

# 流体力学講話・つまみ食い(その7)

KENZOU

2008年8月24日

♣ 流体力学のお話も第7回目からはいよいよ粘性流体の話題に入ります。1回目は流体の種類、流れのふる舞い、相似則の話題、2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題、3回目は完全流体の運動方程式の活用、ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など、4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で、流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念がでてきました。また、静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は、任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジューコフスキー定理、それから等角写像とその活用などの話題。6回目はカルマン(Karman)の渦列など、渦の周りの流れの話題に触れました。第7回目は非圧縮性粘性流体の運動方程式、これは外力としてせん断応力等が登場してきますのでオイラーの運動方程式は適用できずいわゆるナビエ・ストークスの方程式となりますが、この方程式を簡単な系として2次元流体で導出し、3次元に拡張していきます。もっともこの方程式はいわゆる慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ により $\mathbf{v}$ について非線形となり厳密解を得るには極めて難しいという事情がありますが、ここでは容易に厳密解が得られる例題(ハーゲン・ポアゼイユ流れなど)をやることにします。それでは第7話をはじめることとします。

## 目次

11 粘性流体の力学	2
11.1 粘性	2
11.2 粘性流体の運動方程式	3
11.2.1 ナビエ・ストークスの方程式(その1) ニュートン流体の応力による変形	3
	4
11.2.2 ナビエ・ストークスの方程式(その2)	8
11.3 非圧縮性粘性流の例	10
11.3.1 ポアゼイユ流れ	10
11.3.2 クエット流れ	11
11.3.3 ハーゲン・ポアゼイユ流れ	11
ハーゲン・ポアゼイユ流れの流速分布	
	11
壁面せん断応力, 円管の受ける摩擦抗力について	
	13
圧力降下(圧力損出)について	
	14
11.4 2次元ナビエ・ストークス方程式の無次元化と相似則	15

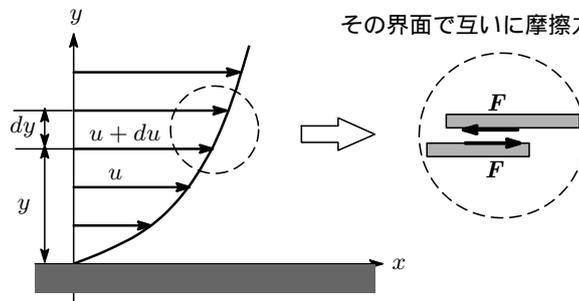
=====

# 11 粘性流体の力学

## 11.1 粘性

運動している流体で互いに接している層の間にズレが起これば接線応力（せん断力）が現れる<sup>1</sup>ような流体を粘性流体と呼びました（第1話 §1.3）。いま、 $x$  軸を壁面としてこれに平行に速度  $u$  で流れる流体を考えます。この流体の流速の分布は経験からして壁面に近づくにしたがって速度  $u$  は減少する分布となることが知られています（Fig.43）。

Fig.46



速度の異なる流体（流塊）がズレながら動いており、その界面で互いに摩擦力を及ぼしあう。

このような流体の運動を議論するのに次の2つの仮定を設けます。

### non-slip 条件

壁面に接しているところでは速度  $u$  はゼロで、滑りが無いこと。この辺の話は第 X 話での「境界層理論」のところで触れる予定です。

### ニュートンの仮定

壁面より  $y, y + dy$  の距離における速度をそれぞれ  $u, u + du$  とすると  $y + dy$  にある層が  $y$  にある層を  $x$  軸方向に引っ張る力  $F$  は、この2層の接触面積  $A$  と  $du$  に比例し、 $dy$  に逆比例する。式で表すと比例係数を  $\mu$  として

$$F \propto A \frac{du}{dy} \quad \longrightarrow \quad \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy} \quad (11.1)$$

これらの仮定はいろいろな実験結果より正しいことが認められています。この仮定に従う流体をニュートン流体と呼びました<sup>2</sup>。(11.1)の右辺  $F/A$  は、単位面積当たりの力でこれを  $\tau$  で表すと

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (11.2)$$

となり、 $\tau$  をせん断応力 (Shearing Stress)、比例係数  $\mu$  を粘性係数 (Coefficient of viscosity)<sup>3</sup>と呼んでいます。また、粘性係数  $\mu$  を密度  $\rho$  で割ったものを

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (11.3)$$

で表し、 $\nu$  を動粘性係数 (Kinematic viscosity)<sup>4</sup>と呼んでいます。粘性係数は流体の種類によって概略値が定まっており、一般に温度だけの関数とみなされます。一方、動粘性係数は液体の場合は温度だけの関数とみなされますが、気体の場合は密度  $\rho$  が圧力により変化することから温度と圧力の関数とされています。

<sup>1</sup> 接している固体同士を互いに接触面方向にずらすと摩擦力が働きこれを固体摩擦と呼んでいます、流体の場合は流体摩擦と呼ばれます。

<sup>2</sup> (11.1)に従わない流体は非ニュートン流体といわれます。

<sup>3</sup> 粘性係数  $\mu$  はストークス (アイルランドの数学者・物理学者: George Gabriel Stokes, 1819.8.13-1903.2.1) によってはじめて使われたとのことです。粘性係数の次元は  $ML^{-1}T^{-1}$  となります。

<sup>4</sup> 次元は  $L^2T^{-1}$

## 11.2 粘性流体の運動方程式

完全流体の運動方程式は第2話 §3.3.2 でオイラーの運動方程式として

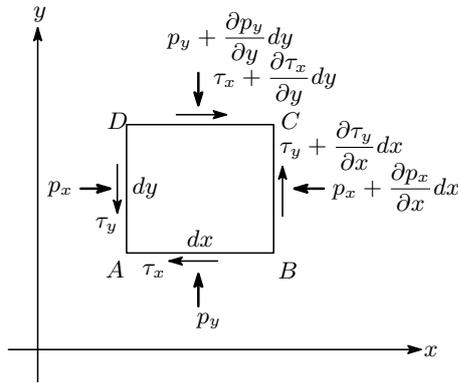
$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (11.4)$$

と表されました。ここで  $\mathbf{K}$  は流体に作用する外力、 $\rho$  は流体の密度、 $u, v, w$  は流速  $\mathbf{v}$  の  $x, y, z$  成分でした。この方程式はすべての非粘性流体に対して成り立つことを書きました。ところで、オイラーの運動方程式では外力  $\mathbf{K}$  としてせん断応力を考慮していないため、粘性流体ではこの方程式に代わる方程式が必要ということになります。この方程式がナビエ・ストークスの方程式 (Navier Stokes Eq)<sup>5</sup> と呼ばれる方程式です。そこで、ナビエ・ストークス方程式を導出してみましょう。簡単のために2次元非圧縮性の粘性流体を取り上げます。3次元方程式への拡張はこれをベースに拡張することとします。

### 11.2.1 ナビエ・ストークスの方程式 (その1)

2次元流れの中に  $dx, dy$  を2辺とする微小流体  $ABCD$  を考えます (厚みは1とします)。

Fig.47



単位質量あたりの流体に作用する外力 (重力や遠心力) の大きさを  $X, Y$  とします。いま、 $x$  軸方向についての運動方程式を考えます。まず、一つ目は  $ABCD$  に  $x$  軸方向に作用する外力ですが、これは

$$\rho dx dy X \quad (11.5)$$

で与えられます。次に2つ目の力として  $ABCD$  の外側の流体からの圧力があります。AD面に垂直に外の流体が働く圧力を  $p_x$  とすると、 $dx$  離れたBC面に、垂直に外から働く圧力は

$$p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \quad (11.6)$$

となるので、結局  $x$  軸の正の方向に働く力は

$$p_x dy - \left( p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dy = -\frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy \quad (11.7)$$

となります。3つ目の力として、流体の粘性による力 (でてきた ~ : 笑い) で、 $x$  軸方向に作用する力を考えると、ABに沿って外の流体が働くせん断応力を  $\tau_x$  とすると  $dy$  離れたCD面に作用する外から働くせん断応力は

$$\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy \quad (11.8)$$

となるので、結局  $x$  軸の正の方向に働く力は

$$\left( \tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy \right) dx - \tau_x dx = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dx dy \quad (11.9)$$

<sup>5</sup> クロード・ルイ・マリー・アンリ・ナビエ (フランスの数学者、物理学者: Claude Louis Marie Henri Navier, 1785.2.10-1836.8.21)。1822年ナビエは粘性流体の運動方程式に関する論文を発表し、1845年にストークスが一般式を導いたのでナビエ・ストークスの式と呼ばれる。

となります。ABCD に  $x$  軸の正の方向に働く全体の力は (11.5)(11.7)(11.9) の 3 つの力の総和ですから

$$\rho dx dy X - \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dx dy \quad (11.10)$$

となります。したがって、流体の  $x$  軸方向の加速度を  $du/dt$  とすると流体の運動方程式はニュートンの運動第 2 法則 (力=質量×加速度) より

$$\begin{aligned} \rho dx dy \frac{du}{dt} &= \rho dx dy X - \frac{\partial p_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dx dy \\ \therefore \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (11.11)$$

となります。この方程式の 3 次元への拡張は後で考えます。これで運動方程式は得られたわけですが、残念ながらこのままでは圧力  $p_x$  やせん断応力  $\tau_x$  はどんなものなのかわからないので、この方程式を解くことはできません。そこで  $p_x, \tau_x$  を流速 ( $u, v$ ) で表すことが次の仕事となります。そこでこの点を次に調べていくことにします。

### ニュートン流体の応力による変形

2 次元の粘性流体 (ニュートン流体) において、せん断応力や圧力はどのような形で表されるかをみていきます。流れの中に  $x, y$  座標をとり、それぞれの速度成分を  $u, v$  とすると、流体の変形は  $du, dv$  によって生じることになります。いま、 $du$  をとりあげると  $u$  は  $x$  の位置と  $y$  の位置の関数ですから

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (11.12)$$

と書けます。第 2 話の §3.7 でやったように、この式からズレ運動を引き出すために (11.12) を次のように変形してやります。

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dy \quad (11.13)$$

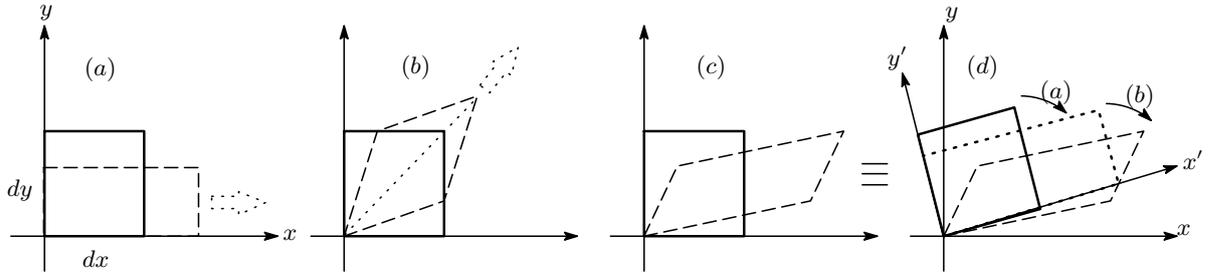
ここで  $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ ,  $\epsilon_y = \partial v / \partial y$ ,  $h = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y$ ,  $2\Omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$  とおくと、 $du, dv$  は

$$\begin{aligned} du &= \epsilon_x dx + \frac{1}{2} h dy - \Omega dy \\ dv &= \frac{1}{2} h dx + \epsilon_y dy + \Omega dx \end{aligned} \quad (11.14)$$

と書けます。 $\epsilon_x, \epsilon_y$  は一様な伸縮運動、 $h$  はひしゃげるような純粋なズレ運動、 $\Omega$  は回転運動を表しました。回転運動は流体の変形には直接関係しないのでスキップするとして、変形の復習しておくとして Fig.48 の図で

- (a)  $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ ,  $\epsilon_y = \partial v / \partial y$  で表される変形は、微小正方形が矩形になるいわゆる伸縮の変形を表します。尚、非圧縮性流体では変形前後で矩形の面積 (体積) は変わりません。
- (b)  $h = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y$  で表される変形は、微小正方形がひし形になるいわゆるせん断変形を表しますが、座標を対角線方向にとれば結局 (a) の伸縮変形と同じ になります。
- (c) は (a) と (b) が同時に起こる場合の変形で、点線のように変形します。ただし、(b) 変形は座標を対角線方向にとると結局 (a) の伸縮変形と同じ (座標軸の沿ってギュッと引っばる) なので、(c) のような変形も (d) に示すように座標軸  $x', y'$  を適当にとるとその座標上の微小正方形は点線のように矩形になる 伸縮だけの 変形となります。

Fig.48



以上のことから一般の変形は Fig.48(d) に示すように新しい座標  $(x', y')$  で記述すれば取り扱いが容易になる (伸縮変形だけが対象となる) ことがわかります。この座標系での速度を  $u', v'$  とすると (11.14) と同様な式が成立するので

$$\begin{aligned}\epsilon_{x'} &= \partial u' / \partial x', \quad \epsilon_{y'} = \partial v' / \partial y', \quad \tau' = \partial v' / \partial x' + \partial u' / \partial y', \quad 2\Omega' = \partial v' / \partial x' - \partial u' / \partial y' \\ du' &= \epsilon_{x'} dx' + \frac{1}{2} h' dy' - \Omega' dy' \\ dv' &= \frac{1}{2} h' dx' + \epsilon_{y'} dy' + \Omega' dx'\end{aligned}\quad (11.15)$$

となりますが, この座標系ではせん断の変形はないので

$$h' = \partial v' / \partial x' + \partial u' / \partial y' = 0 \quad (11.16)$$

となります。  $(x, y)$  と  $(x', y')$  座標系の間には

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta & \iff & \quad x' = y \sin \theta + x \cos \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta & \iff & \quad y' = y \cos \theta - x \sin \theta\end{aligned}\quad (11.17)$$

の関係があり, また  $u', v'$  と  $u, v$  の間にも

$$\begin{aligned}u &= u' \cos \theta - v' \sin \theta \\ v &= u' \sin \theta + v' \cos \theta\end{aligned}\quad (11.18)$$

の関係があります。これらの関係式を使って  $\epsilon_x, \epsilon_y, h$  を  $u', v'$  で表していきます。(11.16) を使うと

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \right) u = \left( \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \right) (u' \cos \theta - v' \sin \theta) \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin^2 \theta - \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (11.19)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \sin^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \cos^2 \theta \quad (11.20)$$

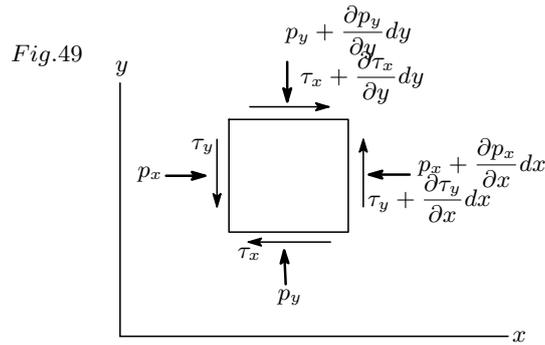
と表されます。次に  $h$  は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial u'}{\partial y'} \sin^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial x'} \cos^2 \theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial u'}{\partial y'} \cos^2 \theta - \frac{\partial v'}{\partial x'} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

となるので, この2式を足し (11.16) を使うと

$$\begin{aligned}h &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos \theta \sin \theta + \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\quad (11.21)$$

と表せます。ゴタゴタと計算ばかりが続いて退屈ですが、今しばらく我慢していただくとして次に応力について考えます。



$p_x, p_y$  を  $x, y$  軸方向の垂直応力（圧力）,  $\tau_x, \tau_y$  を  $x, y$  軸方向のせん断応力,  $p_1, p_2$  を  $x', y'$  軸方向の垂直応力とします。なお,  $x', y'$  軸に関しては  $h' = 0$  であるので軸に沿ってのせん断応力はありません。ということで  $\triangle ABC$  に作用する力 ( $p_y, p_1, p_2$ ) のバランスを考えると

$$-p_y ds + p_1 dy' \sin \theta + p_2 dx' \cos \theta = -p_y ds + (p_1 \sin^2 \theta + p_2 \cos^2 \theta) ds = 0$$

$$\therefore p_y = p_1 \sin^2 \theta + p_2 \cos^2 \theta \tag{11.22}$$

$$p_x ds - p_1 dy' \cos \theta - p_2 dx' \sin \theta = p_x ds - (p_1 \cos^2 \theta + p_2 \sin^2 \theta) ds = 0$$

$$\therefore p_x = p_1 \cos^2 \theta + p_2 \sin^2 \theta \tag{11.23}$$

これから

$$p_x + p_y = p_1 + p_2 = 2p \tag{11.24}$$

ここで  $p$  は平均の圧力で静圧です。次にせん断応力については

$$\tau_x ds + p_1 dy' \cos \theta - p_2 dx' \sin \theta = 0$$

$$\therefore \tau_x = -(p_1 - p_2) \cos \theta \sin \theta$$

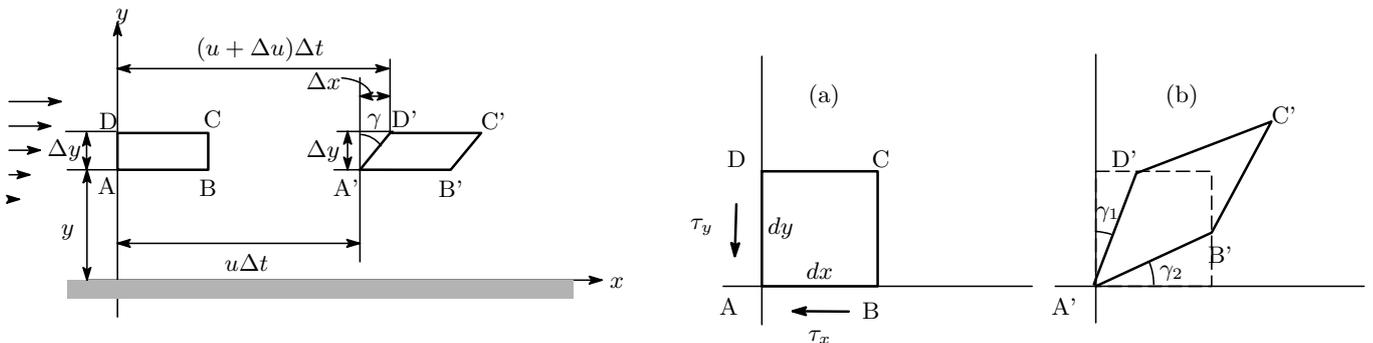
$$\tau_y ds + p_1 dy' \sin \theta - p_2 dx' \cos \theta = 0$$

$$\therefore \tau_y = -(p_1 - p_2) \cos \theta \sin \theta$$

$$\therefore \tau_x = \tau_y = -(p_1 - p_2) \cos \theta \sin \theta \tag{11.25}$$

となります。

Fig.50



次に、せん断応力とひずみ  $\gamma$  の関係ですが<sup>6</sup>, Fig.50 の  $x$  軸に沿う流れで  $x$  軸に平行なせん断応力だけが働く場合を考えます。時間  $t = 0, x = 0$  で微小な矩形体 ABCD が  $\Delta t$  後にせん断応力を受けひし形の  $A'B'C'D'$  に

<sup>6</sup> せん断ひずみ  $\gamma$  は  $\gamma = \Delta x / \Delta y = \tan \phi \approx \phi$  で定義されます。

なるとします。時間  $t = 0$  , 位置  $x = 0$  での A 点の速度を  $u$  , D 点での速度を  $u + \Delta u$  とすると ,  $t + \Delta t$  時間後には A 点は A' 点 ( $u\Delta t$ ) , D 点は D' 点 ( $(u + \Delta u)\Delta t$ ) にくるので , その時のひずみを  $\Delta\gamma_1$  とすると

$$\Delta\gamma_1 = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{(u + \Delta u)\Delta t - u\Delta t}{\Delta y} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \Delta t$$

$$\therefore \frac{\partial\gamma_1}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$
(11.26)

一方 , せん断応力  $\tau_1$  は  $\tau_1 = \mu \partial u / \partial y$  でしたから上の式と合わすと

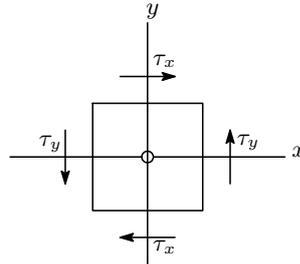
$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial\gamma_1}{\partial t}$$
(11.27)

となります。ところで実際には Fig.50 (a) の微小な矩形 ABCD に  $x$  軸方向にせん断応力  $\tau_x$  が作用すると  $y$  軸方向にこれに対応してせん断応力  $\tau_y$  が起こって矩形 ABCD は (b) に示すひし形に変形します。つまり  $\angle BAD \rightarrow \angle B'A'D'$  となって , ひずみは  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  となります (ちょうど C をつまんで斜め上方にギュッと引っばった変形ですね)。また , せん断応力の  $\tau_x$  と  $\tau_y$  はモーメントの釣り合い (Fig.50) より  $\tau_x = \tau_y$  となりますから , 結局

$$\tau_x = \tau_y = \mu \frac{\partial\gamma}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial\gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial t} \right) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
(11.28)

で表されることになります。

Fig.51



原点周りのモーメント

$$\tau_y dx - \tau_x dy = 0$$

$$dx = dy$$

$$\tau_y = \tau_x$$

(ある一点の流体自身の内部からモーメントは発生しない)

(11.21)(11.25)(11.28) より

$$p_2 - p_1 = 2\mu \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)$$
(11.29)

を得ます。この式と (11.24) より

$$p_1 = p - \mu \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right), \quad p_2 = p - \mu \left( \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)$$
(11.30)

非圧縮性流体 (密度  $\rho = \text{一定}$ ) とすると連続の式 (3.19) より  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  から  $\partial u' / \partial x' + \partial v' / \partial y' = 0$  となるので (11.30) は

$$p_1 = p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad p_2 = p - 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'}$$
(11.31)

(11.22)(11.23) と (11.19)(11.20) より

$$p_y = \left( p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \sin^2 \theta + \left( p - 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos^2 \theta = p - 2\mu \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \sin^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \cos^2 \theta \right)$$

$$= p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$
(11.32)

$$p_x = \left( p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \cos^2 \theta + \left( p - 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \sin^2 \theta = p - 2\mu \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos^2 \theta + \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin^2 \theta \right)$$

$$= p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$
(11.33)

以上で非圧縮性粘性流体の運動方程式 (11.11) を具体化する材料が揃いました。整理しておくとして

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & p_y &= p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_x &= \tau_y = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$
(11.34)

となります<sup>7</sup>。

### 11.2.2 ナビエ・ストークスの方程式（その2）

ナビエ・ストークスの方程式（その1）で得られた式（11.11）からスタートします。念のために書いておくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

この式に上で得られた結果を入れると（Y方向の運動方程式も同様ですので略します）

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \\ &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (11.36)$$

最後の变形では連続の式  $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$  の両辺を  $x$  で微分した  $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial x \partial y = 0$  を使いました。速度  $u$  は時間  $t$  と位置  $x, y$  の関数で、 $u(t, x, y)$  の時間  $t$  についての微分は

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11.37)$$

となる<sup>8</sup>ので、これと（11.36）から長い工程でしたが（汗；）2次元非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式が得られます。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

3次元へ拡張すると次のようになります。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.39)$$

ついでに（11.39）をベクトル形式で簡潔に書くと  $D/Dt = \partial/\partial t + u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y) + w(\partial/\partial z)$  であったことを思いだして

$$\frac{Dv}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\nu = \mu/\rho: \text{動粘性係数}) \quad (11.40)$$

となります。 $\mathbf{K}$  は外力で  $\mathbf{K} = (X, Y, Z)$ 。ちなみに3次元の場合、2次元での（11.34）にあたるものとして整理して載せておきます（導出はしません）。非圧縮性流体（ $\rho = \text{const}$ ）の場合、連続の式は  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  なので

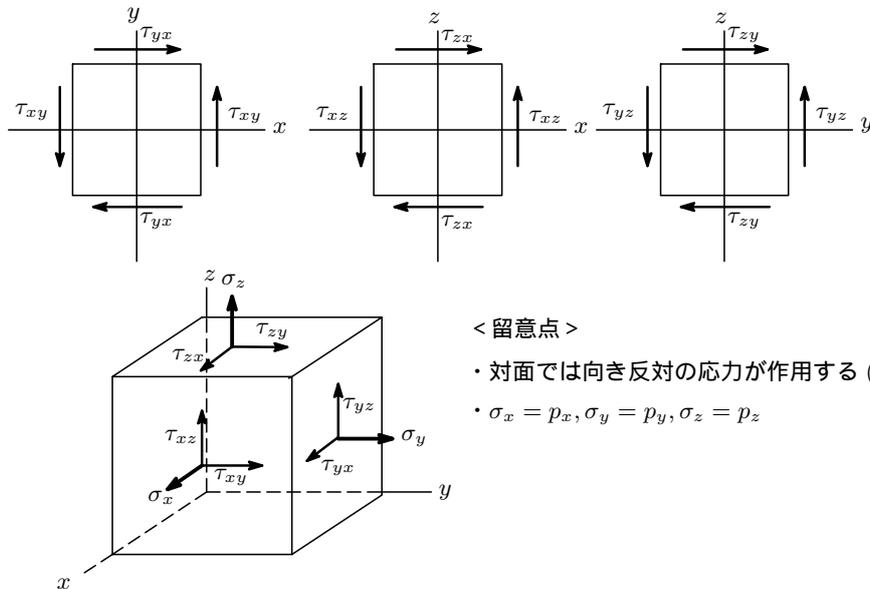
<sup>7</sup> 垂直応力  $p_x, p_y$  は外から内側に力がかかることを明確にするためにマイナス符号をかけたもの、例えば  $p_x = -p + 2\mu(\partial u/\partial x)$  と表記されるのが一般的です。留意ください。

<sup>8</sup> 右辺第1項は位置  $x, y$  を固定し、時間  $t$  についての微分です。

$$\left. \begin{aligned}
 p_x &= p + \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 p_y &= p + \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 p_z &= p + \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

となります。3次元になるとせん断応力  $\tau_{xy}$   $\tau_{yz}$  などいろいろでてきますが、これらの作用する面はどうなっているのかということについては下図を参照ください。

図：せん断応力



< 留意点 >

- ・ 対面では向き反対の応力が作用する (図では省略)
- ・  $\sigma_x = p_x, \sigma_y = p_y, \sigma_z = p_z$

折角ですからナビエ・ストークス方程式の構成について少し触れておきます。(11.39)の左辺第1項は時間微分項、第2項～第4項の  $(v \cdot \nabla)v$  は慣性項とか対流項、移流項<sup>9</sup>と呼ばれます。右辺の第1項は外力項(重力とか、浮力、表面張力、電磁力等で粘性力は含まれていないことに注意)、第2項は圧力項、第3項は粘性項とか拡散項と呼ばれます。ところでこの方程式は、慣性項(対流項)が“速度×速度勾配”と未知量の掛け算の形(非線形項)となっているので、数学的に取り扱いが厄介な非線形2階偏微分方程式となり、解析解としては限られた流れについてしか得られていません(ただし、慣性項のない場合は比較的容易に厳密解を求めることが可能で、例えば流れの速度の遅い粘性流の場合は、粘性項に対して慣性項は非常に小さいとして慣性項を無視します)。複雑な流れについてはコンピューターによる数値計算がおこなわれています。

ついでに非粘性流体に対して成り立つのオイラーの運動方程式(第2話 §3.3.1 参照)

$$\frac{Dv}{dt} = K - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

と(11.40)を比較するとナビエ・ストークスの式では粘性を考慮した  $\nu \nabla^2 v$  が付いていることがわかります。

<sup>9</sup> 流れの場を  $f$  としたとき  $\partial f / \partial t + u(\partial f / \partial x) = \nu(\partial^2 f / \partial^2 x)$  は線形移流(対流)拡散方程式と呼ばれますが、左辺は  $f$  の時間的な変化と空間的な変化の和を表しています。その中の第2項は  $f$  が速度  $u$  で移動したときに時間的、空間的にどのように変化するかを表すことから対流項とか移流項と呼ばれます。右辺の2階微分は拡散方程式でお目にかかる拡散項で  $\nu$  が拡散係数に相当します。

## 11.3 非圧縮性粘性流の例

### 11.3.1 ポアゼイユ流れ

粘性流体では壁面での流速はゼロ (non-slip 条件) としました。これを境界条件としてナビエ・ストークス方程式を解いていきます。流れとしては、平行平板間の十分に発達した定常流が満たす基礎方程式を導出し、圧力勾配が一定の 2 次元流に適用して流速分布を求めるといった段取りになります。

定常流であるからナビエ・ストークスの式から時間項を省略します。また、外力もなしとして外力の項を省略すると (11.39) より

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (11.42)$$

十分に発達した定常流の下流では平板に平行な流れが実現されますから、ここでは  $v = w = 0$  となると考えられます。そうすると (11.42) は

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (11.43)$$

となり、流れの方向 ( $x$  軸方向) と直交する  $y, z$  軸方向での圧力は一樣であることとなります。また、連続の式より  $\partial u / \partial x = 0$  となるので、十分に発達した流れでは速度  $u$  は  $x$  方向において変化しない (ある位置  $x$  で急に流れの速さが変化することはない) ことがわかります。以上のことを踏まえて (11.42) を整理すると左辺はゼロとなる<sup>10</sup>ので、結局

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (11.44)$$

という求める基礎方程式が得られます。そこで、平板が静止しており、圧力勾配が一定の 2 次元流を考えてみます。基礎方程式より圧力  $p$  は  $x$  のみの関数、速度  $u$  は  $y$  のみの関数 (2 次元  $x, y$  であるから) となるので、偏微分を常微分に置き換えると

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (11.45)$$

これを  $u$  について解くと

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \longrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \longrightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (11.46)$$

となります。積分定数  $c_1, c_2$  は次の境界条件より求められます。2 枚の平板の間隔を  $2h$  とし、壁面での non-slip 条件を適用すると、境界条件は  $y = 0 : u = 0, y = 2h : u = 0$ 。これを (11.46) に入れて  $c_1 = 0, c_2 = -(h/\mu)(dp/dx)y$  となるので求める速度は

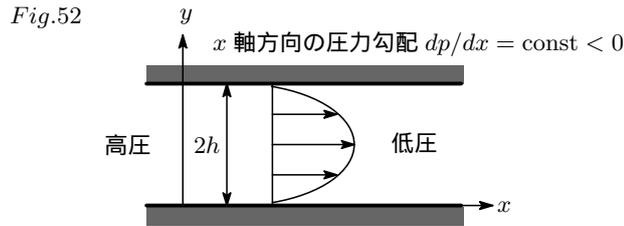
$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{h}{\mu} \frac{dp}{dx} y$$

が得られます。圧力勾配を一定とたので  $dp/dx = A$  とおくと

$$u = \frac{A}{2\mu} (y^2 - 2hy) \quad (11.47)$$

<sup>10</sup> N-S 方程式の慣性項がなくなることにご注意!

この速度分布は放物線形となり、いわゆる2次元ポアゼイユ流れ (Poiseuille flow) となります。この解はナビエ・ストークス方程式の厳密解です。



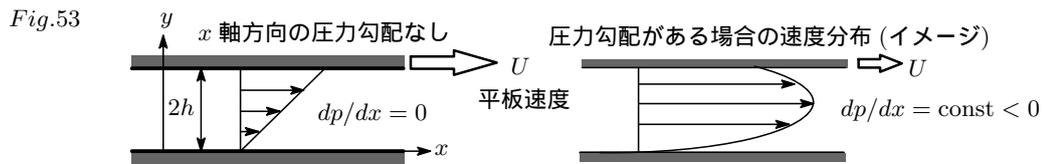
### 11.3.2 クエット流れ

上の状況で、一方の平板が速度  $U$  で動く場合の速度分布を求めます。基礎方程式は (11.44) で得られています。境界条件は  $y = 0 : u = 0$ ,  $y = 2h : u = U$  (壁面での流体は壁面と一緒に動く: non-slip 条件) となります。(11.46) の積分定数は一方の平板壁面  $y = 0$  での速度は  $u = 0$  だから  $c_2 = 0$ , 他方の壁面  $y = 2h$  では速度  $U$  なので求める速度分布は

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2h)^2 + c_1(2h) \rightarrow c_1 = \frac{U}{2h} + \frac{h}{\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right)$$

$$\therefore u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 - \frac{h}{\mu} \frac{dp}{dx} y + \frac{U}{2h} y \quad (11.48)$$

となります。(11.48) は2次元クエット流れ (Couette flow) と呼ばれます<sup>11</sup>。通常、クエット流は流れの方向に圧力勾配がない ( $\partial p/\partial x = 0$ ) 場合の  $u = (U/2h)y$  として平板間の流速が直線分布になるとして紹介されているケースが多いですね。



### 11.3.3 ハーゲン・ポアゼイユ流れ

ポアゼイユ流れは2次元流れでした。これを円管内の流れで考えたものをハーゲン・ポアゼイユ流れ (Hagen・Poiseuille flow) と呼んでいます<sup>12</sup>。

#### ハーゲン・ポアゼイユ流れの流速分布

水平に置かれた半径  $R$  の円管の軸心を  $x$  軸にとります。また外力は作用しないとします。 $x$  軸方向の運動方程式は (11.39) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (11.49)$$

いま、 $x$  軸方向の安定した層流を考えているので  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $\partial u/\partial x = 0$ 。また層流ですから  $\partial u/\partial t = 0$ , 外力の作用はないとするので  $X = 0$ 。これらの条件を (11.49) に入ると

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u = 0 \quad (11.50)$$

<sup>11</sup> この流れも N-S 方程式の厳密解です。慣性項がないことに留意。

<sup>12</sup> ハーゲン (独逸: 1797-1884), が 1839 年に、ポアゼイユが 1840 年にそれぞれ独自に円管を流れる体積流量と圧力勾配の関係を実験的に見出したとされています。

が得られます<sup>13</sup>。円管ですから上の方程式の  $\nabla^2$  を  $x = x, y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$  ( $0 \leq r \leq R$ ) の円柱座標に変換します<sup>14</sup>。ここで  $\nabla^2$  の円柱座標への変換は公式により

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (11.51)$$

となりますが、流れの旋回成分  $v_\theta (= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta})$  はなしとする軸対称近似をとると (11.51) の右辺第 3 項は消えるので、結局 (11.50) の方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) = 0 \\ -r \frac{dp}{dx} + \mu \left( r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \right) &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) &= \frac{r}{\mu} \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (11.52)$$

となります。(11.52) の微分方程式を次の境界条件の下に解いていきます。

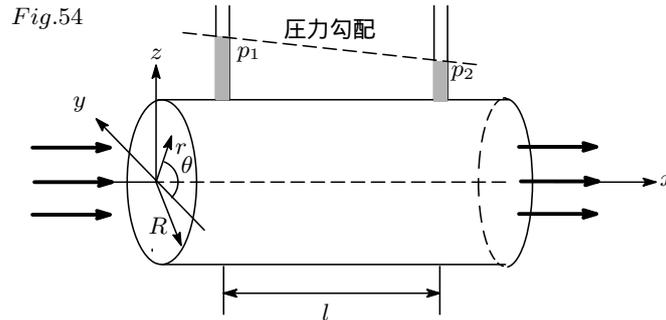
$r = 0$  で  $du/dr = 0$  : 円管の中心 ( $r = 0$ ) で速度  $u$  は最大値をとる (速度分布は中心軸で対称)

$r = R$  で  $u = 0$  : non-slip 条件

(11.52) より

$$\begin{aligned} r \frac{du}{dr} &= \frac{r^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + c_1 \rightarrow \text{境界条件 より} \rightarrow c_1 = 0 \\ \frac{du}{dr} &= \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dx} \rightarrow u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} + c_2 \rightarrow \text{境界条件 より} \rightarrow c_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \\ \therefore u(r) &= -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \end{aligned} \quad (11.53)$$

と速度分布の式が得られます<sup>15</sup>。



一様な円管内の定常流れでは圧力勾配  $dp/dx$  は一定となる<sup>16</sup>ので、長さ  $l$  の管の両端の圧力をそれぞれ  $p_1, p_2$  とすると

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l} \quad (11.54)$$

これを (11.53) に入れると

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad (11.55)$$

流れの最大速度は円管の軸心  $r = 0$  での速度で、これを  $u_{max}$  とすると、

$$u_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2 \quad (11.56)$$

<sup>13</sup>  $p$  は  $x$  のみの関数となるので常微分に置き換えています。

<sup>14</sup>  $\nabla^2$  にとっては極座標への変換になります。

<sup>15</sup>  $dp/dx < 0$  にご注意ください。

<sup>16</sup> ハーゲン・ポアゼイユ流れを作るには圧力勾配を外から与える必要があります。例えばポンプで吸引するとか。

これを (11.55) に入れて整理すると

$$u(r) = u_{max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (11.57)$$

となり、速度分布  $u(r)$  は放物面となることがわかります。

ついでに平均速度  $\bar{u}$  を求めると

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{\pi R^2} \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} R^2 \\ &= \frac{1}{2} u_{max} \end{aligned} \quad (11.58)$$

したがって、速度分布の式を平均速度  $\bar{u}$  で書き直すと

$$u(r) = 2\bar{u} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (11.59)$$

となります<sup>17</sup>。体積流量  $Q$  は  $\pi R^2 \bar{u}$  となるので

$$\begin{aligned} Q &= \pi R^2 \bar{u} = \pi R^2 \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} R^2 \\ &= \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{(p_1 - p_2)}{l} \end{aligned} \quad (11.60)$$

と求まり、この関係はハーゲン・ポアゼイユの法則といわれます。体積流量  $Q$  は圧力勾配に比例し、また円管の半径  $R$  の 4 乗に比例し、円管を太くすると流量増大に大きく効きます。一方、流量は粘性係数  $\mu$  に逆比例するので粘性の大きな流体の流量を稼ぐのはしんどくなります。

[別解] 速度分布の式 (11.53) を求めるのに微分方程式を真正面から解くのではなく non-slip 境界条件をうまく使ったもっと簡単なやり方があるのでそれを紹介しておきます。

円管の壁面で  $u = 0$  で、円管の壁面の方程式は  $y^2 + z^2 = R^2$ 、つまり  $y^2 + z^2 - R^2 = 0$ 。この境界条件を満足する  $u$  の解として

$$u = k(y^2 + z^2 - R^2)$$

とおいてやります。これを (11.50) にいれて  $k$  を求めると

$$k = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{u}{\rho} 4k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx}$$

これを先ほどの式に入れると

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 + z^2 - R^2) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)$$

となって、求める速度分布の式が得られました。このうまいやり方は憶えておいて損はないですね！(笑)

壁面せん断応力、円管の受ける摩擦抗力について

せん断応力は  $\tau = \mu(du/dy)$  で与えられますから (11.59) を使うと

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr} = \frac{4\mu \bar{u} r}{R^2} \quad (r = R - y \text{ の関係より } dy = -dr) \quad (11.61)$$

したがって壁面  $r = R$  でせん断応力が最大となり、これを  $\tau_w$  とすると

$$\tau_w = \frac{4\mu \bar{u}}{R} \quad (11.62)$$

$\bar{u}$  は (11.58) で圧力勾配に比例しますから  $\tau_w$  は

$$\tau_w = \frac{R}{2} \left( \frac{p_1 - p_2}{l} \right) \quad (11.63)$$

<sup>17</sup> N-S 方程式の厳密解です。慣性項がないことに注意 (少しひつこいかな：笑)。

と表され、壁面 ( $r = R$ ) でのせん断応力は圧力勾配のみによって決まることがわかります。次に円管の受ける摩擦抗力を  $D$  とすると、 $D$  は壁面のせん断応力を管壁面積  $2\pi Rl$  にわたって積分した値ですから

$$D = 2\pi R \int_0^l \tau_w dx = 8\pi\mu\bar{u}l \quad (11.64)$$

となります。また、摩擦抗力係数  $C_f$  は抗力  $D$  と摩擦抗力係数  $C_f$  の定義式

$$D = \frac{1}{2}C_f\rho\bar{u}^2S = \frac{1}{2}C_f\rho\bar{u}^2 \times 2\pi Rl \quad (S: \text{壁面の面積}) \quad (11.65)$$

と (11.64) より

$$C_f = \frac{D}{\rho\bar{u}^2\pi Rl} = 16\frac{\mu}{\rho\bar{u}(2R)} = 16\frac{\nu}{\bar{u}d} = \frac{16}{Re} \quad (\nu: \text{動粘性係数}, d = 2R: \text{代表長さ}) \quad (11.66)$$

と求まります。ここで  $Re$  は管内流れのレイノルズ数で  $Re = \bar{u}(2a)/\nu$  です<sup>18</sup>。

尚 (11.65) の両辺を  $2\pi Rl$  で割ると単位面積当たりの抗力となるので、これは  $\tau_w$  となります。したがって

$$\tau_w = \frac{1}{2}C_f\rho\bar{u}^2 \quad (11.67)$$

この関係式はこの後すぐ使います。

#### 圧力降下 (圧力損出) について

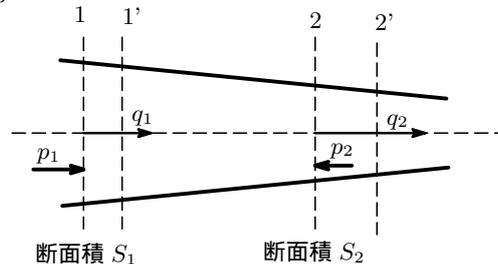
この話題の本論に入る前に流体の運動量の法則について少し復習しておきます。ニュートンの第2法則によると力  $f$  と速度を  $q$  とした場合の運動量  $mq$  は (何を今更という感じですが復習ですから我慢我慢)

$$f = \frac{d}{dt}(mq)$$

Fig.55 で 1, 2 間の流体が  $dt$  時間後に 1', 2' 間に進んだとします。そうすると  $dt$  時間後の運動量の増加量は 1'-2' 間と 1-2 間との運動量の差で、結局 2-2' 間の運動量と 1-1' 間の運動量の差となりますから

$$(mq)_{t+dt} - (mq)_t = \rho(S_2q_2dt)q_2 - \rho(S_1q_1dt)q_1$$

Fig.55



単位時間当たりの運動量の変化は力ですから 1, 2 の断面での流量をそれぞれ  $Q_1, Q_2$  とすると

$$f = \frac{(mq)_{t+dt} - (mq)_t}{dt} = \rho(S_2q_2)q_2 - \rho(S_1q_1)q_1 = \rho Q_2 q_2 - \rho Q_1 q_1$$

力  $f$  は 1, 2 での圧力による  $p_1S_1 - p_2S_2$  と 1, 2 間の流体が壁面に流れの方向に作用する力  $F$  (したがって管が流れの方向に作用する力は  $-F$  となる: 壁面のせん断応力) との合力ですから

$$f = (p_1S_1 - p_2S_2) + (-F)$$

これから  $-F$  は次式で与えられます。

$$-F = (p_1S_1 - p_2S_2) - (\rho Q_2 q_2 - \rho Q_1 q_1) \quad (11.68)$$

<sup>18</sup> 流速が早くなると層流から乱流へに移り変わりますが (遷移)、レイノルズ数は  $\bar{u}d/\nu$  なる無次元量が流れの状態を決定することを発見しました。層流から乱流に遷移し始める場合のレイノルズ数を臨界レイノルズ数  $Re_c$  といいますが、多くの実験から  $Re_c = 2300 \sim 3000$  とされています。レイノルズ数の話題は第1話を参照ください。

以上で復習を終わって本論に入ります。

一様な太さの円管の流れに上の議論を適用すると  $-F$  は壁面のせん断応力の合計ですから  $-F = \tau_w 2\pi R l$  , 円管の太さは一様なので  $S_1 = S_2 = \pi R^2$  , 流量  $Q$  , 速度  $q$  は一定という条件と (11.67) を使うと

$$\begin{aligned} -F &= \tau_w 2\pi R l = (p_1 - p_2) \pi R^2 \\ \therefore p_1 - p_2 &= \frac{2l}{R} \tau_w = C_f \frac{l}{R} \rho \bar{u}^2 = 4C_f \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \quad (d = 2R) \end{aligned} \quad (11.69)$$

ここで  $\lambda = 4C_f$  とおくと円管の長さ  $l$  間における圧力降下  $p_1 - p_2$  は

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \quad (11.70)$$

で表されます。圧力降下は距離  $l$  の 1 次関数となっていますね。  $\lambda$  は抗力係数 (Resistance coefficient) とか圧力降下係数 (Pressure drpp coefficient) と呼ばれます<sup>19</sup>。  $\lambda$  はレイノルズ数と関係し (11.66) より

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (11.71)$$

となり、層流の場合には  $\lambda$  はレイノルズ数に反比例します (乱流に近づけば抗力係数  $\lambda$  は大きくなる、つまり圧力降下が大きくなります)。

#### 11.4 2次元ナビエ・ストークス方程式の無次元化と相似則

幾何学的に相似な流路の場合や幾何学的に相似な物体が流れの中におかれた場合、流れの状態、例えば流線が相似となるための条件はレイノルズ数<sup>20</sup>が同一になることでした (第1話 §2 参照)。非圧縮性の2次元流れで外力が作用していない場合の運動方程式は (いままで何度もでてきているが)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (11.72)$$

ここで代表長さ  $L$  と代表速度  $V$  を使って

$$\left. \begin{aligned} x' &= x/L & y' &= y/L \\ u' &= u/V & v' &= v/V \\ t' &= t/T & p' &= p/(\rho V^2) \end{aligned} \right\} \quad (11.73)$$

無次元化します。尚、 $T$  は代表時間で  $T = L/V$  で、圧力は動圧  $\rho V^2$  で無次元化します。そうすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial (Vu')}{\partial (Tt')} = \frac{V}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'}, & u \frac{\partial u}{\partial x} &= u'V \frac{\partial (Vu')}{\partial Lx'} = \frac{V^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{V^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'}, & \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= \left[ \frac{\mu V}{\rho L^2} \right] \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \end{aligned}$$

となって、これを運動方程式に入ると

$$\begin{aligned} \frac{V}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V^2}{L} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{V^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu V}{\rho L^2} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ \therefore \left[ \frac{L}{TV} \right] \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \left[ \frac{\mu}{\rho VL} \right] \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \end{aligned}$$

<sup>19</sup> 管摩擦係数と書いているテキストもあります。

<sup>20</sup>  $Re$  数は慣性力/粘性力という物理的意味を持つものでした。  $Re$  数の大きい流れでは粘性の影響を無視できますが、逆に  $Re$  数の小さい流れでは慣性力の影響を無視できません (つまりこの場合は密度  $\rho$  の影響が現れない)。この2つの力、粘性力と慣性力とのバランスが流れの特性を決める重要なファクターとなります。同じ流体であっても流れが速くなるとか物体の大きさ・スケールが変わるとかによって流れの様子は千差万化しますが、慣性と粘性のバランスの比 ( $Re$  数) が同じであれば流れの様子も同じような模様になります。

となります。無次元数  $L/TV$  は第 6 話 § 10.3.3 のところででてきたストローハル数<sup>21</sup> ,  $\mu/\rho VL$  はレイノルズ数の逆数ですね。これから、無次元数が同一であれば 2 つの流れの運動方程式は同一のものになる といえます。

(了)

---

あと、一つ二つ例題をと思ったのですが紙数も増えたのでこれで第 7 回目を終わります。お疲れ様でした。尚、例題については第 7 話の話題をフォローするという意味で別に改めて載せることとします。

毎度の注意ですが、私の誤解にもとづく誤った記述やミス・スペル等をいろいろ不具合を見つけられたらご自分で訂正いただくか、お手数でもお気軽にご一報いただくとありがたいです。よろしくお願いします。

さて、今回は「遅い粘性流」の話題を取り上げようかなと思っています。お楽しみに、それではまた～。

[追記]

- § 11.2.2 (11.41) で非圧縮性の場合の表式追加。
- 2009.3.18 ひよこさんより式 (11.26)(11.30)(11.32)(11.33)(11.34) で誤植のご指摘がありました。早速修正しました。ひよこさんに感謝。

---

<sup>21</sup>  $St = fD/U$ 。流れの中に円柱のような柱状物体を置いた場合、物体の下流では渦が周期的に放出されますが、このような渦放出の発生周期を無次元化したもの。