

# 流体力学講話・つまみ食い(その8)

KENZOU

2008年8月31日

♣ 流体力学のお話も中盤を過ぎて第8回目に入りました。1回目は流体の種類, 流れのふる舞い, 相似則の話題, 2回目はラグランジュの立場とかオイラーの立場からの完全流体の基礎方程式の導出を中心と話題と渦に関する話題, 3回目は完全流体の運動方程式の活用, ベルヌイの定理からラグランジュの渦定理など, 4回目は非圧縮性流体の2次元渦なし運動の話で, 流れ関数とか複素速度ポテンシャルなど大変重要な概念がでてきました。また, 静止円柱を過ぎる一様流れ場での速度や圧力分布などを求めました。5回目は, 任意の形状の物体が流体から受ける圧力やモーメントを求めるブラジウスの公式から揚力に関するクッタ・ジュコフスキー定理, それから等角写像とその活用などの話題。6回目はカルマン(Karman)の渦列など, 渦の周りの流れの話題に触れました。第7回目は非圧縮性粘性流体の運動方程式, これは外力としてせん断応力等が登場してきますのでオイラーの運動方程式は適用できずいわゆるナビエ・ストークスの方程式となりますが, この方程式を簡単な系として2次元流体で導出し, 3次元に拡張していきます。そして, ナビエ・ストークスの方程式を使った例題(ハーゲン・ポアゼイユ流れなど)をやりました。第8話では遅い流れの話題に入る前に, 2次元流れで平均流が $x$ 軸に平行な乱流の話題に触れることにします。層流の場合と異なり, そこではせん断応力がどのように表されるのかということから, レイノルズ応力やブジネスクの仮定を経てプラントルの運動量輸送理論の話, 境界層理論にまで進むこととします。遅い流れの話題は次回にまわします。それでは第8話をはじめます。

## 目次

12 乱流の速度分布とレイノルズ応力	2
12.1 運動量輸送理論(プラントルの混合距離)	3
12.2 プラントルの仮定	5
12.3 対数速度分布則(円管内の乱流)	5
12.4 カルマン - プラントルの $1/7$ 乗則(円管内の乱流)	6
13 境界層理論	7
13.1 境界層	7
13.2 境界層の運動方程式	8
13.2.1 2次元層流境界層内の $x$ 方向の圧力勾配	9
13.2.2 境界層厚さ	10
13.2.3 2次元境界層の運動量(積分)方程式	12
13.3 ブラジウス厳密解法	14

=====

## 12 乱流の速度分布とレイノルズ応力

2次元流れを考えます。第7話の§11.3.3のところでは書きましたように円管内の流れはレイノルズ数 ( $R_e$ ) が約 2300 程度までは層流が安定ですが,  $R_e$  がそれ以上大きくなると乱流に変化し, 流体粒子の  $x$  軸,  $y$  軸方向の速度  $u, v$  は時間的な平均速度  $\bar{u}, \bar{v}$  以外に時間的に不規則な短い周期の微小変動速度  $u', v'$  を持つようになり, それぞれ次のように表せます<sup>1</sup>。

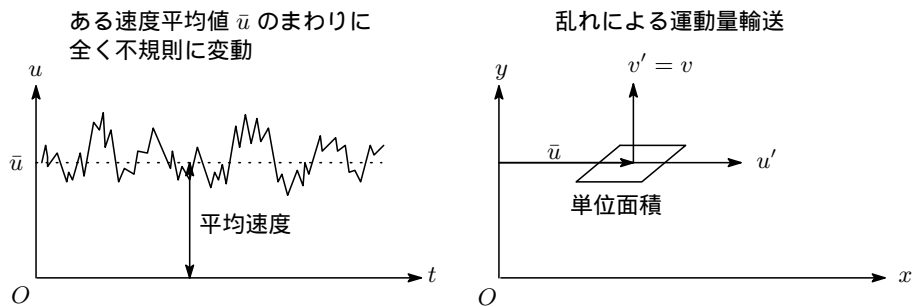
$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v'$$

いま, 2枚の平板間の流れのように,  $x$  軸方向に  $u$  という速度をもつ流れを考え,  $y$  軸方向の速度  $v$  は時間的に不規則な変動速度  $v'$  のみからなるとすると

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v' \tag{12.1}$$

となります。

Fig.56



乱流のせん断応力  $\tau_r$  は, 速度の異なる 2 層の間に働く層流のせん断力  $\tau_l$  と乱れによる乱流せん断応力  $\tau_t$  との和で  $\tau_r = \tau_l + \tau_t$  となります。  $\tau_l$  は後で考えるとして, いまは乱流によるせん断応力のみを考えることにします。 Fig.56 に示すように  $x$  軸に平行な単位面積を通る微小流体の質量は  $\rho v'$  で, この微小流体は  $u$  の速度をもっているため微小体が輸送する運動量の  $x$  方向の成分は  $\rho v'(\bar{u} + u')$  となります。 その時間的変化の平均値は次式で与えられます。

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \rho v'(\bar{u} + u') dt &= \rho \frac{\bar{u}}{t} \int_0^t v' dt + \frac{\rho}{t} \int_0^t u' v' dt \\ &= \frac{\rho}{t} \int_0^t u' v' dt \equiv \rho \overline{u' v'} \end{aligned} \tag{12.2}$$

ここで  $\bar{u}, u', v'$  は  $t$  を十分長くすれば

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_0^t u dt = 0, \quad \frac{1}{t} \int_0^t u' dt = 0, \quad \frac{1}{t} \int_0^t v' dt = 0 \tag{12.3}$$

となることを使いました。(12.2) は単位時間あたりの運動量の変化で, これは乱流によるせん断応力 ( $\tau_r$ ) により引き起こされたもの<sup>2</sup>ですから, 流体内の任意の位置におけるせん断応力は

$$-\tau_r = \rho \overline{u' v'} \tag{12.4}$$

で表せます。これをレイノルズ応力 (Reynolds stress) と呼んでいます。レイノルズ応力を計算するには, 変動速度の相関  $\overline{u' v'}$  に関する知識が必要となりますが, これについては後ほど考えていきます。

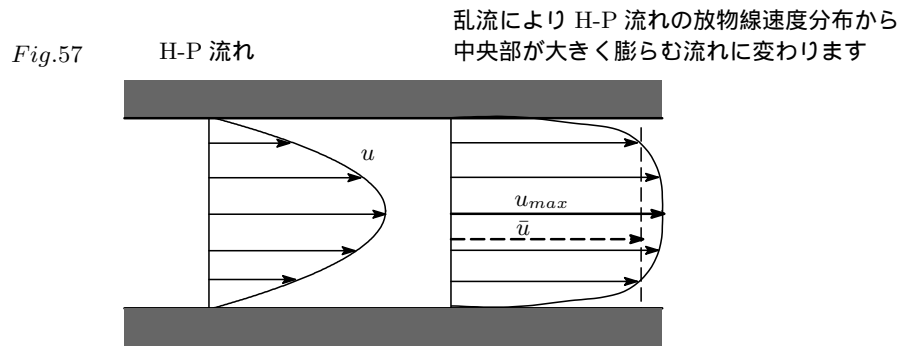
速度の異なる 2 層間に作用するせん断応力や壁の影響も考えた全体のせん断応力  $\tau$  は

$$\tau = \tau_0 + \tau_r = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u' v'} = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho \overline{u' v'} \tag{12.5}$$

<sup>1</sup> 第7話の N-S 方程式の厳密解であるハーゲン・ポアゼイユ流では流量  $Q$  は圧力勾配に比例して増大しました。しかし, 実際の流れではあるレイノルズ数以上になると  $Q$  は圧力勾配に比例しなくなり, 計算値より少ない流量しか流れなくなります。これは乱流により運動量が拡散し流速の分布が放物線形から管の中心ではほぼ一様で壁面付近に大きな速度勾配を持つ分布に変化し (Fig.57), このため流れが管から受ける抵抗が増大することが原因です。

<sup>2</sup> マイナス符号は  $\tau_r$  は運動量ベクトルと反対方向に向いていることからきますね。

となります。しかし、壁から離れたところでは  $\rho\nu(d\bar{u}/dy)$  は  $\rho\overline{u'v'}$  に比べて無視できる程度の小さい量となるので、結果として全体の応力  $\tau$  はレイノルズ応力のみで表すことができます。



ブジネスク ( Boussinesq ) はレイノルズ応力を層流の場合と同じように

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = \rho\epsilon\frac{d\bar{u}}{dy} \quad (12.6)$$

で表すことができると仮定しました<sup>3</sup>。そうすると、乱流内の全体のせん断応力  $\tau$  は

$$\tau = \rho\nu\frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} = \rho(\nu + \epsilon)\frac{d\bar{u}}{dy} \quad (12.7)$$

と表すことができます。ここにでてきた  $\epsilon$  は渦動粘性係数とか乱流動粘度係数、乱流拡散係数と呼ばれ、動粘性係数  $\nu$  のように流体の種類や圧力、温度などで決まる物性値ではなく、流れの状態によって変化する量 となります。この点の詳しいことは次のセクションの最後で少し触れます。

## 12.1 運動量輸送理論 ( プラントルの混合距離 )

レイノルズ応力の計算には変動速度の相関  $\overline{u'v'}$  に関する知識が必要ですが、プラントル ( Prandtl )<sup>4</sup> は不規則な運動をしている乱流に気体分子運動論の運動量輸送の考え<sup>5</sup> を適用して混合距離 ( mixing length ) という概念を導入し、 $\overline{u'v'}$  は乱流の乱れによるせん断応力 であるということを示しました。

$$\tau_r = -\rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (12.8)$$

右辺にでてくる  $l$  が混合距離 ( mixing length ) と呼ばれるもので、乱流の分子の集団 ( 渦集団 ) が上下に平均して行程  $l$  だけ移動すると他の渦粒子との不規則な衝突 ( それにより分子の集団の運動量が輸送される ) が起こり、その部分の速度はレベリングされると考えます。

$$|u'| \simeq |v'| = l \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (12.9)$$

この理論は運動量輸送理論とか混合距離理論と呼ばれています<sup>6</sup>。この理論を以下に少し詳しくみていくことにします。

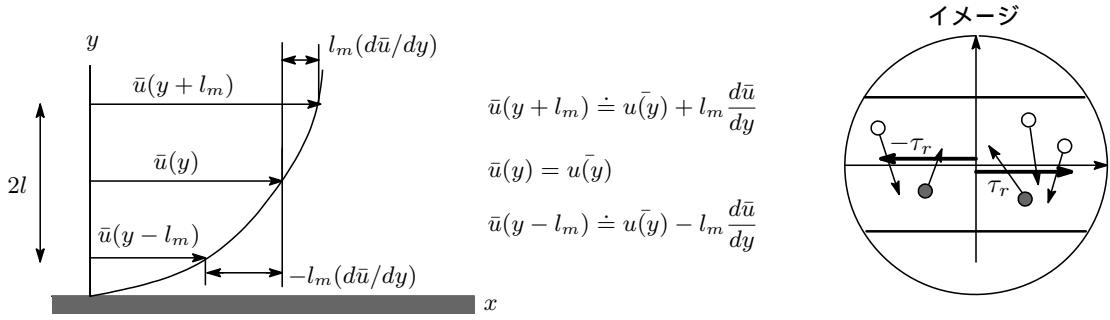
<sup>3</sup> (12.6) の関係式はブジネスク ( Boussinesq ) の仮定と呼ばれます。

<sup>4</sup> Ludwig Prandtl : ドイツの物理学者 (1875-1953)。近代流体力学の創始者といわれています。

<sup>5</sup> 気体分子運動論では気体の粘度  $\eta$  は速度の勾配に沿っての運動量の輸送量に相当し、 $\eta = (1/3)m\rho\nu\bar{l}$  で表されます。 $\bar{l}$  は気体分子の平均自由行程。

<sup>6</sup> プラントル 1925 年提唱。

Fig.58



$x$  軸を壁としてこれと平行に流れる流体で、 $x$  軸からの距離  $y$  の層にある流体の平均速度  $\bar{u}$  を  $u(\bar{y})$  とします。 $l_m$  を上下の分子集団が混ざり合う平均距離で、 $l_m$  は微量量としてテイラー展開すると

$$\begin{aligned}\bar{u}(y+l_m) &\doteq u(\bar{y}) + l_m \frac{d\bar{u}}{dy} \\ \bar{u}(y) &= u(\bar{y}) \\ \bar{u}(y-l_m) &\doteq u(\bar{y}) - l_m \frac{d\bar{u}}{dy}\end{aligned}\quad (12.10)$$

となります。 $y$  の層を中心に上層の  $y+l_m$  にいた粒子が  $y$  に飛び込んできた場合、あるいは下層の  $y-l_m$  にいた粒子が  $y$  に飛び込んできた場合の速度の変動はそれぞれ

$$\begin{aligned}\bar{u}(y+l_m) - \bar{u}(y) &= l_m \frac{d\bar{u}}{dy} \\ \bar{u}(y-l_m) - \bar{u}(y) &= -l_m \frac{d\bar{u}}{dy}\end{aligned}\quad (12.11)$$

となり、 $y$  での平均流速  $\bar{u}(y)$  はその分早くなったり遅くなったりします。この変動速度  $u'$  の平均値の大きさ  $|\bar{u}'|$  は、したがって

$$|\bar{u}'| = \frac{1}{2} \left\{ \left| l_m \frac{d\bar{u}}{dy} \right| + \left| -l_m \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \right\} = l_m \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|\quad (12.12)$$

となります。 $y$  の層における  $y$  方向の速度変動の平均値の大きさ  $|\bar{v}'|$  も  $|\bar{u}'|$  の場合と同様に考えて

$$|\bar{v}'| = (\text{ある数}) \cdot |\bar{u}'| = (\text{ある数}) \cdot l_m \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|\quad (12.13)$$

とします。次に  $u', v'$  の符号は  $y$  の上層からきた  $u'$  は正符号であるのに対し  $v'$  は負の符号となり、同様に  $y$  の下層からきた  $u'$  は負の符号であるのに対し  $v'$  は正の符号となりますから、これらの積の符号は負の符号になり

$$\overline{u'v'} = -|\overline{u'}| \cdot |\overline{v'}|\quad (12.14)$$

となります。これを便宜上  $c$  をある因数として

$$\overline{u'v'} = -c |\overline{u'}| \cdot |\overline{v'}|\quad (12.15)$$

と仮定します。そうすると (12.8) のせん断応力  $\tau_r$  は (12.12)(12.15) より

$$\begin{aligned}\tau_r = -\rho \overline{u'v'} &= \rho c |\overline{u'}| \cdot |\overline{v'}| \propto \rho c l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2 \\ &= \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2\end{aligned}\quad (12.16)$$

となつて (12.8) が得られます。 $l^2$  は  $c l_m^2$  に比例する定数として、この  $l$  を混合距離と呼びます<sup>7</sup>。

(12.6) のビジネスクの仮定  $\tau = \rho \epsilon (d\bar{u}/dy)$  と運動量輸送理論の結果を照合すると、渦動粘性係数と呼ばれた  $\epsilon$  は  $\epsilon = l^2 |d\bar{u}/dy|$  となり、 $\epsilon$  は流れの状態によって変化する物理量であることが分かります。

<sup>7</sup> 厳密には  $l_m$  が Prandtl が提唱した混合距離ですが、便宜上  $l$  を混合距離と呼んでいます。

## 12.2 プラントルの仮定

中山泰喜「改訂版 流体の力学」(養賢堂)(P89)によれば「ここまで来て、プラントルは行きづまってしまった。というのは、 $l$ に具体性を与えなければこの先の展開が望めないのである。困惑したプラントルは気晴らしに外に出てみた。はるか向こうに何本も煙突があり、煙が微風に流されていた。この煙の渦は地表に近い場合はそんなに大きくないが、地表から離れた渦は大きく渦巻いていることに気がついた。プラントルはこれを見て、渦の大きさは地面から渦の中心までの距離の0.4倍であることを見出した。この着想を早速乱流の流れに応用して、 $l = 0.4y$ の関係を導いた。」(一部改変)とあります。時々外にでてまわりの風景を観察しましょう、なにか発見があればシメタモノデスネ(笑い)。

渦の大きさを乱流の拡がりと捉えると、渦の大きさに比例して混合距離も大きくなるとする仮定は素直にうなずけると思います。プラントルの観察によれば「地表に近い渦はそんなに大きくない」ということで、壁面の近傍では壁面からの距離に比例して渦は大きくなっていくとし、壁面に沿う流れでは混合距離  $l$  は壁面からの距離  $y$  に比例するとして

$$l = \kappa y \quad (12.17)$$

とおきました。これをプラントルの仮説といいます。 $\kappa$ はカルマン定数と呼ばれ、先ほどの逸話にでてきたように  $\kappa = 0.4$  です。この式を(12.8)に入れて整理すると

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}} \quad (12.18)$$

が得られます。

## 12.3 対数速度分布則(円管内の乱流)

次に  $\tau_r$  をなんとか具体化したいということで、壁近くの流れに注目します。壁近くの流れは、壁の存在により乱流混合が抑制されますから、壁面の近傍では粘性の影響が支配的 ( $Re < 5$  程度とされています) である極めて薄い粘性底層 (viscous sublayer)<sup>8</sup> と呼ばれる  $\delta_0$  ができます。ここでは速度分布は層流と同じ直線とみなせる(例題 27 参照)ので、 $\tau_w$  を壁面に働くせん断応力とするとこの部分では

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{y} \quad (y \leq \delta_0) \quad (12.19)$$

が成立します。この式の両辺を  $\rho$  で割ると

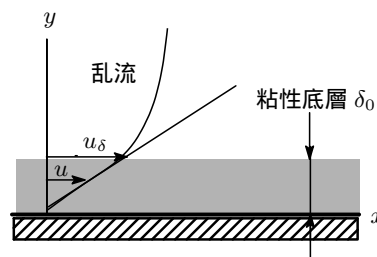
$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \frac{u}{y} \quad (12.20)$$

ここで  $\sqrt{\tau_w/\rho}$  の次元は  $[ML^2T^{-2}L^{-3}/M^{-1}L^3]^{1/2} = [LT^{-1}]$  となって速度の次元を持つので  $\sqrt{\tau_w/\rho} = u_*$  とおいて  $u_*$  を摩擦速度と呼んでいます。ちなみに  $y = \delta_0$  のとき  $u = u_\delta$  とおくと

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \frac{u_* \delta_0}{\nu} = R_\delta \quad (12.21)$$

となり、 $R_\delta$  はこの流れのレイノルズ数です。

Fig.59



<sup>8</sup> 従来この層は層流であると考えられてきましたが、実測によれば壁面に平行な乱れの変動を伴うことが分かり、層流底層という名称から粘性底層と呼ばれるようになりました。

次に、粘性底層を越えた中心寄りの壁近傍では乱流が支配的となりますが、 $\tau_r = \tau_w$  と仮定<sup>9</sup>すると  $\tau_r$  はプラントルの仮説より

$$\tau_r = \kappa^2 \rho y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \longrightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}} \quad (12.22)$$

と表されます。壁面せん断応力  $\tau_r$  は実験的に計測が可能な量ですでにいろいろな実験式が提案されています。摩擦速度  $u_*$  を使うと (12.22) は

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{y}$$

となり、これから

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{const} \longrightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{2.303}{\kappa} \log_{10} y + \text{const} \quad (12.23)$$

が得られます。この式を内壁の滑らかな円管の流れの実験結果と照合すると

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5.75 \log_{10} \frac{u_* y}{\nu} + 5.5 \quad (12.24)$$

となることが知られています<sup>10</sup>。プラントルにより導出されたこの式は流速の対数分布則 (log law) と呼ばれています。この式は導出過程からみて壁付近でのみ成立すると考えられますが、実験結果との比較から滑らかな内壁をもつ円管の壁付近から管の中心まで適用できることが分かりました。尚、壁の近傍の粘性底層では平均速度分布は直線分布になっているということは既に述べたとおりです。

例題 27：粘性底層では乱れの影響が弱いせん断応力  $\tau$  を

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_w = \text{const}$$

と近似することができる。ここで、 $\tau_w$  は壁面でのせん断応力である。このとき粘性底層の平均速度分布は直線分布で表されることを示せ。

答：与式より

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\tau_w}{\mu} = \left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \right)^2 \frac{1}{\nu} = \frac{u_*^2}{\nu} \quad (u_*: \text{摩擦速度})$$

これから

$$\bar{u} = \frac{u_*^2}{\nu} y + \text{const}$$

積分定数は壁面  $y = 0$  で  $\bar{u} = 0$  であるので  $\text{const} = 0$  となる。したがって

$$\bar{u} = \frac{u_*^2}{\nu} y \longrightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}$$

ここで壁面からの無次元距離を表す壁座標 (wall coordinate)  $y^+ = y u_* / \nu [L^2 T^{-1} / L^2 T^{-1}]$  を導入すると

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} = y^+$$

となり、速度分布が直線と与えられることが分かる。

## 12.4 カルマン - プラントルの 1/7 乗則 (円管内の乱流)

また、プラントルは、円管内の乱流の速度分布として  $\bar{u}/u_{max}$  を与える実験式

$$\frac{u}{u_{max}} = \left( \frac{y}{a} \right)^{1/n} = \left( 1 - \frac{r}{a} \right)^{1/n} \quad (12.25)$$

<sup>9</sup> この仮定は壁近傍についての仮定から得られたものですが、壁を離れた中心に向かったところでも実験とかなりよく合うことが知られています。

<sup>10</sup> 壁面が粗い円管の場合は  $h$  を砂の平均直径とすると  $u/u_* = 8.48 + 5.75 \log_{10} y/h$  で表されます (by Nikuradse)。

という指数関数の式を導いています。  $a$  は円管の半径で  $y$  は壁からの距離 ( $r$  は円管の中心からの距離)。指数  $n$  はレイノルズ数によって変化し、レイノルズ数が  $Re = 3 \times 10^3 \sim 10^5$  の範囲では「円管壁面近くの流速は円管の半径に無関係である」として  $n = 7$  とした速度分布式

$$u = u_{max}(y/a)^{1/7} \quad (12.26)$$

がよく用いられています。これを カルマン - プラントルの 1/7 乗則 と呼んでいます<sup>11</sup>。  $Re = 10^5$  付近では平均流速と最大流速の比は

$$\bar{u}/u_{max} = 0.80 \sim 0.82 \quad (12.27)$$

とされます。また、この場合の壁面の摩擦応力  $\tau_w$  は

$$\tau_w = 0.022\rho u_{max}^2 \left( \frac{\nu}{u_{max} \cdot a} \right)^{1/4} \quad (12.28)$$

となります。

例題 28：内径 20cm の滑らかな円管に平均速度 60cm/sec で 10 の水を流す場合、最大流速と管壁の摩擦応力を求めよ。ただし、10 の水の動粘性係数は  $\nu = 0.013\text{cm}^2/\text{sec}$  とする。

解答：レイノルズ数は  $Re = \bar{u}d/\nu = 60 \times 20/0.013 = 92308$ 。  $3 \times 10^3 < Re < 10^5$  に入っているので乱流は 1/7 乗速度分布則にしたがう。

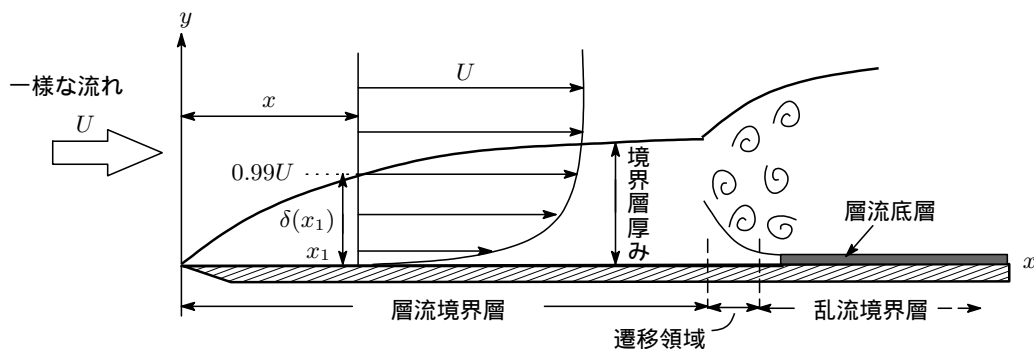
$$u_{max} = \bar{u}/0.80 = 60/0.80 = 75.0\text{cm/sec}, \tau_w = 0.0225\rho u_{max}^2 \left( \frac{\nu}{u_{max} \cdot a} \right)^{1/4} = 0.083\text{kg/m}^2 \quad (12.29)$$

## 13 境界層理論

### 13.1 境界層

レイノルズ数 ( $Re = UL/\nu = \text{慣性力}/\text{粘性力}$ ) の大きな場合の物体の周りの流れは 2 つの層に分かれます。第 1 の層は物体の表面に極めて近い薄い層の領域で、いままでのお話でみてきたように粘性の影響が極めて強く現れ、速度勾配 ( $du/dy$ ) が非常に大きいためせん断応力が大きく作用する領域です。第 2 の層はこの薄い層の外側全体の領域で粘性による影響はほとんどなく ( $du/dy = 0$ )、非粘性流あるいはポテンシャル流としての取り扱いが可能な領域です。この領域は主流 (free stream とか main stream) と呼ばれます。プラントルは第 1 の層、物体表面に沿う薄い層を境界層 (Boundary layer) と名づけ、粘性はこの境界層内だけに存在し、第 2 の層、主流には存在しないとしました。このように、物体のまわりの流れを、粘性の影響がある境界層と、粘性の影響が無視できる主流に分離できるという考え方を境界層理論と呼んでいます<sup>12</sup>。

Fig.60



境界層の厚さは物体表面より速度勾配がなくなるまでの距離を指しますが、実際は主流の流速  $U$  の 99% に達する物体表面からの距離  $y$  を便宜的に境界層厚さ  $\delta$  としています。実測によれば、境界層の流れに中にも層流

<sup>11</sup>  $Re$  が  $10^7$  以上になると  $n = 1/8, 1/9$  が最適といわれています。

<sup>12</sup> プラントルにより 1904 年に提唱。

と乱流が存在し、それぞれ層流境界層 (laminar boundary layer)、乱流境界層 (turbulent boundary layer) と呼びます。層流境界層から乱流境界層へ突然変わるのではなく、一部は層流、一部は乱流という領域があり、この領域を遷移領域 (transition region) と呼んでいます。層流境界層から乱流境界層へ遷移が起こるところのレイノルズ数を臨界レイノルズ数と呼び、 $R_c = 5 \times 10^5$  とされています<sup>13</sup>。

## 13.2 境界層の運動方程式

非圧縮性粘性流体で2次元流れを考えます。外力はなしとした場合、運動方程式と連続の式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

となります。この方程式は厳密な方程式ですが、このままでは境界層内の速度分布を計算したり境界層内の現象を理解するのに適さないため、境界層近似をおこなって境界層流れを記述する境界層方程式を誘導することになります。物体表面に沿って  $x$  軸、垂直に  $y$  軸をとります。物体壁面近傍に厚さ  $\delta$  の境界層を考え、流体の速度はこの領域内でのみ変化するとします。そこで運動方程式の各項のオーダーを調べます。 $L$  を代表長さ ( $x$  方向の物体の長さ) とすると、境界層内では

$$\left. \begin{aligned} u &\simeq U, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{U}{L}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \simeq \frac{U}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{U}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \frac{U}{\delta^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &\simeq \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{U}{L} \\ v &\simeq \frac{U}{L} \delta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \simeq \frac{U}{L^2} \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \simeq \frac{U}{L \delta} = \frac{U}{L^2} \frac{L}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

となります。これを使って運動方程式のオーダーを調べると

(1)  $u$  についての粘性項

$$\nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \simeq \nu \left[ \frac{U}{L^2} + \frac{U}{L^2} \frac{L^2}{\delta^2} \right] \quad (13.3)$$

(2)  $v$  についての粘性項

$$\nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \simeq \nu \left[ \frac{U}{L^2} \frac{\delta}{L} + \frac{U}{L^2} \frac{L}{\delta} \right] \quad (13.4)$$

(3)  $u$  についての慣性項

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \simeq U \frac{U}{L} + \left( U \frac{\delta}{L} \right) \frac{U}{\delta} = \frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} \quad (13.5)$$

(4)  $v$  についての慣性項

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \simeq U \frac{U \delta}{L^2} + \left( U \frac{\delta}{L} \right) \frac{U}{L} = \frac{U^2 \delta}{L^2} + \frac{U^2 \delta}{L^2} \quad (13.6)$$

となります。ここで境界層が十分薄いという境界層近似  $\delta \ll L$  ( $\frac{\delta}{L} \ll 1$ ) を仮定します。この仮定の下に (a) と (b) の粘性項を比較すると (a)  $\gg$  (b), (c) と (d) の慣性項を比較すると (c)  $\gg$  (d) となるので、小さい方を無視すると境界層内の流体の運動方程式 (13.1) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

<sup>13</sup> 一様な流れの中に鋭い先端を持った平板を置くと、平板前縁から壁面に沿って流体は滑らかに流れながら境界層が形成されます。この境界層は徐々に厚みを増していきますが、ある厚みに達すると境界層は不安定となりいわゆる乱流境界層へ遷移します。



となります。これをプラントルの境界層方程式と呼んでいます<sup>14</sup>。(13.7)の真ん中の式より、境界層内の圧力は壁面に垂直な方向には変化しない、つまり境界層外の主流の圧力(静圧)と同一であることが分かります。

また、定常な乱流境界層についても同様にして

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &= -\rho \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \tau &= \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

が成り立ち、これは乱流の境界層方程式と呼ばれています。

例題 29：主流と平行におかれた平板上の層流境界層を考える。主流速度が  $U$ 、平板の主流方向長さが  $L$ 、平板の幅が  $b$ 、流体の密度が  $\rho$ 、粘性係数が  $\mu$ 、境界層の厚さが  $\delta$  で表されるとき、この境界層における慣性力と粘性力の作用が同程度であるとした場合、この層流境界層の厚さ  $\delta$  のオーダーを求めよ。

答：慣性項と粘性項のオーダーは § 13.2 の境界層の運動方程式の見積りより

$$\text{慣性力} : \sim u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \sim \frac{U^2}{L}, \quad \text{粘性力} : \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (13.9)$$

と表せる。いま、慣性力と粘性力の作用が同程度であることから境界層の厚さ  $\delta$  は

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} \quad (13.10)$$

と見積もれる<sup>15</sup>。

例題 30：平板に沿う流れの層流境界層において、平板上における速度勾配  $\partial u / \partial y |_{y=0}$  を  $k$  とした場合の速度分布式を求めよ。

答：定常流の境界層方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で平板上 ( $y = 0$ ) では  $u = v = 0$  であるので

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

これを  $y$  で積分すると  $\partial u / \partial y = (1/\mu)(\partial p / \partial x)y + \text{const} \rightarrow \text{const} = k$  ( $\because y = 0 : \partial u / \partial y = k$ )。再度  $y = 0 : u = 0$  の条件で積分すると

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + ky \quad (13.11)$$

が得られる。

### 13.2.1 2次元層流境界層内の $x$ 方向の圧力勾配

境界層内の圧力は  $y$  軸方向には変化しない、境界層の外側の圧力と同じということが分かりました。次に定常な2次元層流内の  $x$  軸方向の圧力勾配を求めます。境界層の厚みを  $\delta$  とし主流の  $x$  軸方向の速度を  $U$  とします。定常という条件より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

<sup>14</sup> 境界層方程式は未知数が多くまた非線形項があるので残念ながら簡単には解かしてくれません。汗；

<sup>15</sup> § 13.3 のブラジウスの厳密解 (13.40) から  $\delta = 5.0 \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$  が得られており、このオーダー評価が妥当であることがわかります。

境界層と主流の境界層の境界では  $y$  軸方向の速度変化はない (主流の流速  $U$  に限りなく近づき  $u(y)$  は  $y = \delta$  で極値となる) ので

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=\delta} = 0$$

の条件が成立します。また、境界層内では  $y$  軸方向に圧力の変化はないので、境界層内と境界層の境界における  $x$  軸方向の圧力勾配は等しく

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=\delta}$$

これらの条件を考慮して境界層方程式を境界層外の流れ (主流) に適用すると

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=\delta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=\delta} \\ \therefore \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=\delta} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \quad (13.12)$$

が得られます。これから境界層内の  $x$  軸方向の圧力勾配は主流の流速  $U$  の  $x$  軸方向の勾配によって決まることが分かります。逆に、主流  $U$  が一定 ( $dU/dx = 0$ ) であれば境界層内の  $x$  方向の圧力勾配はゼロ ( $dp/dx = 0$ ) となります。(13.12) の微分方程式を解くと

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} U^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \longrightarrow p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{const} = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \quad (13.13)$$

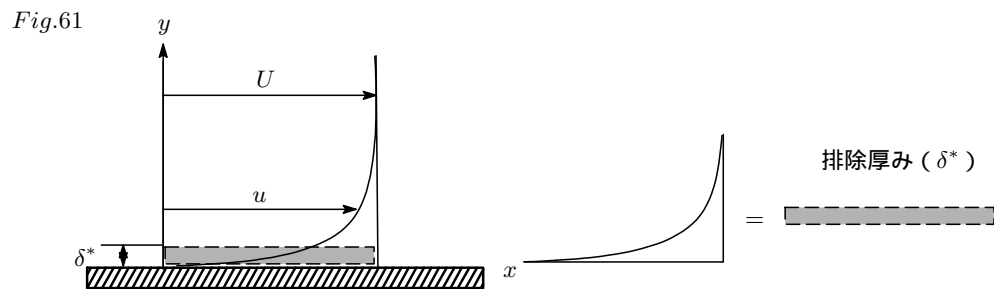
となって定常流のエネルギー方程式であるベルヌイの方程式がでできます。なお、上式の const は流線ごとに異なった値をもってもよいことは第 3 話の § 4.2 でお話したとおりです。

### 13.2.2 境界層厚さ

境界層の流速が徐々に早くなり主流の流速へ漸近していくわけですが、この漸近の仕方は非常に緩やかであるので境界層の厚さ  $\delta$  を正確に定めることは大変難しく、そこで粘性底層の流れの速さ  $u$  が主流の流速  $U$  の 99% に達したときの物体表面からの距離  $y$  とするという定義が使われています ( $\delta = 0.99U$ )。これを  $\delta_{0.99}$  と表記する場合もあります。理論上はそれでいいのですが、実験結果の整理には次に述べる 3 つの厚さがよく使われます<sup>16</sup>。これらはいずれも境界層によって排除された流体の体積、運動量、運動エネルギーの総量を主流の流体に換算するとどのような厚みになるかを表したものです<sup>17</sup>。

#### (1) 排除厚さ ( $\delta^*$ )

排除厚さ (displacement thickness) は  $\delta^*$  で表されます。



これは境界層がなければその部分は本来主流の速度  $U$  で流れる筈ですが、境界層では粘性によるブレーキにより速度が  $u$  に減速され、その分本来の流量が排除された形になります。Fig.61 にみるように、排除厚さは境界層によって排除された流量を主流の流体に換算した場合の厚さで、簡単にいえば境界層により

<sup>16</sup> 大抵は「排除厚さ」と「運動量厚さ」が使われるようです。

<sup>17</sup> これらから算出される境界層厚さは必ずしも  $\delta_{0.99}$  と同じ値にはなりません。例題 31 を参照ください。

排除された主流の流量を  $Q$  とした場合、 $\delta^* \times U = Q$  ということになります。ということで排除厚さは次式で定義されます。

$$\delta^* = \frac{1}{U} \int_0^\infty (U - u) dy \quad (13.14)$$

尚、積分範囲は 0 から  $\infty$  までとされていますが、境界層の外側 ( $y > \delta$ ) では  $u$  は  $U$  に一致し被積分関数はゼロとなるので、実質的には 0 から  $\delta$  の積分範囲となります。

(2) 運動量厚さ ( $\theta$ )

運動量厚さ (momentum thickness) は  $\theta$  で表され、この定義式は

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\infty u(U - u) dy \quad (13.15)$$

で与えられます。これも、主流が壁まで存在していた場合の運動量が速度の遅い境界層によってその分損失するわけですが、この損失した運動量を主流の運動量に換算し、それを厚みで表したものです。式の両辺に  $\rho$  をかけると  $\rho U^2 \theta = \int_0^\infty \rho u(U - u) dy$  となります。右辺の  $\int \rho(U - u) dy$  は Fig.61 の右図の部分の質量に相当しこれに速度  $u$  をかけて境界層の単位時間あたりの運動量に換算しています。右辺は  $\rho U \theta \times U$  と分解すると  $\rho U \theta$  は主流の単位時間当たりの質量で、これに  $U$  をかけると主流の運動量になります。

(32) エネルギー厚さ ( $\theta^*$ )

エネルギー厚さ (energy thickness) は  $\theta^*$  で表され、この定義式は

$$\theta^* = \frac{1}{U^3} \int_0^\infty u(U^2 - u^2) dy \quad (13.16)$$

で与えられます。

この他、境界層の速度分布の形状を表すのに使われる形状係数  $H$  (shape factor) と呼ばれるものがあります。これは排除厚さ  $\delta^*$  と運動量厚さ  $\theta$  の比で定義されます。

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (13.17)$$

平板境界層に対する形状係数の値は

- 層流平板境界層 :  $H=2.59$
- 乱流平板境界層 :  $H=1.4$

とされています。

境界層内の流れは粘性により流速が大きく減速しており運動エネルギーが小さくなっているため、外から大きな力がかかると耐え切れないような弱い流れとなっています。例えば曲面に沿った流れは流れの方向に圧力が増加する逆圧力勾配 (adverse pressure gradient) を発生しますが、この逆圧が大きくなると境界層の流れは物体に沿って流ることができなくなり物体から離れてしまういわゆる境界層剥離現象を起こすこととなります。 $H$  は逆圧力勾配が大きくなればなるほど  $\theta$  が小さくなるので、 $H$  の値が大きくなることは剥離を起こす前兆とされます。具体的には、 $H$  が以下の値に達すると剥離が起こると予測されています。

- 層流 :  $H=3.5$
- 乱流 :  $H=2.4$

例題 31 : 面上に生じる乱流境界層の速度分布が  $1/7$  乗則に従うものとして、境界層の排除厚さ  $\delta^*$ 、運動量厚さ  $\theta$  を求めよ。

答 : 題意の  $1/7$  乗則より乱流境界層の速度分布は (12.26) より次式で与えられる。

$$u = U(y/\delta)^{1/7}$$

- 排除厚さ :  $\delta^* = \frac{1}{U} \int_0^\delta (U - u) dy = \int_0^\delta \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \right\} dy = \frac{\delta}{8}$
- 運動量厚さ :  $\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta u(U - u) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \right\} dy = \frac{7}{72} \delta$

### 13.2.3 2次元境界層の運動量 (積分) 方程式

2次元定常流で、せん断応力と境界層流れの運動量の時間変化を結びつける運動量方程式<sup>18</sup>を導出します。境界層方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (13.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (13.19)$$

まず、連続の式 (13.30) 壁面  $y = 0$  から境界層厚み  $y = \delta$  まで積分すると

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = -v|_{y=\delta} \quad (13.20)$$

次に (13.18) を壁面  $y = 0$  から境界層厚み  $y = \delta$  まで積分します。

$$\int_0^\delta \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = - \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} \quad (13.21)$$

(13.34) の左辺第2項は (12.19) を使って

$$\begin{aligned} \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= \int_0^\delta \left( - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \left| u \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial y} dy \right|_0^\delta + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= -U \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned}$$

となるので (13.34) の左辺は結局

$$\int_0^\delta \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = \int_0^\delta \left\{ 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} \right\} dy$$

次に (13.34) の右辺第1項は (13.12) を使うと

$$- \int_0^\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dy = \int_0^\delta U \frac{dU}{dx} dy$$

第2項は (12.19) を使って

$$\int_0^\delta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \left| \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0^\delta = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{\rho} \tau_w$$

以上をまとめると

$$\int_0^\delta \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right) dy = -\frac{1}{\rho} \tau_w \quad (13.22)$$

となります。(13.22) の被積分関数は

$$\begin{aligned} 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x} (u^2) - \frac{\partial}{\partial x} (uU) - u \frac{dU}{dx} + U \frac{dU}{dx} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [u(u - U)] - (U - u) \frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

と変形できるので (13.22) の微分と積分の順序を入れ替えると

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U - u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U - u) dy = \frac{1}{\rho} \tau_w \quad (13.23)$$

が得られます。排除厚さ  $\delta^*$  と運動量厚さ  $\theta$  を使うと (13.23) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho} \longrightarrow U^2 \frac{d\theta}{dx} + 2\theta U \frac{dU}{dx} + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} + \left( 2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \\ \therefore \frac{d\theta}{dx} + \left( 2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho U^2} \end{aligned} \quad (13.24)$$

<sup>18</sup> カルマンの積分方程式とも呼ばれます。

となります。この式を境界層の運動量方程式と呼んでいます。いま、 $x$  方向に  $U = \text{const}$  の場合は  $dU/dx = 0$  となるので (13.23) は

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u(U - u) dy \quad (13.25)$$

となります。

例題 32：平板境界層速度分布が

$$u = U \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \quad (13.26)$$

で近似できるとき、境界層厚さ  $\delta$  の  $x$  軸方向の変化を与える式を導け。

答：境界層の運動量方程式は

$$\frac{d\theta}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

で与えられた。いま  $U$  の  $x$  軸方向への変化はないとするので、結局この方程式は

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (13.27)$$

と簡略化できる。運動量厚さ  $\theta$  の式に与式の速度分布式を入れると

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{U^2} \int_0^\infty u(U - u) dy = \frac{1}{U^2} \int_0^\delta U \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \left\{ U - U \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \right\} dy \\ &= \int_0^\delta \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \left\{ 1 - \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \right\} dy = \frac{2}{3}\delta - \frac{8}{15}\delta = \frac{2}{15}\delta \end{aligned}$$

次に壁面のせん断応力  $\tau_w$  に与式を入れると

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left\{ U \frac{(2\delta - y)y}{\delta^2} \right\} = \mu \frac{U}{\delta^2} (2\delta - 2y)_{y=0} = 2 \frac{\mu U}{\delta}$$

これらの式を (13.37) に入れると

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \rightarrow \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{\rho U^2} \left( \frac{2\mu U}{\delta} \right) \rightarrow \frac{1}{15} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{U\delta}, \quad (\nu = \mu/\rho)$$

$$\therefore \delta d\delta = \frac{15\nu}{U} dx \rightarrow \delta^2 = 30 \frac{\nu x}{U} + \text{const}$$

積分定数は平板前端の  $x = 0$  では境界層の厚さ  $\delta = 0$  であるので  $\text{const} = 0$  となり、境界層厚さの  $x$  軸方向の変化  $\delta(x)$  は  $\delta(x) = \sqrt{\frac{30\nu x}{U}}$  となる。

例題 33：流速  $U$  一定の流れに平行におかれた平板の層流境界層（厚み  $\delta$ ）の速度分布を  $u = a + by + cy^2$  で近似した場合の速度分布式と境界層厚さ、壁面摩擦応力  $\tau_0$  を求めよ。

答：境界条件

$$\left. \begin{aligned} y = 0 : u &= 0 & 0 &= a \\ y = \delta : u &= U & U &= a + b\delta + c\delta^2 \\ y = \delta : \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 & 0 &= b + 2c\delta \end{aligned} \right\}$$

$a = 0, b = 2U/\delta, c = -U/\delta^2$  となるので流速分布の式は

$$u = U[2(y/\delta) - (y/\delta)^2]$$

となる。次に (13.25) より

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U - u) dy = \rho \frac{d}{dx} \left( \frac{2U^2}{15} \delta \right) = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

一方、

$$\tau_0 = \mu \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{d}{dy} \left[ U \left\{ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right\} \right] \Big|_{y=0} = \mu \frac{2U}{\delta}$$

であるので、この2式から

$$\frac{2}{15}\rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \mu \frac{2U}{\delta} \quad \therefore \delta d\delta = 15 \frac{\nu}{U} dx \longrightarrow \int_0^\delta \delta d\delta = 15 \frac{\nu}{U} \int_0^x dx$$

これから境界層厚さは

$$\delta = 5.48 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

と得られる。壁面摩擦力  $\tau_0$  は

$$\tau_0 = \mu \frac{2U}{\delta} = 0.730 \frac{\rho U^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$$

このモデルで得られた結果を § 13.3 ブラジウスの厳密解の結果と比較すると面白いと思います。

例題 34：面上に生じる乱流境界層の速度分布が  $1/7$  乗則に従うものとして、面上の摩擦応力  $\tau_0$  を求めよ。また実験結果から得られた式  $\tau_0 = 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta(x)}\right)^{1/4}$  との比較で議論せよ。

答：例題 31 の結果を利用する。(13.24) より

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \left\{ \frac{d\theta}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} \right\} \rho U^2 = \left\{ \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} + \left(2 + \frac{72}{8 \times 7}\right) \frac{7}{72} \frac{\delta}{U} \frac{dU}{dx} \right\} \rho U^2 \\ &= \frac{7}{72} \left\{ \frac{d\delta}{dx} + 3.286 \frac{\delta}{U} \frac{dU}{dx} \right\} \rho U^2 \end{aligned}$$

尚、乱流における  $\tau_0$  の実験結果として

$$\tau_0 = 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta(x)}\right)^{1/4} \quad (13.28)$$

が知られている。いま、簡単化のために  $dU/dx = 0$  と近似して両式を等しいとおくと

$$\begin{aligned} \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} &= 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta(x)}\right)^{1/4} \rightarrow \frac{7}{72} \int_0^\delta \delta^{1/4} d\delta = 0.0225 \int_0^x \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/4} \\ \therefore \delta(x) &= 0.371 \left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{1/5} \quad (13.29) \end{aligned}$$

これから乱流境界層の厚みは  $x^{4/5}$  に比例することがわかる。層流境界層の厚みが  $\sqrt{x}$  に比例して増大したのに比べ乱流境界層の成長は早いといえる。

### 13.3 ブラジウス厳密解法

境界層方程式を真正面から解いたのがブラウジウスの厳密解法と呼ばれるものですが、この解法のアウトラインをみていきます。平板に沿う流れでは圧力勾配はゼロで  $\partial p/\partial x = 0$ ，さらに定常流とする  $\partial u/\partial t = 0$  ですから平板境界層の運動方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (13.30)$$

となります。例題 29 で平板上に生成される境界層厚さ  $\delta$  は

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

で表すことができました。そこで変数  $x, y$  を次の変数  $\xi, \eta$  に変数変換します<sup>19</sup>。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{(y/2)}{\delta} = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

<sup>19</sup>  $\eta = y/\delta$  としてもよいが後の計算が楽になるように  $y/2$  としています。

そして次の流れ関数を導入します。

$$\psi = \sqrt{\nu x} U f(\eta) \quad (13.31)$$

ここで  $f(\eta)$  は無次元量です。

$x, y$  微分から  $\xi, \eta$  微分への微分演算子の変換公式は適当な関数  $\varphi(\xi, \eta)$  を考えて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\eta}{2x} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2x} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi = \frac{1}{4} \frac{U}{\nu x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \frac{U}{\nu x} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

となります。この公式を使って流れ関数より速度  $u, v$  は

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{2} U f' \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \psi = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (f' \eta - f) \end{aligned} \quad (13.33)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) U f'(\eta) = -\frac{U \eta}{4x} f'', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{4} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U^2}{8 \nu x} f''' \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

となり、これらを境界層の運動方程式に入れると  $f$  に対する常微分方程式

$$f f'' + f''' = 0 \quad (13.35)$$

が得られます。この常微分方程式の解を  $\eta$  でベキ展開した級数解法で求めていきます。境界条件は  $y = 0$  のとき  $u = v = 0, y = \infty$  のとき  $u = U$  として

$$\left. \begin{aligned} y = 0 : u = 0, v = 0 &\Rightarrow \eta = 0 : f' = 0, f = 0 \\ y = \infty : u = U &\Rightarrow \eta = \infty : f' = 2 \end{aligned} \right\}$$

が得られます。 $f(\eta)$  を  $\eta$  のベキで展開し

$$\begin{aligned} f(\eta) &= A_0 + \frac{A_1}{1!} \eta + \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 \dots \\ \therefore f'(\eta) &= A_1 + A_2 \eta + \frac{A_3}{2!} \eta^2 + \dots \end{aligned} \quad (13.36)$$

とすると最初の境界条件より

$$f(0) = A_0 = 0, \quad f'(0) = A_1 = 0$$

となるので

$$\left. \begin{aligned} f(\eta) &= \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 + \frac{A_n}{n!} \eta^n + \dots, & f'(\eta) &= A_2 \eta + \frac{A_3}{2!} \eta^2 + \dots + \frac{A_n}{(n-1)!} \eta^{n-1} + \dots \\ f''(\eta) &= A_2 + A_3 \eta + \dots + \frac{A_n}{(n-2)!} \eta^{n-2} + \dots, & f'''(\eta) &= A_3 + A_4 \eta + \frac{A_5}{2!} \eta^2 + \dots + \frac{A_n}{(n-3)!} \eta^{n-3} \end{aligned} \right\}$$

これを (13.35) に入れると

$$A_3 + A_4 \eta + \left( \frac{A_2^2 + A_5}{2!} \right) \eta^2 + \left( \frac{4A_2 A_3 + A_6}{3!} \right) \eta^3 + \dots = 0$$

これは恒等式だから  $\eta$  の各項はゼロでなければならないので

$$A_3 = 0, A_4 = 0, A_2^2 + A_5 = 0, 4A_2 A_3 + A_6 = 0 (\rightarrow A_6 = 0), A_7 = 0 \dots$$

これらを  $f(\eta)$  の展開式に入れて整理すると

$$\begin{aligned}
 f(\eta) &= \frac{A_2}{2!} \eta^2 - \frac{A_2^2}{5!} \eta^5 + \frac{11A_2^3}{8!} \eta^8 - \frac{375A_2^4}{11!} \eta^{11} + \dots \\
 &= A_2^{1/3} \left\{ \frac{(A_2^{1/3} \eta)^2}{2!} - \frac{(A_2^{1/3} \eta)^5}{5!} + \frac{11(A_2^{1/3} \eta)^8}{8!} - \frac{375(A_2^{1/3} \eta)^{11}}{11!} + \dots \right\} \\
 &= A_2^{1/3} \left[ \frac{Y^2}{2!} - \frac{Y^5}{5!} + \frac{11Y^8}{8!} - \frac{375Y^{11}}{11!} + \dots \right] \quad (\text{ただし } Y = A_2^{1/3} \eta) \\
 &= A_2^{1/3} F(Y)
 \end{aligned} \tag{13.37}$$

となります。ここで  $A_2$  の値を求めるのに次の極限操作をしてやります。

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f' = \lim_{Y \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) = A_2^{2/3} \lim_{Y \rightarrow \infty} F'(Y)$$

また、境界条件より  $\eta = \infty : f' = 2$  でしたから

$$A_2^{2/3} \lim_{Y \rightarrow \infty} F'(Y) = 2 \longrightarrow A_2 = \left\{ \frac{2}{\lim_{Y \rightarrow \infty} F'(Y)} \right\}^{3/2}$$

この値は求められており、

$$A_2 = 1.32824 \tag{13.38}$$

次に (13.37) を 2 階微分して

$$f''(\eta) = f''(0) = A_2 = 1.32824$$

以上のことからせん断応力  $\tau_w$  は (13.34) より

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{U}{4} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) = \frac{U}{4} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) \times 1.32824 = 0.6641 \left( \frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2} \frac{\rho U^2}{2} \tag{13.39}$$

と求まります。また、境界層の厚さ  $\delta$  は数値計算がなされており、その結果

$$\delta(x) = 5.0 \sqrt{\frac{x\nu}{U}} \tag{13.40}$$

が得られています。また、排除厚さと運動量厚さはそれぞれ

$$\delta^*(x) = 1.72 \sqrt{\frac{x\nu}{U}}, \quad \theta^* = 0.664 \sqrt{\frac{x\nu}{U}} \tag{13.41}$$

と求められています。

(了)

これで第 8 回目を終わります。お疲れ様でした。毎度の注意ですが、私の理解の浅さにもとづく誤った記述やミススペル等を見つけれられたらご自分で訂正いただくか、お手数でもお気軽にご一報いただくとありがたいです。ところでブラジウスの厳密解法は級数解法によるものですが、例題の演習問題は積分計算の問題のようになりましたが、この程度の積分は手計算でも OK のハズ (!?)。

さて、次回の第 9 回目は境界層のお話の続きとして「境界層剥離」について少し触れ、それから粘性流の遅い流れの話に入っていきたいと思います。お楽しみに、それではまた～。