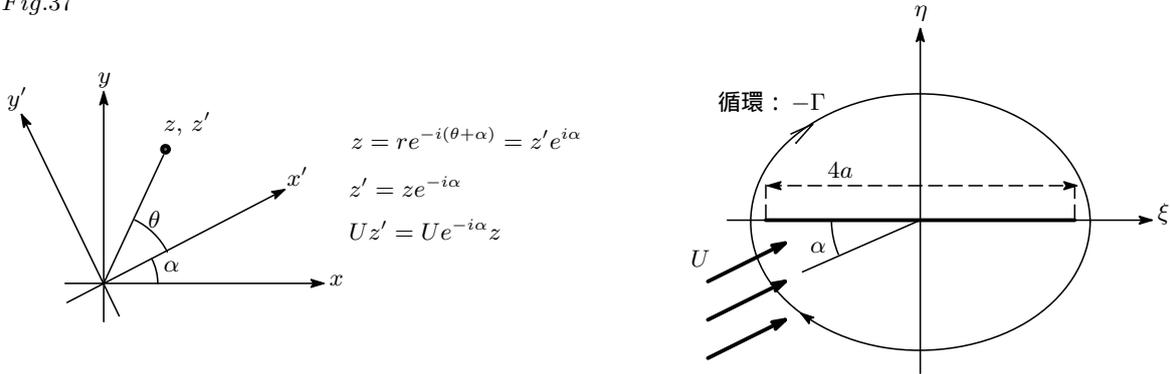
以上, 円柱の周りを通る一様流の複素速度ポテンシャルをジューコフスキー変換で一様流の中におかれた平板に写像し, そうして得られた複素速度ポテンシャルにより平板の周りの流れを調べることができました。

¹² 根号のマイナスは円の内部領域を ζ 平面に写像しますが, いまは円の外部の領域を注目しているので省きます。

8.2.2 平板を過ぎる流れ

次に, z 平面の x 軸と角 α をなす速度の大きさ U の一様流 (x' 軸方向の一様流) の中に長さ $4a$ の平板がおかれ, 且つ循環 ($-\Gamma$) がある場合の流れを調べます。一様な流れが x 軸に対して角 α 傾いていることを考慮して z を $z' = ze^{-i\alpha}$ で置き換えます。

Fig.37



平板から十分はなれた遠方では一様流になりますから, そこでの複素ポテンシャルは

$$f(z') = Uz' \longrightarrow (Ue^{-i\alpha})z, \quad z' \rightarrow \infty \quad (8.16)$$

となり ζ 平面で原点から十分離れたところでは角 α の一様流となることがわかります。

さて, ジューコフスキー変換

$$z' = \zeta' + \frac{a^2}{\zeta'}$$

により長さ $4a$ の平板を ζ 平面上の半径 a の円に写像し, 円柱周りの複素速度ポテンシャルを求めます。”等角”写像により

$$z' = ze^{-i\alpha} \longrightarrow \zeta' = \zeta e^{-i\alpha} \quad (8.17)$$

となることに注意すると複素速度ポテンシャルは

$$w(\zeta) = f(\zeta) = U \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right)$$

となります。ところで円柱周りの流れは一般的には一様流, 2重湧き出しに加え渦糸の重ねあわせで表すことができますから, 渦糸の複素ポテンシャルも加えると一般的な複素ポテンシャルは

$$w(\zeta) = f(\zeta) = U \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta e^{-i\alpha} = U \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (8.18)$$

となります(ここで, 最後の \log の項からでる $-(\Gamma/2\pi)\alpha$ の項は定数項で, この付加項は複素速度ポテンシャルの勾配をとればゼロとなり, 速度場には効かないので省略しました)。これで平板に対して一様流が斜めにあたり, かつ平板周りに大きさ $-\Gamma$ の循環がある場合の複素速度ポテンシャルが得られました。

円柱の周りの流速は (8.18) より

$$\frac{dw}{d\zeta} = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \quad (8.19)$$

よどみ点は $dw/d\zeta = 0$ より

$$\begin{aligned} \zeta^2 + \frac{i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi U} \zeta - a^2 e^{i2\alpha} &= 0 \\ \therefore \zeta_s &= \frac{-e^{i\alpha}}{4\pi U} (i\Gamma \pm \sqrt{16\pi^2 a^2 U^2 - \Gamma^2}) \end{aligned} \quad (8.20)$$

と得られます。これは第4話の§5.3.2の場合の x 軸に平行な一様流が円柱にあたる時にできるよどみ点 (z_s')

$$z_{s'} = \frac{-1}{4\pi U} (i\Gamma \pm \sqrt{16\pi^2 U^2 a^2 - \Gamma^2})$$

に流れの傾きの係数をかけたもの ($z_s = z_{s'} e^{i\alpha}$) になっていることがわかります。したがって (8.20) の根号内の正・負・ゼロの3条件で流れの様子は3通りになりますが、これらの議論は§5.3.2を参照ください。

z 平面の平板の周りの複素共役速度を求めてみます。複素共役速度は

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} = \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha} / \zeta^2) - i\Gamma / 2\pi\zeta}{1 - a^2 / \zeta^2} \quad (8.21)$$

となり、 $\zeta = a$ で平板の $z = 2a$ の後端に対応しますが、そこでは速度が ∞ (分母がゼロ) となります¹³。速度が ∞ というのは物理的に考えてオカシイということで、“平板の後端で速度が有限になる”という条件を課することにします。これはクッタ (Kutta) の条件とかジューコフスキーの仮定と呼ばれており、その中身は、循環を適当な値にとり速度を有限にするというものです¹⁴。具体的には $\zeta = a$ で (8.21) の分子をゼロとなるように循環 Γ を決めてやればよいわけです¹⁵。つまり

$$\left[U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \right]_{\zeta=a} = 0$$

$$\therefore \Gamma = -4\pi U a \sin \alpha \quad (8.22)$$

得られた循環を (8.21) に入れて有限の速度が得られるか確認すると

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{df}{dz} &= u - iv = \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2 e^{i\alpha} / \zeta^2) - i\Gamma / 2\pi\zeta}{1 - a^2 / \zeta^2} = U \lim_{\zeta \rightarrow a} \frac{(\zeta^2 - a^2) \cos \alpha - i(\zeta - a)^2 \sin \alpha}{\zeta^2 - a^2} \\ &= U \lim_{\zeta \rightarrow a} \left\{ \cos \alpha - i \frac{\zeta - a}{\zeta + a} \sin \alpha \right\} = U \cos \alpha \end{aligned}$$

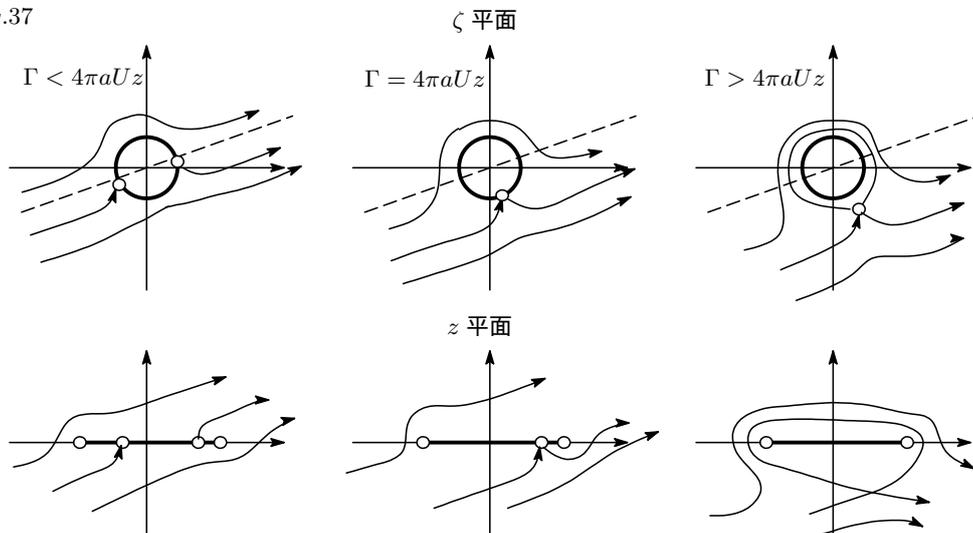
となって、平板の後端で確かに有限の速度が得られました。これは一様流れの x 軸方向の速度ですね。

クッタの条件の意味するところを調べるためによどみ点 (8.20) にクッタの条件 (8.22) を入れると

$$\begin{aligned} \zeta_s &= -\frac{e^{i\alpha}}{4\pi U} (i\Gamma \pm \sqrt{16\pi^2 a^2 U^2 - \Gamma^2}) = -\frac{e^{i\alpha}}{4\pi U} (-i4\pi U a \sin \alpha \pm 4\pi U a \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) \\ &= a e^{-i\alpha} (i \sin \alpha \mp \cos \alpha) = -a e^{-2i\alpha}, \quad a (\text{複合同順}) \end{aligned}$$

とが得られ、よどみ点の一つが $\zeta = a$ となり、平板では後端の $x = 2a$ になることがわかります。このことからクッタの条件を「後端でよどみ点となる」と表現されることもあります。流れの様子を Fig.37 に示します。

Fig.37



¹³ $\zeta = \pm a$ でそうなりますが、 $\zeta = -a$ (平板の前端) で速度 ∞ は実際の流れの状況に即さないということで無視します。もっと具体的な理由は流れの詳しい知識が必要でここで説明するのはしんどいので追求されるかたは今井功「流体力学 (前編)」P148を参照ください

¹⁴ これも数学的な便宜のように思われますが、しつはそうではなく流れの深い洞察にもとづいています。詳しくは前掲書の P146 参照。

¹⁵ 不定形の極限値を思いだしてください。

平板に働く揚力 流れが定常であるとして、平板が流れから受ける力を求めてみます。これはセクション 7 のクッタ・ジューコフスキーの定理により、平板には一様流に直角の方向に

$$L = \rho U(-\Gamma) = 4\pi\rho U^2 a \sin \alpha \quad (8.23)$$

の揚力が働くこととなります。

平板に働くモーメント x 軸と平行な一様流の場合、物体に働く力のモーメントは (7.9) のブラジウスの第 2 公式より

$$M_z = -\frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} + 2\pi\rho U \operatorname{Im}(c_{-2})$$

で求められ、積分経路は平板を取り囲む任意の閉曲線をとればよかったので、ここでは平板から十分に離れた遠方を囲むように閉曲線をとることにします。そうすると $a/|z|, a/|\zeta| \ll 1$ となります。いま一様流が x 軸に対して傾いているので、 $U \rightarrow Ue^{-i\alpha}$ と置きかえ、湧き出しはないので $Q = 0$ としてモーメントの式は次のようになります。

$$\begin{aligned} M_z &= -\frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} + 2\pi\rho U \operatorname{Im}(c_{-2}e^{-i\alpha}) \\ &= 2\pi\rho U \operatorname{Im}(c_{-2}e^{-i\alpha}) \end{aligned} \quad (8.24)$$

M_z はローラン展開の係数 c_{-2} がわかれば求まることとなります。そこで、ジューコフスキー変換より

$$\begin{aligned} z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad \longrightarrow \quad \zeta &= \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4a^2}) = \frac{1}{2}z \left\{ 1 + (1 - (2a/z)^2)^{1/2} \right\} \\ &\approx z - a^2/z \equiv z + O(1/z) \\ &= z [1 + O(1/z^2)] \end{aligned}$$

として、

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]^{-1} = \frac{1}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] = \frac{1}{z} + O(1/z^3)$$

を得ます。これを (8.21) に入れると

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2e^{i\alpha}/\zeta^2) - i\Gamma/2\pi\zeta}{1 - a^2/\zeta^2} = \frac{U(e^{-i\alpha} - a^2e^{i\alpha}(1/z + O(1/z^2))^2) - i\Gamma/2\pi(1/z + O(1/z^2))}{1 - a^2(\frac{1}{z} + O(1/z^3))^2} \\ &= Ue^{-i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} - 2iUa^2 \sin \alpha \frac{1}{z^2} + O(1/z^3) \\ &= Ue^{-i\alpha} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + O(1/z^3) \end{aligned}$$

より

$$c_{-2} = -i2Ua^2 \sin \alpha \quad (8.25)$$

と求まりました。これを (8.24) に入れると

$$\begin{aligned} M_z &= 2\pi\rho U \operatorname{Im}(c_{-2}e^{-i\alpha}) = -2\pi\rho U \operatorname{Im}(i2Ua^2e^{-i\alpha} \sin \alpha) = -4\pi\rho Ua^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= -La \cos \alpha \quad (L \text{ は揚力ですね！}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

と求まりました。揚力の作用線が平板を切る点を D とし、平板の中心 O と D との距離を d とすると、揚力 L による原点 O の周りの反時計方向のモーメントは $-Ld \cos \alpha$ で、これが (8.26) に等しいとおくと

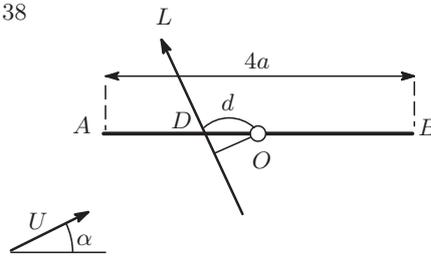
$$M_z = -La \cos \alpha = -Ld \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad d = a \quad (8.27)$$

となって、流体が平板におよぼす圧力の合力の作用点 D は、角 α に関係なく 平板の前端から板の全長の $1/4$ の距離にあることがわかります。

一般に翼の性能を表す指標として無次元係数で

$$\text{揚力係数 : } C_L = \frac{L}{(1/2)\rho U^2 \ell}, \quad \text{抵抗係数 : } C_D = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 \ell}, \quad \text{モーメント係数 : } C_M = \frac{M}{(1/2)\rho U^2 \ell} \quad (8.28)$$

Fig.38



があります。 ℓ は翼の前縁から後縁までの全長です。いまの板翼の性能をこの指標でみると $\ell = 4a$ として

$$C_L = 2\pi \sin \alpha, \quad C_D = 0, \quad C_{M(O)} = -\pi/2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (8.29)$$

となります。

(了)

お疲れ様でした。結構盛りだくさんな内容でまた計算も難しくはないけどゴタゴタと面倒でしたね。このあたりで第5話をお開きにすることにします。いろいろミスや考え違いをしているところがあるかもしれませんが、注意して読み進んでください。誤りを見つけれたら、一報いただくと嬉しいです。