

流体力学講話・つまみ食い(その6)

KENZOU

2008年8月17日

♣ 流体力学のお話も中盤を過ぎ6回目に入りました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など, 4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念がでてきました。また, 静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は, 任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジューコフスキー定理, それから等角写像とその活用などの話題。6回目はカルマン(Karman)の渦列など, 渦の周りの流れの話題に触れたいと思います。ちょっと余談ですが, この夏季休暇, 一泊2日の新聞社主催・徳島阿波踊り観光ツアーで鳴門の渦潮をみてきました。そういえば, 数学者の岡潔が多変数解析関数論で行き詰まりを感じたとき, 鳴門の渦潮が急にみたくって船で見に行っただということが「日本の心」に書かれていましたが, 私らは鳴門大橋の上からのぞき窓(?)を通して見学することができました。結構浅瀬で渦が巻いているなぁという印象でしたが, やはり自然が生み出す渦潮はなかなかすごいですね。この鳴門の渦潮もカルマン渦ということらしいです。え~っと, 余談はこれくらいにして, 第6話をはじめることとします。

目次

9 渦運動から循環まで(復習)	2
9.1 渦運動	2
9.2 循環	2
9.3 渦の周りの流れ	3
9.3.1 渦糸の複素速度ポテンシャル	3
9.3.2 ビオ・サバールの法則	3
10 渦列	4
10.1 渦の層と渦列	4
10.1.1 渦列	5
10.2 渦を動かす流れ	6
10.3 カルマンの渦列	9
10.3.1 対称型渦列と非対称型渦列	10
10.3.2 渦列の安定性	11
10.3.3 ストローハル数	11

=====

9 渦運動から循環まで（復習）

第2話から第4話まででできた渦に関する話題（渦運動から循環まで）を復習しておきます。

9.1 渦運動

流体が変形せずに軸の周りに回転運動する場合、これを渦運動といいます。流速 $v(u, v, w)$ の回転 rot をとったものを渦度ベクトル $\omega(\xi, \eta, \zeta)$ といい、 ω は次のように表されます（以下、渦度ベクトルを渦度とします）。

$$\omega = \text{rot} v = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (9.1)$$

2次元運動の場合、渦度は

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9.2)$$

となります。また、渦度と回転角速度ベクトル $\Omega(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ との関係は

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega \quad (9.3)$$

で、渦度は回転角速度の2倍に等しいということになります。2次元運動の場合は

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\zeta \quad (9.4)$$

となります。渦度は(9.1)のように微分演算で求められるので、局所的な物理量であることに留意してください。ゼロでない渦度を持つ流体の微小部分は「自転」していますが、一方、流体が公転していてもその部分に渦度があるとは限りません。

$\omega = 0$ の運動を渦なし運動といいます。この場合は $\text{rot} v = 0$ ですので速度ポテンシャル ϕ が存在し、流速 v は次式で与えられます。

$$v = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (9.5)$$

逆にいえば、渦運動であれば速度ポテンシャルが存在しないことになります¹。

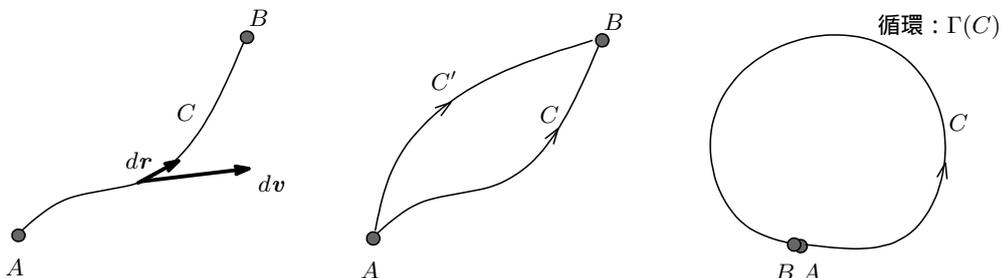
一般に渦運動をおこなう流体が柱上の管を形成するとき、これを渦管と呼び、非常に細い渦管を渦糸といいます。渦糸のたくさん並んだ面を渦面といいます。

9.2 循環

流体中の任意の2点を A, B として、 A, B を結ぶ1つの曲線 C をとり C に沿っての線積分を考えます。これを曲線 C に沿っての流速積分と呼びます。 ϕ は速度ポテンシャルです。

$$\int_A^B v \cdot dr = \int_A^C (u dx + v dy + w dz) = \int_A^B \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \right) \quad (9.6)$$

Fig.39



¹ 誤解を招きそうなので注釈しておきますと、流体の微小部分が自転している渦管の内側では速度ポテンシャルは存在しませんが、渦管の外側では渦管の内側の影響で円運動をします。ただし、自転の回転運動はしないので、外側はポテンシャル流れをなします。

そして、 C の両端 A, B が一致して閉曲線 C をつくる場合、閉曲線 C に沿っての線積分

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C v_s ds = \oint_C (u dx + v dy + w dz) \quad (9.7)$$

を循環といい $\Gamma(C)$ で表します。この循環をつかって渦度の表すことができます。ストークスの定理²で面積積分に置き換えます。そうすると

$$\Gamma(C) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{v})_n dS \quad (9.8)$$

となつて、ここに (9.1) の関係式を入れると

$$\Gamma(C) = \iint_S \omega_n dS = \iint_S \omega dS \quad (9.9)$$

となり渦度を循環で表すことができます。(9.9) より循環は閉曲線 C の内部を通過する渦度の大きさの総和ということになります。したがって、渦の強さを表すにはそれを取り巻く閉曲線に沿っての循環で表すことができます。また、循環は渦を取り巻く閉曲線の大きさによって変わらず、渦固有の不変量という特長をもっています。渦なし流れでは $\omega = 0$ ですから、閉曲線 C についての循環 $\Gamma(C)$ はゼロとなります。

9.3 渦の周りの流れ

9.3.1 渦糸の複素速度ポテンシャル

渦を含む流体中で、循環 Γ を持つ渦の周りの 2 次元流れを考えます。渦の周りの流体は渦の影響で渦の原点を中心とした円運動（自転運動ではなく公転運動！）をします。原点より半径 r における周速度を v_θ とすると、この円周上の循環は渦の循環 Γ に等しいので

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi r v_\theta \\ \therefore v_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \quad (9.10)$$

となります。 v_θ と速度ポテンシャル ϕ 、流れの関数 ψ の関係は

$$v_\theta = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (9.11)$$

ですから (9.10) と (9.11) より

$$\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (9.12)$$

これを積分して

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C_0, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log r + C_1 \quad (C_0, C_1: \text{積分定数}) \quad (9.13)$$

を得ます。したがって、渦の周りの複素速度ポテンシャル $f(z)$ は、定数項は無視して

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log r = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\log r + i\theta) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \log r e^{i\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \end{aligned} \quad (9.14)$$

で表されます。これは第 4 話の § 5.2.8 で（天下りの的に）登場した渦糸の複素速度ポテンシャルですね。

9.3.2 ビオ・サバールの法則

一本の渦管の微小部分 (ds) の含まれる渦（循環）によって点 P に誘起される流速 dv_θ は

$$dv_\theta = \frac{\Gamma \sin \theta}{4\pi r^2} ds \quad (9.15)$$

Fig.46

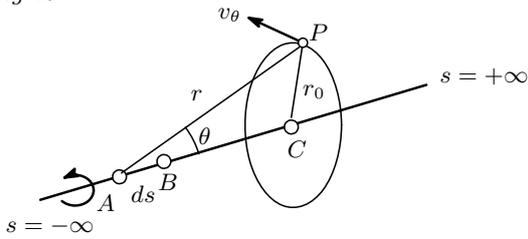
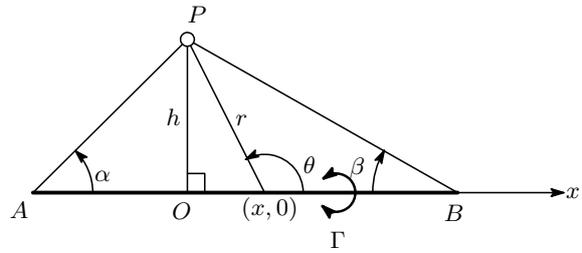


Fig.47



で与られます。これをビオ・サバル (Biot-Savart) の法則³といいます。尚 v_θ は、 C を中心とする半径 r_0 の円周方向の速度です。(9.15) の証明は、今井功「流体力学 (前編)」P173 を参照ください。ここでは問題を解いてビオ・サバルの法則を使いこなすことにします。

例題 27 : 循環 Γ に無限長の直線渦がある。この直線渦により誘起される距離 r_0 における流体の速度を求めよ (Fig.46)。

答 : Fig.46 より $r_0 = r \sin \theta$, $s = r_0 \cot \theta$, $ds = -r_0 d\theta / \sin^2 \theta$ であるので (9.15) より

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} ds = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

これは (9.11) と同じである。

例題 28 : Fig.47 に示す直線状の渦系の部分 AB によって点 P に誘起される流速を求めよ。

答 : 求める流速を v とすると $x = h \tan(\theta - \pi/2) = -h \cot \theta$, $dx = h \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta$, $r = h \sec(\theta - \pi/2) = -h \operatorname{cosec} \theta$ であるから

$$v = \int dv = \int \frac{\Gamma \sin \theta}{4\pi r^2} dx = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

を得る。特に無限に長い渦系の場合は $\alpha = \beta = 0$ とすると $v = \Gamma/2\pi h$ となって、これは例題 27 で得られた結果と一致する。

10 渦列

10.1 渦の層と渦列

速度の異なる 2 つの流れが合流したところや、流れと静止流体の境には 渦の層 ができます。これは不安定でやがて破壊されて渦の並んだ渦列ができます。いま、Fig.40 に示すような、長さ ds 、幅中に dh で囲まれた長方形の周辺に沿う循環速度の $d\Gamma$ を考えると

$$d\Gamma = u_2 ds - u_1 ds = (u_2 - u_1) ds \quad (10.1)$$

となります。これから不連続面の単位長さについての循環を γ とすると

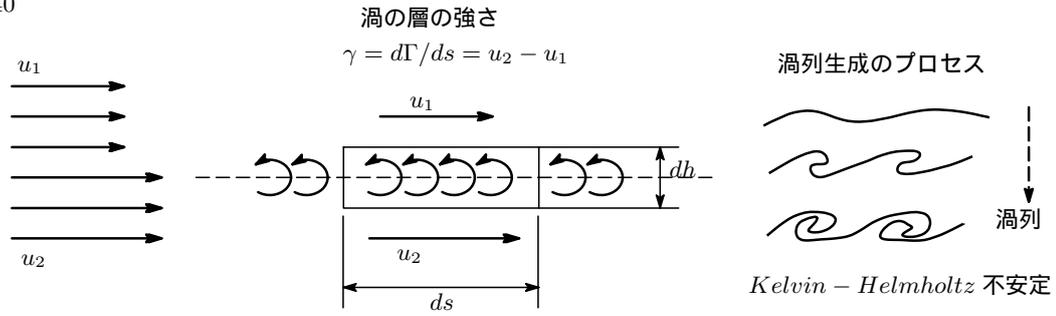
$$\gamma = d\Gamma/ds = u_2 - u_1 \quad (10.2)$$

この γ を渦の層の強さ (density of vortex sheet) といいます。

² $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$

³ 電流によって誘起される磁場を表す、電磁気学でお馴染みのビオ・サバルの法則が成り立つというのは面白いですね！

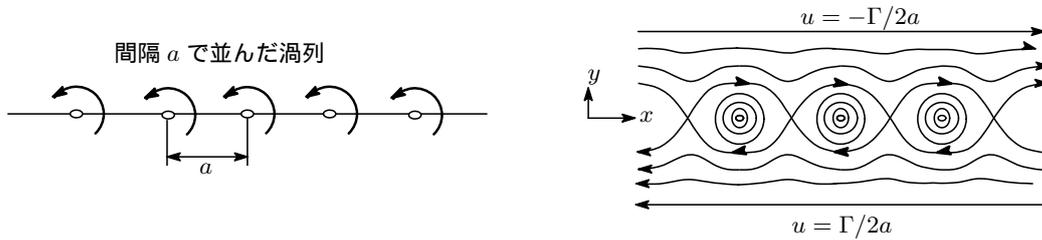
Fig.40



10.1.1 渦列

渦の強さ Γ が等しく、同じ回転方向を持つ無数の渦が間隔 a を保って一列に並んでいる場合を考えます (Fig.41)。このような渦の列を渦列 (Vortex row) といいます。渦列の複素速度ポテンシャルはどのように表されるでしょうか。これは各渦の複素速度ポテンシャルの重ね合わせとなります。

Fig.41



渦の数が $2n + 1$ 個あるとして中央の渦に原点を取るとそれらの渦の複素速度ポテンシャルを重ね合わせると

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} [\log z + \log(z - a) + \log(z - 2a) + \dots + \log(z - na) \\
 &\quad + \log(z + a) + \log(z + 2a) + \dots + \log(z + na)] \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z(z^2 - a^2) \dots (z^2 - n^2 a^2) \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \times \frac{a}{\pi} \times a^2 \times \dots \times n^2 a^2 \right\} \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right\} + \text{const}
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

となります。定数項は複素速度ポテンシャルに効きませんからそれを無視すると

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right\} \tag{10.4}$$

となります。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると⁴

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \right\} \tag{10.5}$$

一方、公式

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \dots \longrightarrow \sin \frac{\pi z}{a} = \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \dots \tag{10.6}$$

より求める複素速度ポテンシャル (10.5) は

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi z}{a} \tag{10.7}$$

⁴ うまい具合にこの級数は収束してくれます。

と得られました。渦の周りの共役複素速度は、したがって

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z} = \frac{\Gamma}{2ai} \cot \frac{\pi z}{a} = \frac{\Gamma}{2ai} \cot \left(\frac{\pi x}{a} + i \frac{\pi y}{a} \right) \quad (10.8)$$

となります。この式の右辺にオイラーの公式を使って変形した⁵

$$\cot(\alpha + i\beta) = \frac{\cos(\alpha + i\beta) \sin(\alpha - i\beta)}{\sin(\alpha + i\beta) \sin(\alpha - i\beta)} = \frac{\sin(2\alpha) - \sin(i2\beta)}{\cos(i2\beta) - \cos(2\alpha)} = -i \frac{\sinh(2\beta) + i \sin(2\alpha)}{\cosh(2\beta) - \cos(2\alpha)} \quad (10.9)$$

を適用すると

$$\frac{df}{dz} = -\frac{\Gamma}{2a} \left\{ \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)} + i \frac{\sin(2\pi y/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)} \right\}$$

$$\therefore u = -\frac{\Gamma}{2a} \frac{\sinh(2\pi y/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)} \quad (10.10)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sin(2\pi x/a)}{\cosh(2\pi y/a) - \cos(2\pi x/a)} \quad (10.11)$$

となって、流速の速度成分が求まりました。渦の影響を受けない $y = \pm\infty$ での流れの速さを求めると

$$u_{y \rightarrow +\infty} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma}{2a} \frac{e^{ky} - e^{-ky}}{e^{ky} + e^{-ky} - 2 \cos kx} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma}{2a} \frac{1 - e^{-2ky}}{1 + e^{-2ky} - 2e^{-ky} \cos kx} = -\frac{\Gamma}{2a}, \quad (k = 2\pi/a)$$

$$u_{y \rightarrow -\infty} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma}{2a} \frac{e^{ky} - e^{-ky}}{e^{ky} + e^{-ky} - 2 \cos kx} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma}{2a} \frac{e^{2ky} - 1}{e^{2ky} + 1 - 2e^{ky} \cos kx} = \frac{\Gamma}{2a}$$

$$v_{y \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \therefore y = \pm\infty \text{ における速度: } u = \mp \frac{\Gamma}{2a}, \quad v = 0$$

となり、 y 軸方向のはるか上方、下方では流れの向きが正反対の x 方向の様な流れとなっていることがわかります。

この一列の渦列は静止状態を保っていますがその釣り合いの状態は不安定で崩れやすいという性質をもっています。このことについては次のセクションで考えることにします。

渦の間隔 a を限りなく小さくしていくと、渦列は渦面 (Vortex Sheet) となります、渦の上側で $-\Gamma/2a$ 、下側で $\Gamma/2a$ の速度をもちますから渦面では速度は不連続となります。2つの流れが合流するときができる速度の不連続面は渦面と考えることができます。この不連続面は不安定で時とともに崩れ、波状となり、ついに渦列となっていくことは渦の層のところで述べました。

10.2 渦を動かす流れ

静止流体中に渦が1個だけある場合は渦は動きません。この他に渦や流れがある場合、これら第3者によってはじめて動かされます。いま、複素速度ポテンシャル f_1, f_2, f_3 なる渦と f_4, f_5 なる流れよりなるところの複素速度ポテンシャルはこれらの重ね合わせ

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 \quad (10.12)$$

で表されます。 f_1 なる渦を動かす複素速度ポテンシャルは (10.12) の右辺から f_1 を除いたもので表されます。

$$f_{(1)} = f_2 + f_3 + f_4 + f_5 \quad (10.13)$$

複素共役速度は

$$u_1 - iv_1 = \left[\frac{df_{(1)}}{dz} \right]_{z=z_1} \quad (10.14)$$

ただし z_1 は f_1 の渦の座標です。極座標形式では

$$v_{r1} - iv_{\theta1} = \left[e^{i\theta} \frac{df_{(1)}}{dz} \right]_{z=z_1} \quad (10.15)$$

⁵ オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ を使う。これから $e^{-\theta} = \cos(i\theta) + i \sin(i\theta)$, $e^{\theta} = \cos(i\theta) - i \sin(i\theta)$
 $\cosh\theta = (e^{\theta} + e^{-\theta})/2$, $\sinh\theta = (e^{\theta} - e^{-\theta})/2$

となります。

さて (10.7) の複素ポテンシャルで表される一列に並んだ渦は静止の状態にあることをみてみます。原点 $z = 0$ にある渦を考え、その渦を動かす複素速度ポテンシャルは、系の複素速度ポテンシャル (10.7) から原点の渦の複素速度ポテンシャルを差し引いたものとなります。したがって、原点での共役複素速度 $f(z)_0 = u_0 - iv_0$ はそれを z で微分したものですから

$$\begin{aligned} u_0 - iv_0 &= \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi z}{a} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \right) \right]_{z=0} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z} \right]_{z=0} \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \left(\frac{a}{\pi z} - \frac{1}{3} \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{3^2 \times 5} \left(\frac{\pi z}{a} \right)^3 - \dots \right) - \frac{1}{z} \right]_{z=0} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

となって、原点にある渦は静止の状態にあるということになります。原点以外のいずれの渦もいまの場合と同様に取り扱えますので (原点の取り方は任意)、すべての渦は静止の状態にあることとなります。

しかし、この渦は不安定⁶で、原点 ($z = 0$) にある渦にわずかな変位 ($z = x + iy$) を与えると、変位を受けた渦は時間とともに平衡位置からはなれていくこととなります。この状況を見てみます。原点の渦をのぞくほかの渦列による共役複素速度は (10.16) で与えられるので、 z は十分小さいとして

$$\begin{aligned} u - iv &= \frac{df}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z} \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \left(\frac{a}{\pi z} - \frac{1}{3} \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{3^2 \times 5} \left(\frac{\pi z}{a} \right)^3 - \dots \right) - \frac{1}{z} \right] \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$\approx -\frac{\pi\Gamma}{6a^2i}z \quad (10.19)$$

$\pi\Gamma/6a^2 = k$ とおくと、上式は

$$\begin{aligned} u - iv &= ikz = ik(x + iy) = -ky + ikx \\ \therefore dx/dt - idy/dt &= -ky + ikx \rightarrow dx/dt = -ky, dy/dt = -kx, d^2x/dt^2 - k^2x = 0 \\ \therefore \text{一般解は } x &= Ae^{kt} + Be^{-kt} \end{aligned} \quad (10.20)$$

となり、時間の経過とともに x は増大します。 y についても同様。つまり、変位を受けた渦は時間の経過とともに平衡位置から離れていくこととなります。

例題 24: 2次元流れの位置 z_1 と z_2 にそれぞれ強さ Γ_1 Γ_2 で同一方向回転の2つの渦がある。この場合、次の等式が成立することを証明せよ。ただし、 $\bar{z} = x - iy$, $d\bar{z}/dt = dx/dt - idy/dt = u - iv$ とする。

$$(1) \frac{d\bar{z}_1}{dt} - \frac{d\bar{z}_2}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{z_1 - z_2}$$

$$(2) \Gamma_1 \frac{d\bar{z}_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{d\bar{z}_2}{dt} = 0$$

(3) $\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2$ は時間に無関係に一定

答: 強さ Γ_1 Γ_2 の渦の複素ポテンシャルをそれぞれ $f_1(z)$, $f_2(z)$ とすると

$$f_1(z) = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \log(z - z_1), \quad f_2(z) = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \log(z - z_2) \quad (10.21)$$

渦 Γ_1 , Γ_2 を動かす複素ポテンシャルそれぞれ $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ とすると

$$f_{(1)} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \log(z - z_2), \quad f_{(2)} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \log(z - z_1) \quad (10.22)$$

⁶ ケルビン・ヘルムホルツ不安定と呼ばれる不安定性を持っています。Kelvin-Helmholtz 不安定: 密度の異なる2種類の流体が異なる速度で運動しているとき、2種類の流体の接触面で不安定が生じる。この不安定生をケルビン・ヘルムホルツ不安定という。

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{z}_1}{dt} &= u_1 - iv_1 = \left. \frac{df_1}{dz} \right|_{z=z_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \left. \frac{1}{z-z_2} \right|_{z=z_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1-z_2} \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= u_2 - iv_2 = \left. \frac{df_2}{dz} \right|_{z=z_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \left. \frac{1}{z-z_1} \right|_{z=z_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2-z_1} \\ \therefore \frac{d\bar{z}_1}{dt} - \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{z_1 - z_2}\end{aligned}\tag{10.23}$$

また, $\Gamma_1 \frac{d\bar{z}_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{d\bar{z}_2}{dt} = 0$ となる。これを積分すると $\Gamma_1 \bar{z}_1 + \Gamma_2 \bar{z}_2 = \text{const}$ 。したがって

$$\text{この 共役も一定となり } \Gamma_1 \frac{dz_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{dz_2}{dt} = 0$$

[註] N 個の渦が存在する場合, 渦群の運動方程式は次の $2N$ 個の連立方程式で与えられます。

$$\frac{d\bar{z}_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{1}{z_m - z_i}, \quad \frac{dz_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{1}{\bar{z}_m - \bar{z}_i} \quad (m = 1, 2, \dots, N)\tag{10.24}$$

(ただし, \sum の肩のダッシュは $i = m$ を除くことを意味する。) また,

$$\sum_{m=1}^N \Gamma_m z_m = \text{const}\tag{10.25}$$

が成り立ち, いま, $\sum_m \Gamma_m \neq 0$ を仮定して⁷

$$z_0 = \frac{\sum \Gamma_m z_m}{\sum \Gamma_m}\tag{10.26}$$

によって渦群の重心 $z_0 = x_0 + iy_0$ を定義すると

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \text{const}\tag{10.27}$$

となって, 渦群の重心は不動 であることがわかります。

例題 25: 上の例題の渦で, z_1 と z_2 は距離 ℓ とする。 Γ_1 Γ_2 の渦は $z_0 = (\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2) / (\Gamma_1 + \Gamma_2) = \text{const}$ なる一定の点を中心として距離 ℓ を一定に保ち一定の角速度 $d\theta/dt = (\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2) / 2\pi \ell^2$ で回転することを証明せよ。

答: z_0 はこの渦群の重心である。(10.23) より

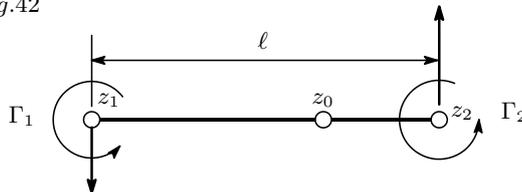
$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} - \frac{d\bar{z}_2}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{z_1 - z_2}\tag{10.28}$$

$z_1 - z_2 = \ell e^{i\theta} \rightarrow \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \ell e^{-i\theta}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{z}_1}{dt} - \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= \frac{d}{dt}(\ell e^{-i\theta}) = \frac{d\ell}{dt} e^{-i\theta} - i\ell e^{-i\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\ell e^{i\theta}} = -i \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\ell} e^{-i\theta} \\ \therefore \frac{d\ell}{dt} e^{-i\theta} &= 0, \quad \ell e^{-i\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\ell} e^{-i\theta}\end{aligned}\tag{10.29}$$

これから, $\ell (= |z_1 - z_2|) = \text{const}$, $d\theta/dt = (\Gamma_1 + \Gamma_2) / 2\pi \ell^2 = \text{const}$. これは渦群の重心まわりの角運動量は時間的に変化しない, つまり角運動量保存則を表している。

Fig.42



⁷ $\sum \Gamma_m = 0$ の場合は重心が定義できない。この場合は渦群を 2 軍にわけ, 各群に対する重心を定義する。そうすると 2 群の重心の相対位置は不変となる。

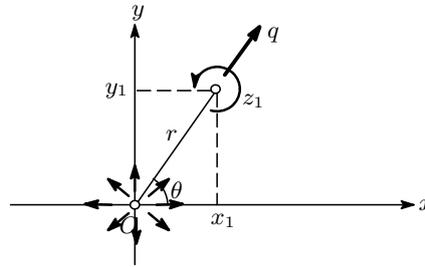
例題 26：2次元流れの原点に強さ Q の湧き出しがあり，位置 z_1 に循環 Γ の渦がある。渦はどんな速度で動かされるか。

答：この系の複素速度ポテンシャルは湧き出しの複素速度ポテンシャルと渦の複素速度ポテンシャルの和であるから

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log(z - z_1)$$

したがって，渦の運動を誘導する複素速度ポテンシャルを $f_{(1)}(z)$ とすると

$$f_{(1)}(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z$$



この共役複素速度は

$$u_1 - iv_1 = \left[\frac{df_{(1)}}{dz} \right]_{z=z_1} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z_1} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x_1 - iy_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\therefore u_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, v_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

$x_1 = r \cos \theta_1, y_1 = r \sin \theta_1$ とおくと

$$u_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, v_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$

速度の大きさ q ，方向を α とすると

$$q = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad \tan \alpha = \frac{u_1}{v_1} = \tan \theta$$

となつて，速度は大きさ $Q/2\pi r$ で方向は原点と渦を結ぶ方向にあることがわかる。

10.3 カルマンの渦列

一様な流れの中に円柱のような柱状の物体を流れに直角におくと，物体の背後に規則的な2列の渦がつけられる。しかも一方の列の渦は全部同じ向きに回転し，他方の列は全部反対に回転している。この渦列をカルマンの渦列 (Karman vortex street) といいます⁸。

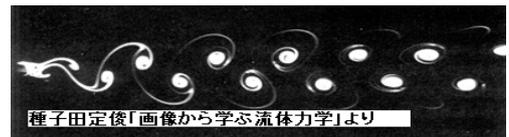
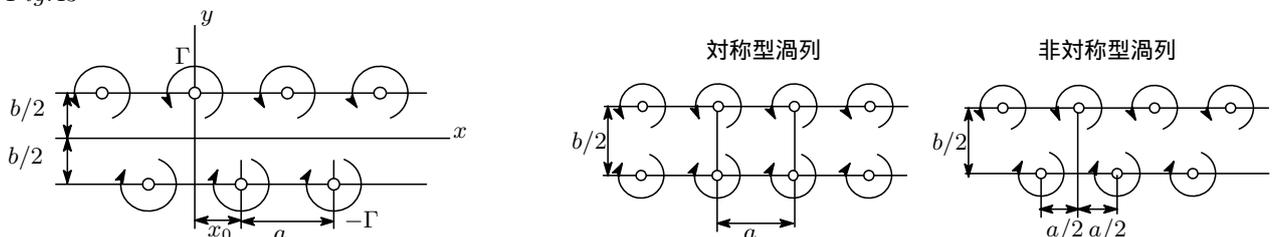


Fig.43



⁸ セオドア・フォン・カルマン (Theodore von Karman) 1881.5.11-1963.5.6 ハンガリーの物理学者。

Fig.43 の渦列の複素速度ポテンシャルは (10.7) より

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - x_0 + \frac{ib}{2} \right) \quad (10.30)$$

この 2 列の渦列の場合には，渦列全体がその形を保ちながら一定の方向に動いていきます。この渦列の運動を調べるには上下それぞれの列に属する渦列の代表的なもの一つとって考えればいいのですから，Fig.43 の下の渦列で， $z = x_0 - i(b/2)$ にある渦を動かす共役複素速度を考えます。これは (10.30) より $z = x_0 - i(b/2)$ にある渦の複素ポテンシャルを差し引いて z で微分したもだから (10.8) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \left[\frac{df_{(1)}}{dz} \right]_{z=x_0-i(b/2)} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2} \right) - \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - x_0 + \frac{ib}{2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2} \right) \right\} \right]_{z=x_0-i(b/2)} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi}{a} \left(z - i\frac{b}{2} \right) - \left\{ \frac{\pi}{a} \cot \left(z - x_0 + i\frac{b}{2} \right) - \frac{1}{z - x_0 + i(b/2)} \right\} \right]_{z=x-i(b/2)} \end{aligned} \quad (10.31)$$

となります。ここで $\cot(\pi z/a)$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \cot \frac{\pi z}{a} &= \frac{a}{\pi z} - \frac{\pi z}{3a} - \frac{(\pi z)^3}{45a^3} - \dots \\ \therefore \left[\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi z}{a} - \frac{1}{z} \right]_{z=0} &= - \left[\frac{z}{3} + \frac{\pi^2}{45a^2} z^3 + \dots \right]_{z=0} = 0 \end{aligned}$$

となるので (10.31) の右辺第 2 項は

$$\left[\frac{\pi}{a} \cot \left(z - x_0 + i\frac{b}{2} \right) - \frac{1}{z - x_0 + i(b/2)} \right]_{z=x-i(b/2)} = 0 \quad (10.32)$$

となり，結局

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{\pi}{a} \cot \frac{\pi}{a} \left(z - i\frac{b}{2} \right) \right]_{z=x-i(b/2)} \\ &= \frac{\Gamma}{2ai} \cot \left(\frac{\pi x_0}{a} - i\frac{\pi b}{a} \right) \end{aligned} \quad (10.33)$$

となります。右辺 \cot の展開は (10.9) でやったのでその結果を活用すると

$$\begin{aligned} u - iv (= u_1 - iv_1) &= \frac{\Gamma}{2a} \left\{ \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\cosh(2\pi b/a) - \cos(2\pi x_0/a)} - i \frac{\sin(2\pi x_0/a)}{\cosh(2\pi b/a) - \cos(2\pi x_0/a)} \right\} \\ \therefore u &= \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\cosh(2\pi b/a) - \cos(2\pi x_0/a)} \end{aligned} \quad (10.34)$$

$$v = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sin(2\pi x_0/a)}{\cosh(2\pi b/a) - \cos(2\pi x_0/a)} \quad (10.35)$$

を得ます。これは $z = x_0 - i(b/2)$ にある渦の持つ速度ですが，下の渦列のどの渦についても同じことが言えるので，結局下の列の渦すべてが同じ速度で動くこととなります。全く同様にして，上の列の渦すべても上式と同じ速度で動くから渦列全体が同じ速度で一般に斜め向きに動くこととなります。

10.3.1 対称型渦列と非対称型渦列

単独の渦列の場合， $y \rightarrow \pm\infty$ で互いに逆向きの一様流 ($u = \mp\Gamma/2a$) が誘導されたが，いまの 2 列の渦の場合には，その効果がちょうど打ち消しあって $y \rightarrow \pm\infty$ に誘導される速度はゼロとなります。2 列の渦列は静止流体中を速度 $U = (u^2 + v^2)^{1/2}$ で動きます。渦列がその列の方向に動くのは $v = 0$ より

$$\sin(2\pi x_0/a) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_0 = a \text{ or } x_0 = a/2 \quad (10.36)$$

の場合で、 $x_0 = a$ の場合は上下の渦列が対称的に並んでいる場合に相当し、これを対称型渦列といいます。この場合、渦列の動く速度 u は

$$u = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\cosh(2\pi b/a) - 1} = \frac{\Gamma}{2a} \frac{2 \sinh(\pi b/a) \cosh(\pi b/a)}{2 \sinh^2(\pi b/a)} = \frac{\Gamma}{2a} \coth \frac{\pi b}{a} \quad (10.37)$$

となります。

$x = a/2$ の場合は、渦列がちょうど半周期だけ食い違って互い違いに並んでいる場合で、これを非対称型渦列といいます。この場合、速度 u は

$$u = \frac{\Gamma}{2a} \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\cosh(2\pi b/a) + 1} = \frac{\Gamma}{2a} \frac{2 \sinh(\pi b/a) \cosh(\pi b/a)}{2 \cosh^2(\pi b/a)} = \frac{\Gamma}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a} \quad (10.38)$$

となります。

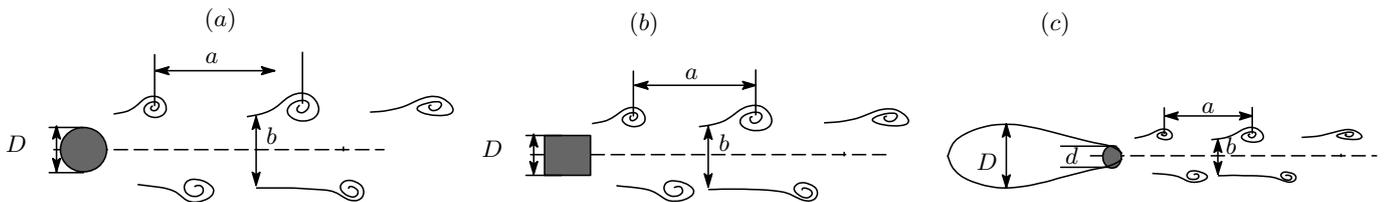
10.3.2 渦列の安定性

上で調べたように、強さが等しく符号が反対の2列の渦列は静止流体中を形を崩さずに動き回ることを知りました。しかし、規則的な渦列の配置が何らかの原因で乱されたとき、もとの規則的な配置に引き戻されるような場合は、その渦列は安定であるといいます。逆に、乱れが成長して配置が崩れてしまう場合には、渦列は不安定であるといいます。この双方の間、すなわち完全には元の戻らないが、大幅に崩れ去ることもなく、原形に近い配置にとどまるような場合、中立の安定であるといいます。安定性の詳細な議論の結果によれば、対称型渦列は不安定であることが確かめられています。非対称渦列では理論上渦間の間隔 b と a との比が

$$b/a = 0.28 \quad (10.39)$$

となる条件を満足する場合、安定となることが知られています⁹。実際、流体中の物体の後部にはカルマン渦列がよく見られますが、物体が Fig.44 のような対称的でかつ後部が尖っていないものによく生じます。

Fig.44



渦間の間隔 b と a との比は物体の形によりいくらか異なりますが、円柱の場合は $b/a = 0.282$ となり、理論とよく一致します。渦列の幅 b と物体の幅 D も物体の形により異なりますが、Fig.44 (a), (b) の場合は、 b は D よりやや大きく、(c) のような流線形の場合は、逆に小さく、 b は大体後部の厚みに等しくなります。

10.3.3 ストローハル数

流速 U の平行流中に幅 D の物体が固定されており、その後方に速度 u ($u \ll U$) で渦の間隔 a のカルマン渦列ができていますとします。単位時間に発生する渦の組数を f (渦の発生周期) とすると、渦列は速度 u で平行流の後を追いますから、流れと渦列の相対速度は $U - u$ となります。 $U - u$ は $a \times f$ に相当するので

$$U - u = a \times f \quad \therefore f = (U - u)/a$$

$$f = \frac{U - u}{a} = \frac{1 - (u/U)}{(a/b)(b/D)} \frac{U}{D} \quad (10.40)$$

⁹ 1911年、カルマンは渦の主流方向の間隔と直角方向の間隔との比がある特定な値を持つときに限り、この渦列が安定であることを理論的に示した。

円柱の場合を例にとり,

$$b/a = 0.282, \quad b/D = 1, 2, \quad u/U = 0.14$$

として(10.40)を U, D で表すと

$$f = 0.202U/D \quad (\text{円柱}) \quad (10.41)$$

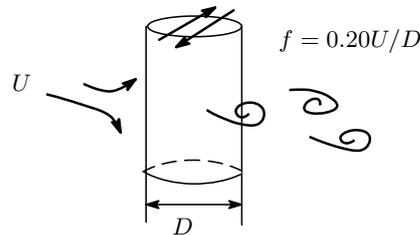
となります。円柱以外に平板や翼の場合は

$$f = 0.16U/D \quad (\text{平板}) \quad (10.42)$$

$$f = 0.15U/D \quad (\text{翼}) \quad (10.43)$$

ここででてきた定数, すなわち fD/U はストローハル数 (Strouhal number) と呼ばれる無次元数¹⁰です。渦が単位時間に f 組できるということは, 物体の後部で速度分布が f 周期変わることになり, したがって圧力分布が f 周期変わることとなります (これが音の発生の原因ともなります)。また, このため, 物体は平行流と垂直方向に力を交互に受けて振動し (物体の左右で渦が交互に発生), 普通この力は小さいが, 振動数 f が物体の固有振動数に一致する場合は共振を生じ, 場合によっては物体を破壊したり, 大きな音を発生する結果となります。

Fig.45 カルマン渦で円柱が振動する



例題 26: 直径 2cm の円柱を静水中に 10m/sec の速度で走らせたところ, 進行方向に垂直に振動を生じた。この振動数を求めよ。

答: $f = 0.20U/D$ より $U = 1000\text{cm/sec}, D = 2\text{cm}$ を入れると $f = 100\text{cycle/sec}$

(了)

以上で第 6 回目を終わります。お疲れ様でした。第 7 回目以降はいよいよ粘性流体の話に入っていく予定です。お楽しみに～。

¹⁰ ストローハル数: $St = \frac{f \cdot L}{U}$. f : 周波数, U : 代表速度, L : 代表長さ。ストローハル数は物体の後方に生じる非定常な伴流を表す無次元数です。